

# 加速器束流动力学期刊论文导读 (2023 年 6 月)

受“京师物理”公众号启发，我们几个同好便萌生将加速器领域的代表性期刊 Physical Review Accelerators and Beams (PRAB) 里的论文进行导读。主要 (但不限于) 导读材料选自 PRAB 近期上线的期刊，与部分美国物理学会 (American Physical Society, APS) 旗下的其它期刊或过去 PRST-AB、Elsevier 的核物理与技术 Nuclear Instruments and Methods (NIM) 期刊等可能涉及加速器方面的论文。与超快电子衍射成像动力学相关的论文则不在此限。

预期论文导读将于每个月初收集后发布，在 [http://faculty.hust.edu.cn/jcytsai/zh\\_CN/article/2191806/content/1551.htm#article](http://faculty.hust.edu.cn/jcytsai/zh_CN/article/2191806/content/1551.htm#article) 可以找到过去的导读文档。限于成员水平，导读仍许多地方有待改进 (正)。任何关于导读内容的指正、建议、意见都欢迎提出、交流，我们期待从交流讨论中激发的可能研究课题。

本期 (2023 年 6 月) 结果统计如下表

成员姓名	导读列表	联系方式
蔡承颖	[1]、[2]、[3]、[4]、[5]	jcytsai@hust.edu.cn
周剑晖	[6]、[7]、[9]、[10]、[13]	
李嘉鹏	[8]、[11]、[12]、[14]	

## 目录

1	电子储存环的微波不稳定性 [NIMA 438] Microwave instability in electron storage rings	4
2	电子储存环纵向集体效应的新观点 [Sci. Rep.] New aspects of longitudinal instabilities in electron storage rings	12
3	小世界网络的集体动力学 [Nature 393] Collective dynamics of “small-world” networks	15
4	小世界网络模型的平均场解 [PRL 84] Mean-Field Solution of the Small-World Network Model	21
5	从 Kuramoto 到 Crawford: 探索耦合振子分布同步现象的历程 [Physica D 143] From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators	24
6	高强度强子加速器中 betatron 失配引起的发射度稀释 [NIMA 595] Emittance dilution due to the betatron mismatch in high-intensity hadron accelerators	28
7	通过光学平衡抵消相干同步辐射效应引起的发射度增长 [PRL 110] Cancellation of Coherent Synchrotron Radiation Kicks with Optics Balance	32
8	基于切片矩阵的低能高亮度电子束动力学 [NIMA 937] Low-energy high-brightness electron beam dynamics based on slice beam matrix method	35
9	在具有束团压缩的双弯铁消色散段中抑制相干同步辐射引起的发射度增长 [PRAB 26 05] Suppression of the coherent synchrotron radiation induced emittance growth in a double-bend achromat with bunch compression	38
10	用于高强度束团相空间操纵的广义 Kapchinskij-Vladimirskij 分布和束矩阵 [PRL 117] Generalized Kapchinskij-Vladimirskij Distribution and Beam Matrix for Phase-Space Manipulations of High-Intensity Beams	43
11	加速过程束流的空间电荷效应 [PRSTAB 11-01] Space charge effect in an accelerated beam	47

- 12 用 CST 模拟具有真空间隙的层状光栅的 THz Smith-Purcell 辐射 [NIMB 355]  
CST simulations of THz Smith-Purcell radiation from a lamellar grating with  
vacuum gaps 49
- 13 针对相干同步辐射在多弯铁循环弧中导致的微聚束的另一种观点 [NIMA 943]  
An alternative view of coherent synchrotron radiation induced microbunching  
development in multibend recirculation arcs 52
- 14 六维路径传输矩阵的半解析方法及其在高亮度带电粒子束传输中的应用 [WEPLS12]  
A semi-analytical approach to six-dimensional path-dependent transport ma-  
trices with application to high-brightness charged-particle beam transport 58

## 1 电子储存环的微波不稳定性 [NIMA 438]

### Microwave instability in electron storage rings

#### 1.1 基本信息

- 分类：多粒子集体效应
- 作者：A. Mosnier (CEA Saclay, 法国原子能研究所核科学与技术学院)
- 类型：理论、数值计算
- 链接：<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0168900299008323?via%3Dihub>

#### 1.2 摘要

微波不稳定性是电子储存环中的一种常见的单束团不稳定性，存在多种不同的机制导致此不稳定性。这篇论文以经典的 Sacherer 方法为主轴，分为径向模 (radial) 与角向模 (azimuthal mode)，其不同程度的耦合导致微波不稳定性。在电子储存环中，完整的分析还需要考虑稳态解 (stationary solution)，并在此解的基础上讨论稳定性 (stability) 问题。在考虑势阱畸变 (potential well distortion, PWD) 的稳态解的基础上，分析不同径向模或/与角向模耦合导致的微波不稳定性，将采用 Oide-Yokoya 发展的“step function technique”。

这篇论文基于 SOLEIL 储存环的电子束与相应的宽带阻抗为参数，演示了不同频段下的微波不稳定性动力学。对较高频的宽带阻抗 (比如：30 GHz)，角向模式耦合导致的微波不稳定性早于径向模式耦合发生。对较低频的宽带阻抗 (比如：11 GHz)，径向模式耦合通常先发生。另外，对低频情况，束团纵向相空间存在 beamlets，相邻 beamlet 之间的粒子扩散 (diffusion) 效应可以用来部分解释 sawtooth instability。这篇论文正文最后一部分讨论了存在 harmonic cavity 情况下的微波不稳定动力学过程。

#### 1.3 贡献或创新点

- 创新点：这篇论文系统地给出微波不稳定的束团动力学过程，讨论涉及的阻抗频段范围约为 5 GHz 至 30 GHz。电子束团长度所表征的中心频率  $\sim \sigma_t^{-1}$  与阻抗主要覆盖频段的相对关系决定了束团的动力学行为。

这篇论文利用基于线性化 Vlasov 方程的 Sacherer 矩阵方程的本征值解与粒子跟踪模拟结果，两者相互验证、讨论。

- 贡献：这篇论文一开始先简单回顾基本理论的结果，包含 Haissinski 方程，决定了存在尾场阻抗下的稳态零阶解。在这个基础上讨论集体效应导致的动力学（一阶）过程的稳定性问题。讨论的阻抗为宽带阻抗，因此，涉及的动力学为单束团效应，一般通称微波不稳定性。

关于理论的细节，可以参考该论文 Appendix A，此处不论。

接着，这篇论文基于 SOLEIL 储存环参数，主要讨论两个频段的微波不稳定性：30 GHz 与 11 GHz，皆为宽带阻抗。其中，30 GHz 比束团长度所表征的中心频率  $\sim \sigma_t^{-1}$  高得多，而与 11 GHz 相比则相当。对 30 GHz 情况，稳态情况下，有如下 Figs. 2, 1, 3 的相空间分布、束团分布与不同径向范围的同步振荡频率：

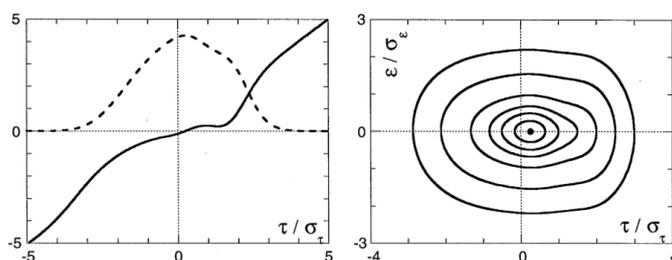


Fig. 2. (Left) Normalized net accelerating voltage  $q - V_0(q)$  (solid line) and charge distribution (dashed line) for a beam current of 5 mA. (Right) Constant-H contours in the phase space  $(q, p)$ .

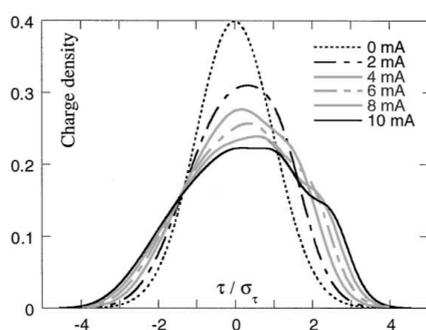


Fig. 1. Charge distributions for different beam currents (30 GHz resonator).

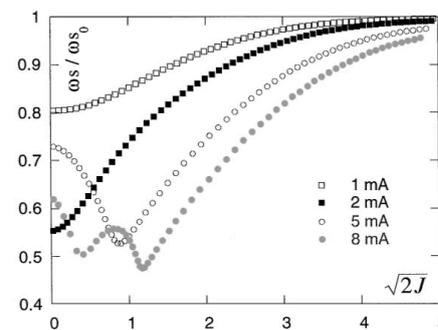


Fig. 3. Normalized synchrotron frequency  $\omega_s/\omega_0$  as a function of  $\sqrt{2J}$  for different bunch current of 5 mA (30 GHz resonator).

当阻抗中心频率比束团  $\sigma_t^{-1}$  高很多时，电子看到的阻抗为“感性”(inductive)，即， $\text{Im}Z_{\parallel}(\omega) < 0$ ，因此，同步振荡频率会减小<sup>1</sup>。最终大振幅情况下，同步振荡没有退化到纯光学情况，这是由于阻抗的电阻成分。可以看到，不同“层”(即，不同  $J$ ) 的电子可能存在同样的同步振荡频率，这个事实可能导致一种“弱”微波不稳定

<sup>1</sup>可参考 A.W. Chao 集体效应一书中的 Eq. (6.58)。

性。这个弱不稳定性由不同 radial mode 但同个 azimuthal mode 导致，一般被同步辐射阻尼抑制。下面我们讨论的 azimuthal mode 耦合为不同 azimuthal mode  $m$ 。

对 11 GHz 情况，稳态情况下，有如下 Figs. 5, 4, 6 的相空间分布、束团分布与不同径向范围的同步振荡频率。可以看到，存在 beamlets。注意，此处的 beamlet 动力学是此相对低频微波不稳定性与相对高频微波不稳定性动力学的主要区别之一。

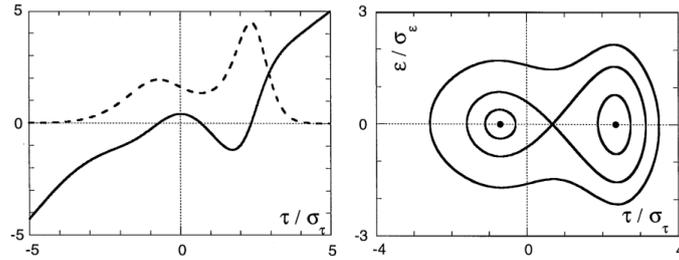


Fig. 5. (Left) Normalized net voltage  $q - V_o(q)$  (solid line) and charge distribution (dashed line). (Right) Constant-H contours in phase space  $(q, p)$  at 5 mA.

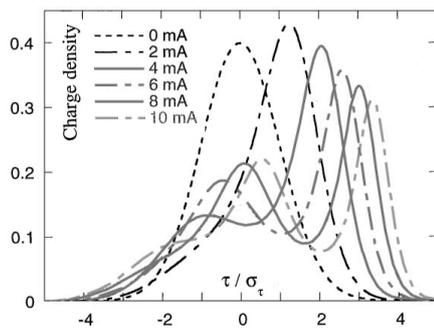


Fig. 4. Charge distributions for different beam currents (30 GHz resonator).

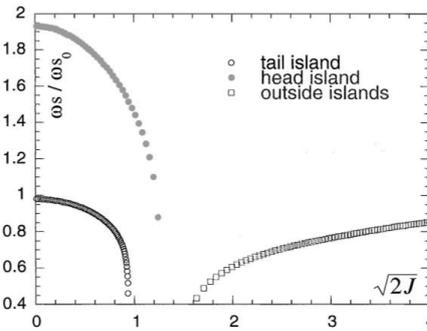


Fig. 6. Normalized synchrotron frequency  $\omega_s / \omega_0$  as a function of  $\sqrt{2J}$  for a bunch current of 5 mA (11 GHz resonator).

这篇论文大致按如下顺序讨论：

1. 高频 (30 GHz)、低频 (11 GHz)
2. Radial mode coupling、azimuthal mode coupling
3. 将 Sacherer 矩阵方程的解与粒子跟踪模拟的解比较

对高频 (30 GHz) 情况，先看 radial mode coupling 与 azimuthal mode coupling 的特征值，其中，粗点表示束团处于不稳定情况。由下图 Figs. 8 与 10 可以看到，角向耦合的阈值比径向较低。无论是角向或径向，不同模的振荡频率稍微减小，这是因为束团主要感受到的阻抗为感性。

### Radial mode coupling

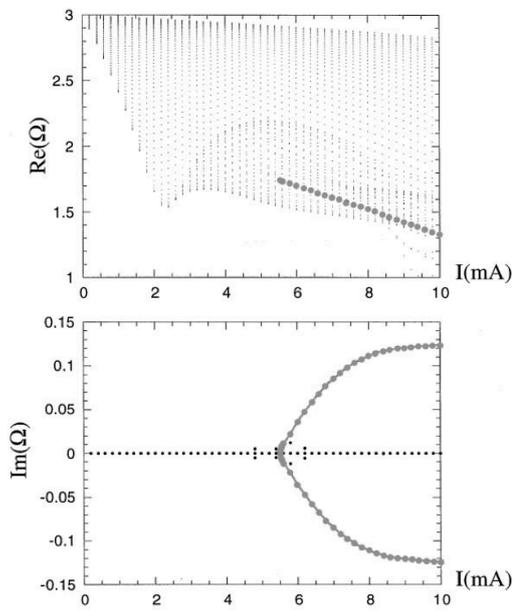


Fig. 8.  $\text{Re}(\Omega)$  and  $\text{Im}(\Omega)$  as a function of bunch current for  $m = 3$  only.

### Azimuthal mode coupling

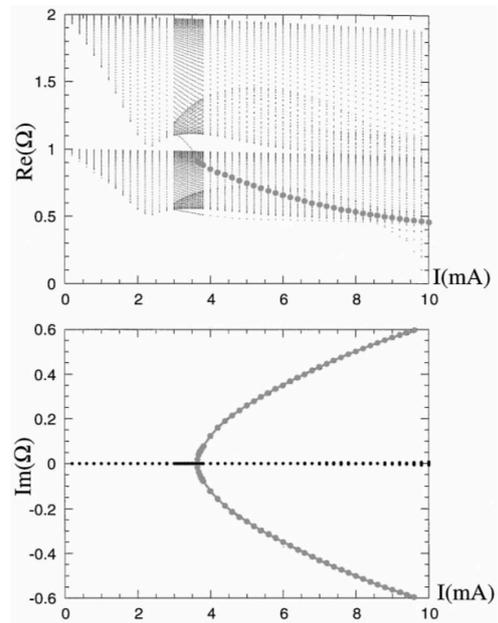


Fig. 10.  $\text{Re}(\Omega)$  and  $\text{Im}(\Omega)$  as a function of bunch current for the pair  $m = 1$  and 2.

下图 Figs. 13 与 15 比较了利用线性化 Vlasov 方程 (其实为 Sacherer 方程的特征基底) 得到的解与粒子跟踪模拟的结果。可以明显看到角向耦合/调制。

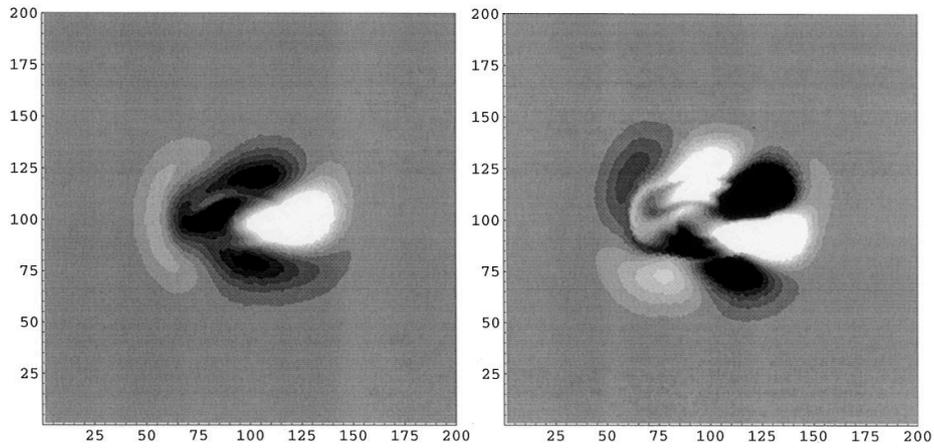


Fig. 13. Density plot of the highest growth rate modes in the physical phase space ( $\tau/\sigma_\tau, \epsilon/\sigma_\epsilon$ ) at a beam current of 6 mA (Vlasov method).

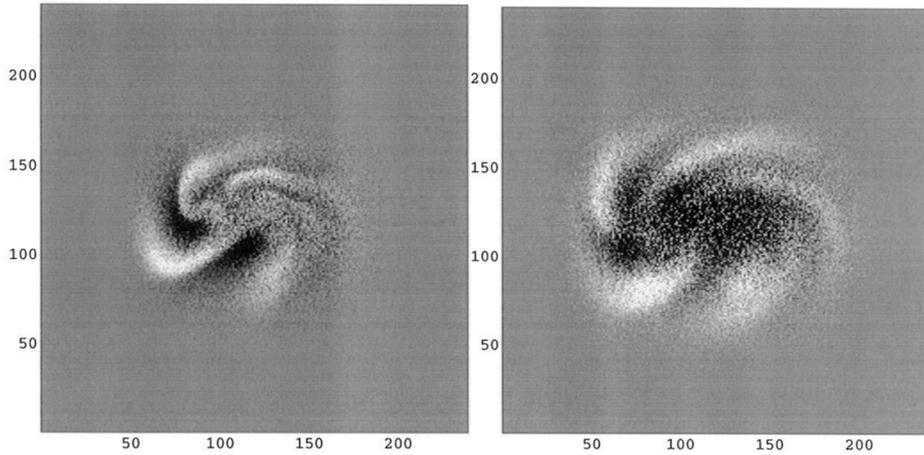


Fig. 15. Density plot of the unstable mode in the phase space ( $q = \tau/\sigma_\tau, p = \epsilon/\sigma_\epsilon$ ) at 6 mA (left-hand side, 250 turns) and at 10 mA (right-hand side, 2500 turns).

接着，考虑相对低频阻抗情况，此时不同模的同步振荡不再有明显的减小趋势，而是增加与减小都有。阈值也不像前面高频情况那么“清晰”，这是因为束团分裂为 beamlets 后，在相空间较复杂的动力学导致。尾部 beamlet (Fig. 20 中右侧的 beamlet) 有明显的 dipole 振荡，相空间外侧与 separatrix 附近则存在稍弱的 quadrupole 振荡。此外，出现了 sawtooth instability。

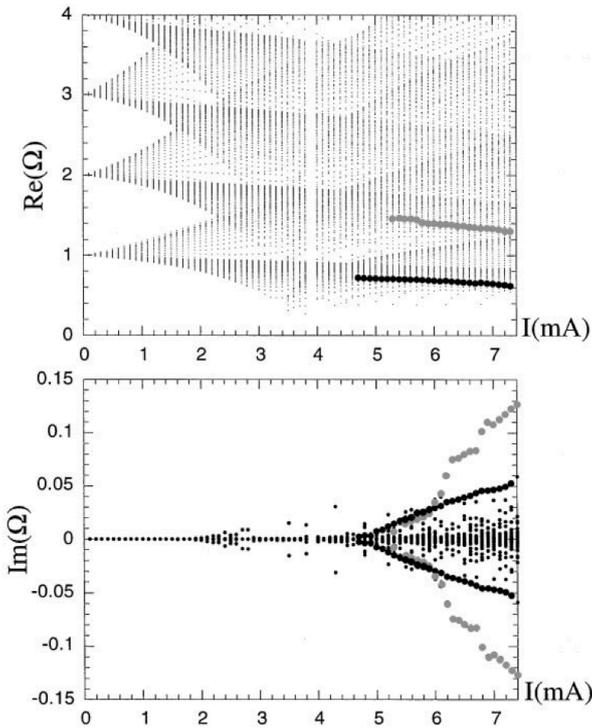


Fig. 17.  $\text{Re}(\Omega)$  and  $\text{Im}(\Omega)$  as a function of bunch current ( $m = 1-6$ ).

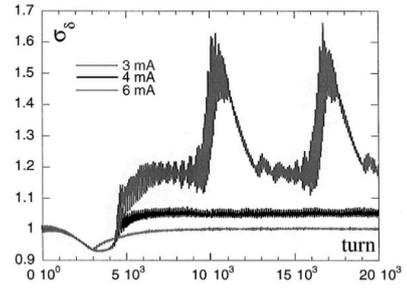


Fig. 19. Energy spread widening as a function of the number of turns.

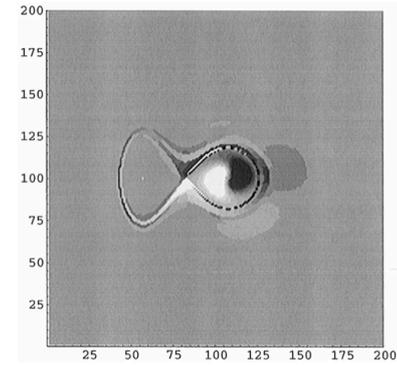


Fig. 20. Density plot of the dipole mode at a beam current of 6 mA (Vlasov method).

这篇论文对 sawtooth instability 给出的解释为不同 beamlet 间存在粒子扩散 (diffusion)，此扩散由同步辐射的量子激发效应造成。由于量子激发效应无法在基于 Vlasov 方程的 Sacherer 矩阵方程解体现，因此无法从 Fig. 21 看出。但是，基于粒子跟踪模拟考虑了量子激发效应，如 Fig. 22 所示，可以看出 beamlet 之间的粒子扩散现象。由此推论，对于存在 beamlet 的束团相空间分布，低频阻抗对其影响/危害甚巨。

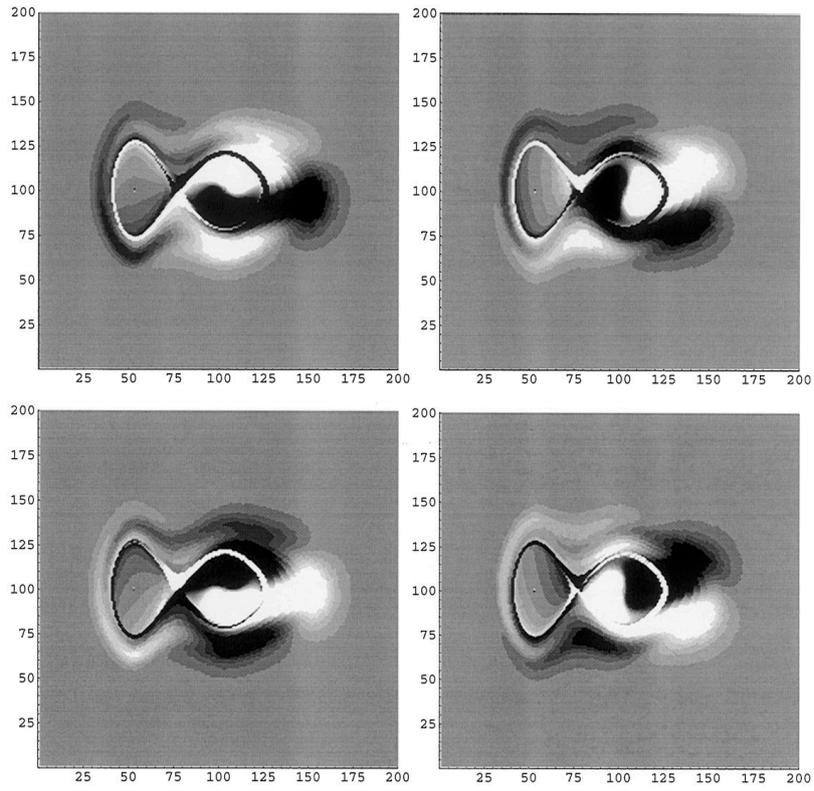


Fig. 21. Density plot of the unstable distribution in the physical phase space  $(\tau/\sigma_\tau, \ell/\sigma_\ell)$  at a beam current of 7 mA and at different times.

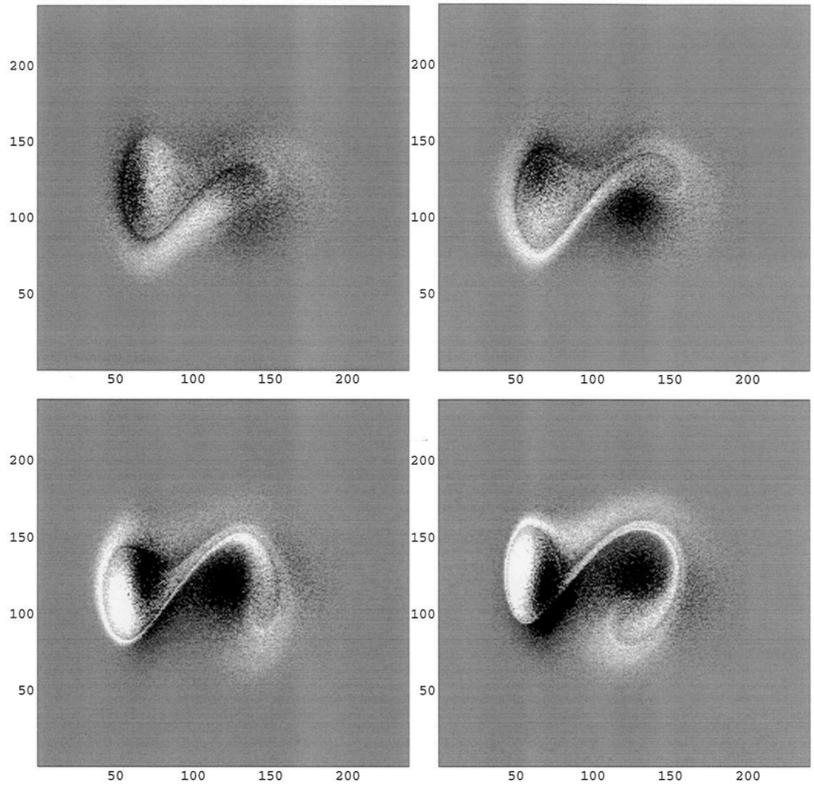


Fig. 22. Density plot in the phase space  $(q = \tau/\sigma_\tau, p = \ell/\sigma_\ell)$  at a beam current of 6 mA (tracking results, at turns 150, 200, 250, 300).

这篇论文正文最后一部分讨论了存在 harmonic cavity 情况下的微波不稳定动力学过程。由于束长拉伸，不稳定性阈值提高了约 2 倍，束团相空间分布也不再出现 beamlet 情况 (参考下图 Fig. 31, 30, 29)，有效抑制了由于 (实部) 电阻性阻抗导致的 dipole 与 quadrupole 振荡。

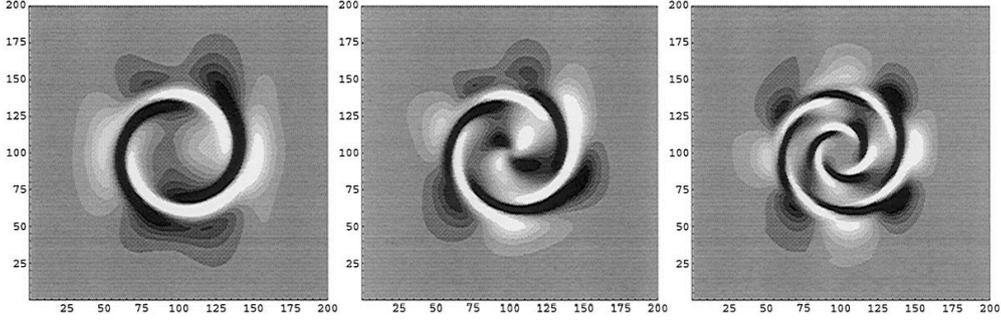


Fig. 30. Density plots of the most unstable distributions in the phase space of polar coordinates  $(\sqrt{2J}, \phi)$  at a beam current of 15 mA (Vlasov method).

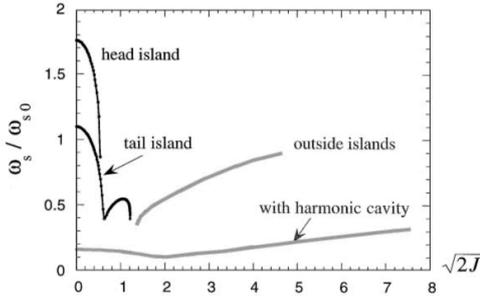


Fig. 29. Normalized synchrotron frequency  $\omega_s/\omega_{s0}$  (bottom) as a function of  $\sqrt{2J}$  (bunch current of 10 mA and 20 GHz resonator).

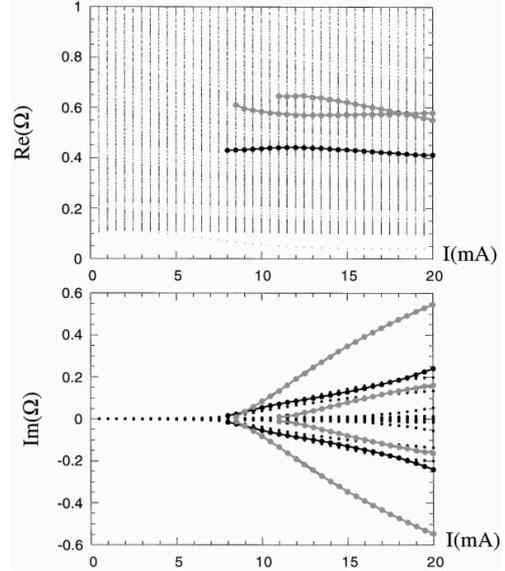


Fig. 31.  $\text{Re}(\Omega)$  and  $\text{Im}(\Omega)$  as a function of bunch current ( $m = 1-6$ ).

## 1.4 其它

这篇论文利用基于线性化 Vlasov 方程的 Sacherer 矩阵方程的本征值解与粒子跟踪模拟结果，两者相互验证、讨论。还可以通过 Vlasov 方程或 Vlasov-Fokker-Planck 方程的直接数值解 (direct solution) 与这篇论文讨论的两种方法得到的结果进一步比较。

## 2 电子储存环纵向集体效应的新观点 [Sci. Rep.]

### New aspects of longitudinal instabilities in electron storage rings

#### 2.1 基本信息

- 分类：多粒子集体效应
- 作者：A. Blednykh, B. Bacha, G. Bassi, W. Cheng, O. Chubar, A. Derbenev, R. Lindberg, M. Rakitin, V. Smaluk, M. Zhernenkov, Yu-chen Karen Chen-Wiegart and L. Wiegart (主要机构：BNL)
- 类型：实验、数值计算
- 链接：<https://www.nature.com/articles/s41598-018-30306-y>

#### 2.2 摘要

这篇论文提出并解释了低发射度电子储存环纵向集体效应的新观点。通过实验量测结果 (包含时域与频域量测) 与数值模拟结果均表明，随着单束团电流增加，束团能散并没有严格单调增加。这与传统理论模型给出的结论并不一致。随着单束团电流增加，束团能散与电流的关系存在局部最小值与最大值，其中，局部最小值归因于高阶微波不稳定性。

#### 2.3 贡献或创新点

- 创新点：提出并解释了低发射度电子储存环纵向集体效应的新观点。随着单束团电流增加，束团能散并没有严格单调增加。具体地说，随着单束团电流增加，束团能散与电流的关系存在局部最小值与最大值，其中，局部最小值归因于高阶微波不稳定性。

分析的创新点在于将电子束参数区间区分为以下三区间：

1. the low-intensity, or single-particle dynamics regime, where intensity-dependent effects are negligible

2. the medium-intensity, or bunch-lengthening regime, where the dynamics is characterized by a stationary distribution with a constant energy spread and intensity-dependent bunch length
3. the high-intensity, or microwave instability regime, where both energy spread and bunch length exhibit a time and intensity-dependent behavior.

一开始求解线性化 Vlasov-Fokker-Planck 方程时<sup>2</sup>

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + p \frac{\partial \Psi}{\partial q} - [q + Y_c F(q, \Psi, \tau)] \frac{\partial \Psi}{\partial p} = \alpha \frac{\partial}{\partial p} \left( p \Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial p} \right)$$

采用了以下改进的展开方式

$$\Psi(q, p, \tau; I_0) = \Psi_0(q, p; I_0) + \Psi_1(q, p; I_0) e^{-i \frac{\Omega}{\omega_s} \tau}$$

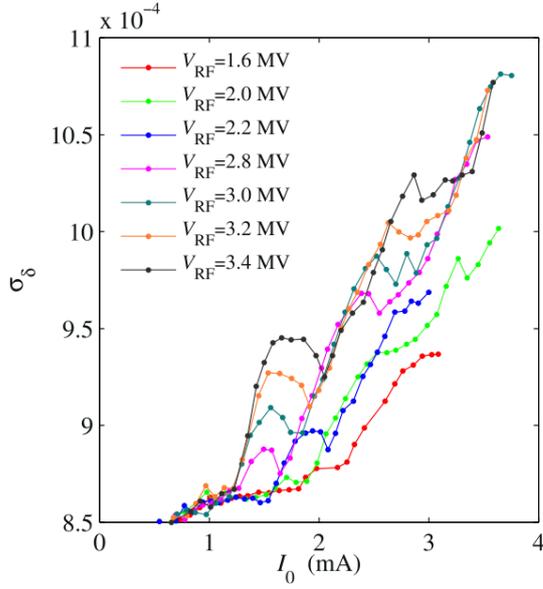
注意到，这里的平衡 (或未受扰动) 时的纵向相空间分布  $\Psi_0$  与束团电流强度  $I_0$  有关。这里的  $\Psi_0$  视为已知/给定的量，而不再通过求解 Haissinski 方程得到。

- 贡献：这篇论文结合数值模拟与实验量测，讨论了微波不稳定性的束团随电流变化时的特性。实验量测结果包含时域与频域量测。时域量测通过 synchrotron light monitor (SLM) 量测。频域量测则通过 in-vacuum undulator (IVU) radiation photon energy spectrum 量测。数值模拟则基于作者自行开发的求解 Vlasov-Fokker-Planck 方程的数值程序 (SPACE)。细节可参考 Gabriele Bassi, Alexei Blednykh, and Victor Smaluk, Self-consistent simulations and analysis of the coupled-bunch instability for arbitrary multibunch configurations. *Phys. Rev. Accel. Beams* 19, 024401 (2016). <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevAccelBeams.19.024401>, 其中，阻抗则由数值软件 GdfidL 仿真得到。关于 GdfidL 的相关信息，可参考 <http://www.gdfidl.de/>。

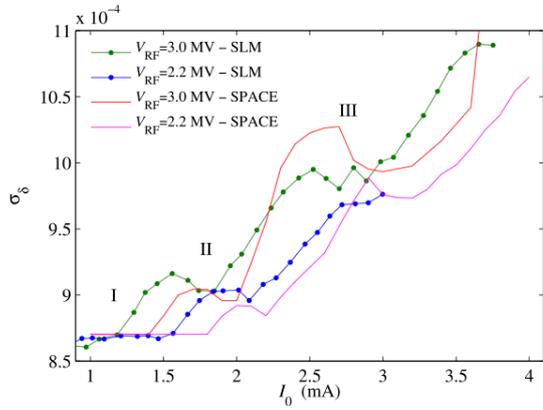
以下实现在 SPACE 程序的改进的理论模型的模拟结果，显示随着单束团电流增加，束团能散与电流的关系确实存在局部最小值与最大值。与实验量测结果 [参考该论文 Figs. 1 与 2, 此处不论] 一致。

---

<sup>2</sup>符号定义的细节此处不论。



**Figure 3.** Indirect measurements of  $\sigma_\delta$  as a function of  $I_0$  at different  $V_{RF}$  obtained from the SLM data for the 3DW lattice. The error-bars are similar to those shown in Fig. 2, but have been omitted here for clarity.



**Figure 5.** Comparison of the measured current-dependent energy spread to that simulated by the SPACE code at  $V_{RF} = 3.0$  MV and  $V_{RF} = 2.2$  MV.

### 3 小世界网络的集体动力学 [Nature 393] Collective dynamics of “small-world” networks

#### 3.1 基本信息

- 分类: 多粒子集体效应
- 作者: Duncan J. Watts and Steven H. Strogatz (Cornell)
- 类型: 理论、数值计算
- 链接: <https://www.nature.com/articles/30918>

#### 3.2 摘要

这篇中文导读摘自知乎专栏“集智科学家”关于这篇论文的介绍<sup>3</sup>, 经过部分修改, 特此注明。

1998 年, 一篇名为“小世界网络的集体动力学”(Collective dynamics of “small-world” networks) 的文章发表于 Nature, 首次提出“小世界网络”的数学模型, 并引起了来自社会科学、信息科学和自然科学等领域对这一模型的关注和应用。这篇论文主要从数学上定义了小世界网络, 对模型的全局性质和局部性质进行定量分析, 并将其特征与现实生活中的例子联系。作者还通过分析简化的传染病传播模型, 试图推广这一数学模型在动力学过程研究中的应用。

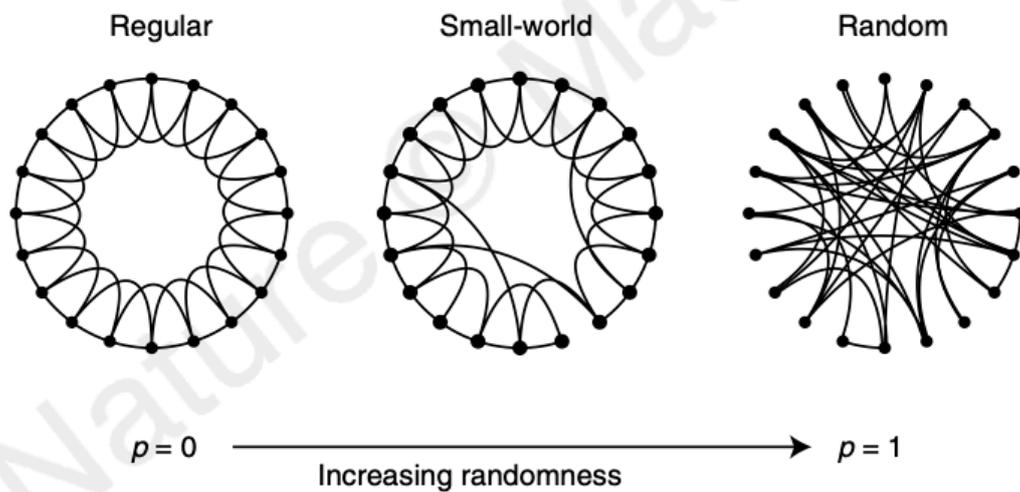
#### 3.3 贡献或创新点

- 创新点: 这篇论文首次提出“小世界网络”的数学模型, 后来称 Watts-Strogatz 模型 (W-S 模型), 从数学上定义了小世界网络, 对模型的全局性质和局部性质进行定量分析, 并将其特征与现实生活中的例子联系。
- 贡献: Watts 和 Strogatz 提出的小世界网络模型, 图像上介于规则网络 (regular networks,  $p = 0$ ) 和随机网络 (random or disorder networks,  $p = 1$ ) 之间, 既表现出与规则网络类似的高聚集性, 又像随机网络一样节点之间存在“捷径”(short cuts)。

---

<sup>3</sup><https://zhuanlan.zhihu.com/p/121618056>

什么是规则网络？用  $n$  表示网络的节点数， $k$  表示网络的连边数，可以给出规则网络的数学定义。以下图 Fig. 1 最左侧图为例，有  $n = 20$   $k = 4$  的规则网络由每个节点与之最近邻的 4 个节点相连接而形成。但真实世界的网络不会这么规则。于是 Watts 和 Strogatz 引入随机性，重新设计了连接的规则。在规则网络的基础上，对每条连边进行重新连接演化。重新连接的规则是：从一个节点顺时针方向的最近邻连边开始，此节点为出发点，连边与其余节点连接的概率为  $p$ 。若还是与最近邻节点相连，此连接保持不变。如下图 Fig. 1 中间图，注意有一个连边为重新连接。按此规则顺时针方向遍历所有节点的最近邻连边后，对每个节点的次近邻连边进行同样的操作。当  $p = 0$  时，原规则网络不变。当  $0 < p < 1$  时，原规则网络演变为小世界网络。当  $p = 1$  时，规则网络演变为随机网络。网络的全局特征和局部特征，分别由结构参数特征路径长度 (characteristic path length)  $L(p)$  和聚集系数 (clustering coefficient)  $C(p)$  来描述。



**Figure 1** Random rewiring procedure for interpolating between a regular ring lattice and a random network, without altering the number of vertices or edges in the graph. We start with a ring of  $n$  vertices, each connected to its  $k$  nearest neighbours by undirected edges. (For clarity,  $n = 20$  and  $k = 4$  in the schematic examples shown here, but much larger  $n$  and  $k$  are used in the rest of this Letter.) We choose a vertex and the edge that connects it to its nearest neighbour in a clockwise sense. With probability  $p$ , we reconnect this edge to a vertex chosen uniformly at random over the entire ring, with duplicate edges forbidden; otherwise we leave the edge in place. We repeat this process by moving clockwise around the ring, considering each vertex in turn until one lap is completed. Next, we consider the edges that connect vertices to their second-nearest neighbours clockwise. As before, we randomly rewire each of these edges with probability  $p$ , and continue this process, circulating around the ring and proceeding outward to more distant neighbours after each lap, until each edge in the original lattice has been considered once. (As there are  $nk/2$  edges in the entire graph, the rewiring process stops after  $k/2$  laps.) Three realizations of this process are shown, for different values of  $p$ . For  $p = 0$ , the original ring is unchanged; as  $p$  increases, the graph becomes increasingly disordered until for  $p = 1$ , all edges are rewired randomly. One of our main results is that for intermediate values of  $p$ , the graph is a small-world network: highly clustered like a regular graph, yet with small characteristic path length, like a random graph. (See Fig. 2.)

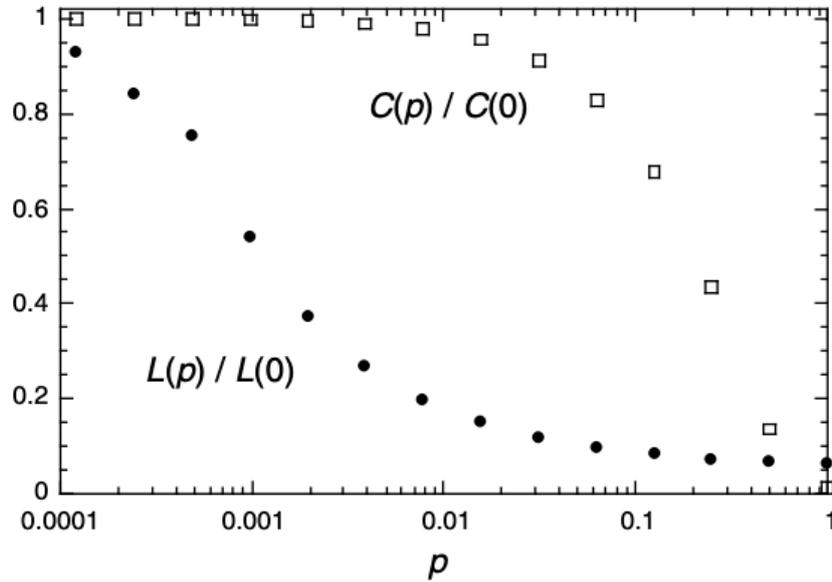
特征路径长度  $L$  指的是，在网络中任选两个节点，连通这两个节点的最少边数，定义为这两个节点的路径长度 (或长度)；网络中所有节点对应的路径长度的平均值，定义为网络的特征路径长度  $L$ 。特征路径长度反映的是网络的全局特征。对应到连锁信件实验 (或小世界实验) 中，特征路径长度即志愿者将信寄给目标人物所需要的平均转发次数。

聚集系数  $C$  是指，假设某个节点有  $k$  条边，则这  $k$  条边连接的节点 ( $k$  个) 之间最多可能存在的边的条数为  $k(k-1)/2$ ，用实际存在的边数除以最多可能存在的边数得到的分数值，定义为这个节点的聚集系数。所有节点的聚集系数的均值定义为网络的聚集系数。某个节点的聚集系数，反映了网络在该点附近位置的局部特征。在社交网络中，某个点聚集系数大，说明这个点代表的人有许多朋友，反之说明他的朋友少。

接着，作者分析此演变过程中特征路径长度、聚集系数随重连接概率  $p$  的变化关系。如图 Fig. 2 所示。图中的数据来源于对 20 个规则网络 ( $n = 20, k = 4$ ) 到随机网络演变做平均而得。其中  $L(0), C(0)$  分别是规则网络的特征路径长度、聚集系数， $L(p), C(p)$  分别对应重新连接概率为  $p$  时的特征路径长度、聚集系数。 $L = L(p)/L(0), C = C(p)/C(0)$  是以初始规则网络为标准对所有数据进行归一化。

作者重点研究节点连接稀疏但不至于分离的小世界网络。为了保证随机图是连接的，需要满足  $n \gg k \gg \ln(n) \gg 1$ 。此条件下，研究者发现，当  $p \rightarrow 0$  时， $L \sim n/2k, C \sim 3/4$ ；当  $p \rightarrow 1$  时， $L \approx L_{\text{random}} \sim \ln(n)/\ln(k), C \approx C_{\text{random}} \sim k/n$ 。其中， $L_{\text{random}}$  定义为节点数为  $n$ ，连接数为  $k$  的随机网络的特征路径长度，即  $p = 1$  时的  $L$ ； $C_{\text{random}}$  定义与  $L_{\text{random}}$  类似，即  $p = 1$  时的  $C$ 。

此时的规律是，规则网络高度聚集， $L$  随  $n$  线性增长；随机网络聚集较弱， $L$  随  $n$  的对数增长。对这两个极值情况的分析会让人们误以为聚集系数大的网络特征路径长度的值大，聚集系数小的网络特征路径长度的值小。然而，在  $p$  介于 0 和 1 的很长一段区间内， $L$  趋于  $L_{\text{random}}$  时， $C(p)$  远大于  $C_{\text{random}}$ 。这种  $L(p)$  急剧变小的小世界网络是少量的长连边或捷径 (long-range edges 或 short cuts) 的形成导致的。长连边指对两节点的连接长度小于  $L_{\text{random}}$ 。当  $p$  很小的时候，每条捷径的形成对  $L$  会产生很强的非线性影响，除了被连接的节点被影响，还会影响到节点周围的节点。



**Figure 2** Characteristic path length  $L(p)$  and clustering coefficient  $C(p)$  for the family of randomly rewired graphs described in Fig. 1. Here  $L$  is defined as the number of edges in the shortest path between two vertices, averaged over all pairs of vertices. The clustering coefficient  $C(p)$  is defined as follows. Suppose that a vertex  $v$  has  $k_v$  neighbours; then at most  $k_v(k_v - 1)/2$  edges can exist between them (this occurs when every neighbour of  $v$  is connected to every other neighbour of  $v$ ). Let  $C_v$  denote the fraction of these allowable edges that actually exist. Define  $C$  as the average of  $C_v$  over all  $v$ . For friendship networks, these statistics have intuitive meanings:  $L$  is the average number of friendships in the shortest chain connecting two people;  $C_v$  reflects the extent to which friends of  $v$  are also friends of each other; and thus  $C$  measures the cliquishness of a typical friendship circle. The data shown in the figure are averages over 20 random realizations of the rewiring process described in Fig. 1, and have been normalized by the values  $L(0)$ ,  $C(0)$  for a regular lattice. All the graphs have  $n = 1,000$  vertices and an average degree of  $k = 10$  edges per vertex. We note that a logarithmic horizontal scale has been used to resolve the rapid drop in  $L(p)$ , corresponding to the onset of the small-world phenomenon. During this drop,  $C(p)$  remains almost constant at its value for the regular lattice, indicating that the transition to a small world is almost undetectable at the local level.

相比之下，移走一个聚集区域的节点而产生的捷径，对  $C$  产生线性的影响更明显。因此，当  $p$  很小的时候  $C(p)$  基本上保持不变，但是  $L(p)$  迅速变小。这意味着，小世界中局部的变化是不明显的。在经过重连接后形成捷径的前提下，研究者对多种不同的起始网络图经过不同规则演化后进行了定量分析，都验证了这一观点。

### 3.4 其它

在这篇论文的后半部，作者通过研究简易化的传播病传染模型揭示了小世界网络的动力学性质，细节此处不论。尽管网络中只形成了少量的捷径，小世界网络模型全体感染所需的时间与随机图被全体感染的时间十分接近，即传染病在小世界网络中迅速传染。研究者强调了他们的传染病传播模型与前人研究工作的不同。这篇论文中的模型将网络的动力学性质  $T(p)$  描述为网络结构的显函数，不是关注某些随机图、散点或者链中特定的拓扑结构，而其他网络模型只强调网络的结构会影响传染病传播的速度和程度。这篇论文中的网络图皆为连接图，所以所预测的动力学性质受微小的图结构变化影响比不连接程度的影响更大。

## 4 小世界网络模型的平均场解 [PRL 84]

### Mean-Field Solution of the Small-World Network Model

#### 4.1 基本信息

- 分类：其它
- 作者：M. E. J. Newman, C. Moore, and D. J. Watts (Santa Fe Institute)
- 类型：理论、数值计算
- 链接：<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.84.3201>

#### 4.2 摘要

小世界网络模型是社会网络结构的一种简单模型，同时具有规则格点与随机图的特性。这里讨论的模型为具有低密度捷径 (short cuts) 的一维格点。这些捷径大大缩短了格点间的路径长度。这篇论文给出平均路径长度与其分布的平均场解 (mean-field solution)。在大系统尺寸下或极大/极小数目捷径下则为完整解 (exact solution)。

#### 4.3 贡献或创新点

- 创新点：
- 贡献：

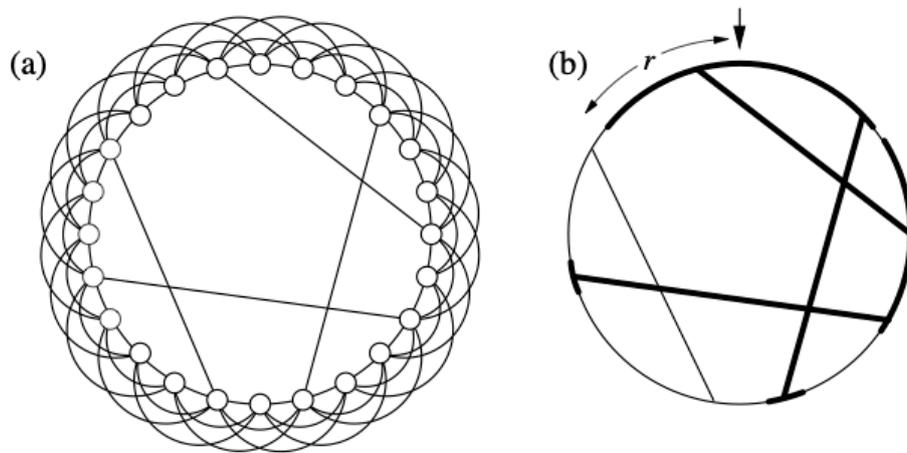


FIG. 1. (a) A small-world graph of 24 sites with  $k = 3$  and four shortcuts. (b) The continuum version of the same graph. The bold lines denote the portion of the graph which is within distance  $r$  of the point at the top denoted by the arrow. In this case there are four filled segments, or “clusters,” around the perimeter of the graph, or equivalently four gaps between clusters.

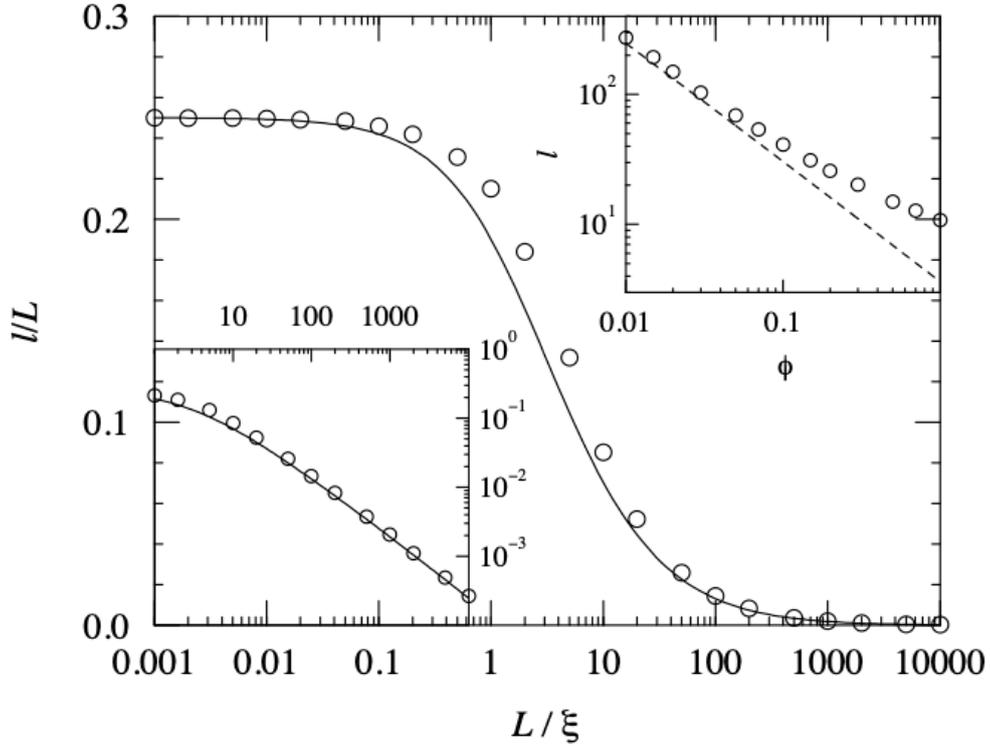


FIG. 2. The average path length as a fraction of system size on a  $k = 1$  small-world graph, plotted against the average number  $L/\xi$  of shortcuts. The circles are numerical measurements for the discrete model and the solid line is the analytic solution for the continuum model, Eq. (20). The error bars on the numerical measurements are smaller than the points. Lower inset: the same data replotted on log-log scales, showing the convergence of the numerical and analytic results in the limit of large  $L/\xi$ . Upper inset: the average path length on small-world graphs with  $L = 10^6$ , for values of  $\phi$  from 0.01 up to 1 (circles) and the analytic solution, Eq. (19) (dotted line).

## 5 从 Kuramoto 到 Crawford: 探索耦合振子分布同步现象的历程 [Physica D 143]

### From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators

#### 5.1 基本信息

- 分类: 其它
- 作者: Steven H. Strogatz (Cornell 大学)
- 类型: 理论、回顾
- 链接: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S016727890000944>

#### 5.2 摘要

Kuramoto 模型用来描述大量的、具有极限环特性的、具有特定频散分布的耦合振子系统。当耦合强度超过一个阈值时, 系统呈现相变 (phase transition), 部分的振子发生自发同步 (spontaneously synchronize), 其它振子则维持非相干。关于此模型的分叉 (bifurcation) 分析, 即使到今日仍然是个吸引人同时存在问题的。这篇论文回顾过去 25 年关于 Kuramoto 模型的研究进展, 包含成功与失败的尝试, 主要回顾路线起自 Kuramoto 的工作一直到最近 Crawford 的工作。探索的过程是一条美妙、弯弯绕的历程, 涉及了数学生物学、统计物理、动理学理论、分叉理论与等离子体物理。

#### 5.3 贡献或创新点

- 贡献: 这篇论文 §2 部分先是简要回顾了 Kuramoto 模型的进展, §3 则介绍该模型的基本内容。集体同步的研究最早由 Wiener 开展, 利用傅立叶积分, 后来无疾而终。接着是 Winfree, 将集体同步的讨论建立在大量耦合振子形成的模型, 讨论了不同的演化时间尺度的结果, 此时, 平均场的概念被引入。此后, Kuramoto 建立了一个更简单、清晰的模型, 利用微扰法, 假设振子间存在弱耦合。 $N$  个振子的一维运动方程可以写为

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij} (\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N$$

其中，交互作用函数  $\Gamma$  的一种简单情况可以写成

$$\Gamma_{ij}(\theta_j - \theta_i) = \frac{K}{N} \sin(\theta_j - \theta_i)$$

于是

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N$$

假设频散函数为对称的，即  $g(\omega) = g(-\omega)$ 。

为了量化系统特性，定义序参量 (order parameter) 为

$$r e^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j}$$

其中， $r$  称为 coherence。这里的定义非常类似加速器中定义的密度调制因子 (或群聚因子)。对于环形的  $N$  个耦合振子，这里的  $\theta$  有如下 Fig. 1 所示显见的几何图像。

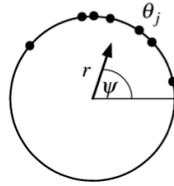


Fig. 1. Geometric interpretation of the order parameter (3.2). The phases  $\theta_j$  are plotted on the unit circle. Their centroid is given by the complex number  $r e^{i\psi}$ , shown as an arrow.

由上面定义的量， $N$  个耦合振子方程可以再化简，得到

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + K r \sin(\psi - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N$$

从这里可以看到，第  $i$  个振子受到的影响是集体的，是由剩余的  $(N - 1)$  个振子贡献  $K r \sin(\psi - \theta_i)$ 。这也体现了平均场的特性。当耦合强度  $K$  低于一阈值时，系统表现为非相干状态，每个振子独立运动  $r \ll 1$ ；当耦合强度  $K$  高于一阈值时，系统表现为相干状态， $N$  个振子运动存在集体特性  $r \rightarrow r_\infty$ 。如下图 Fig. 2 所示。

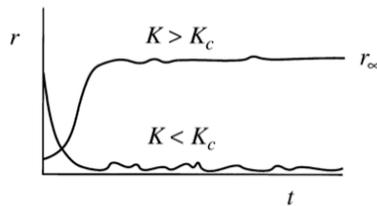


Fig. 2. Schematic illustration of the typical evolution of  $r(t)$  seen in numerical simulations of the Kuramoto model (3.1).

从分叉理论角度看, 当  $K < K_c$  时, 称 zero branch; 当  $K > K_c$  时, 称 bifurcation branch。Kuramoto 给出了  $K_c$  与  $r_\infty$ ; Mirollo 与 Strogatz 给出了 zero branch 稳定性的证明; Crawford 则是对弱非线性区域做出推广。Kuramoto 给出的  $K_c$  与  $r_\infty$  结果为

$$K_c = \frac{2}{\pi g(0)}, \quad r \approx \sqrt{\frac{16}{\pi K_c^3}} \sqrt{\frac{\mu}{-g''(0)}}$$

其中,  $\mu = \frac{K - K_c}{K_c}$ 。

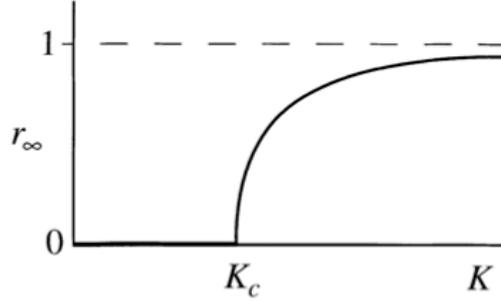


Fig. 3. Dependence of the steady-state coherence  $r_\infty$  on the coupling strength  $K$ .

关于 Kuramoto 模型仍存在许多问题待解决/证明, 比如: 稳定性问题, 有限  $N$  个耦合振子的涨落问题等, 参考该论文 §5。目前, 一些初步探索是基于在连续 Kuramoto 模型上做的, 即, 振子呈连续函数分布  $\int_0^{2\pi} \rho(\theta, t, \omega) d\theta = 1$ , 此时, 运动方程变成

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \rho \left( \omega + K \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\theta' - \theta) \rho(\theta', t, \omega') g(\omega') d\omega' d\theta' \right) \right]$$

考虑一种非相干情况, 有

$$\rho_0(\theta, \omega) \equiv \frac{1}{2\pi}$$

在加速器中, 这类解称为 coasting beam 近似。其稳定性分析可以通过微扰法做  $\rho(\theta, t, \omega) = \frac{1}{2\pi} + \epsilon \eta(\theta, t, \omega)$ , 其中,  $\eta(\theta, t, \omega) = c(t, \omega) e^{i\theta} + \text{c.c.} + \eta^{\text{h.o.t.}}(\theta, t, \omega)$ , 细节参考 §8。此时, 系统稳定性与线性算子  $A$  有关, 定义为

$$Ac \equiv -i\omega c + \frac{K}{2} \int_{-\infty}^{\infty} c(t, \omega') g(\omega') d\omega'$$

此算子的“谱”(spectrum) 包含系统低于阈值时的连续谱与高于阈值时的离散谱。低于阈值时, 上式可以化简为

$$Ac = i\omega_0 c$$

即, 核函数积分为零。高于阈值时, 假设  $c(t, \omega) = b(\omega) e^{\lambda t}$ , 则  $\lambda$  为离散的结果, 满足如下特征方程

$$1 = \frac{K}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\omega) d\omega}{\lambda + i\omega}$$

其在特殊情况下，解可以写成

$$1 = \frac{1}{2}K_c\pi g(0)$$

与经典 Kuramoto 分析一致。此外，对均匀频散  $g(\omega) = 1/2\gamma$ ，增长率  $\lambda$  可以写为

$$\lambda = \gamma \cot\left(\frac{2\gamma}{K}\right)$$

以上分析可以归结为，低于阈值时，谱为连续谱，特征值沿着下图 Fig. 4 虚轴分布。当高于阈值时，离散解  $\lambda$  将出现在右半平面，如图 Fig. 4 所示。

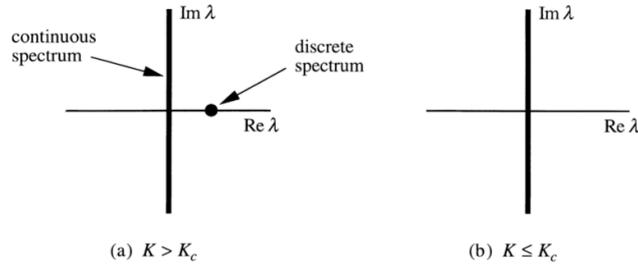


Fig. 4. Spectrum of the linear operator (8.4) that governs the linear stability of the incoherent state  $\rho_0 \equiv 1/2\pi$ . (a) For  $K > K_c$ , the incoherent state is unstable, thanks to the discrete eigenvalue  $\lambda > 0$ . This eigenvalue pops out of the continuous spectrum at  $K = K_c$ . (b) For  $K \leq K_c$ , the discrete spectrum is empty and the incoherent state is neutrally stable.

当  $K$  逐渐减小而通过  $K_c$  时，作者等人当时的分析给出  $\lambda$  将“穿过”连续谱虚轴线，由正变成负，并在数值模拟中看到相干因子  $r$  指数减小。当时得知这与朗道阻尼 (Landau damping) 有密不可分的关系。接着，这篇论文 §9 进一步讨论存在朗道阻尼时，系统的稳定性问题，细节此处不论。

## 5.4 其它

在 Youtube 上有一段关于 Y. Kuramoto 教授的简短访问<sup>4</sup>，提到当时 1975 年提出 Kuramoto 的一些经历，值得参考。

<sup>4</sup><https://www.youtube.com/watch?v=lac4TxWyB0g>

## 6 高强度强子加速器中 betatron 失配引起的发射度稀释 [NIMA 595] Emittance dilution due to the betatron mismatch in high-intensity hadron accelerators

### 6.1 基本信息

- 分类: 束流动力学
- 作者: J.Y. Tang (中国科学院高能物理研究所)
- 类型: 理论
- 链接: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0168900208011601>

### 6.2 摘要

加速器复合体 (accelerator complex) 两传输段部分之间的 betatron mismatch 是需要被重视的一点, mismatch 加上 filamentation 效应将会导致发射度稀释 (diluted emittance)。但是, 在高强度强子加速器中, mismatch 的影响被很大程度的低估了, 这是因为大多数情况下都使用 rms 发射度来表示稀释。总发射度的稀释明显会更大, 并且这在研究质子加速器中的束团损失时更为重要。这篇文章指出了在高强度强子加速器中将总发射度的稀释因子与 rms 发射度一起使用的必要性。这篇文章所给出的证明表明, rms 发射度的稀释因子对于任何初始束团分布都是相同的, 并且对于初始均匀分布、高斯分布和抛物线分布, 讨论了稀释后的详细束团分布, 并给出了数值模拟结果。

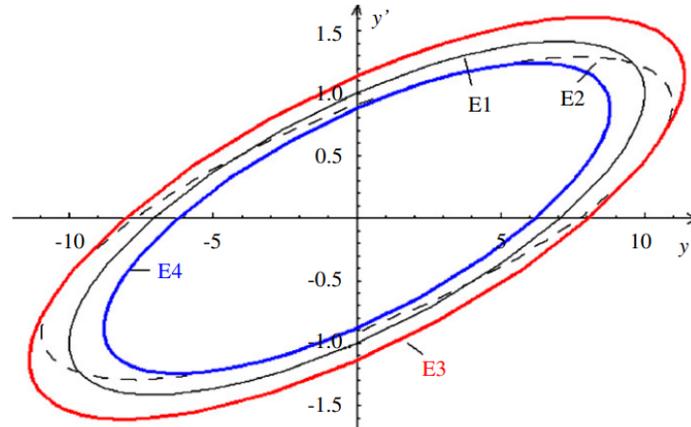
### 6.3 贡献或创新点

- 创新点: 由 betatron mismatch 导致的发射度变化的表达式如下所示, 下标 1 和 2 分别表示 lattice 和注入束团,  $\alpha$  和  $\beta$  表示 Courant-Snyder 参数:

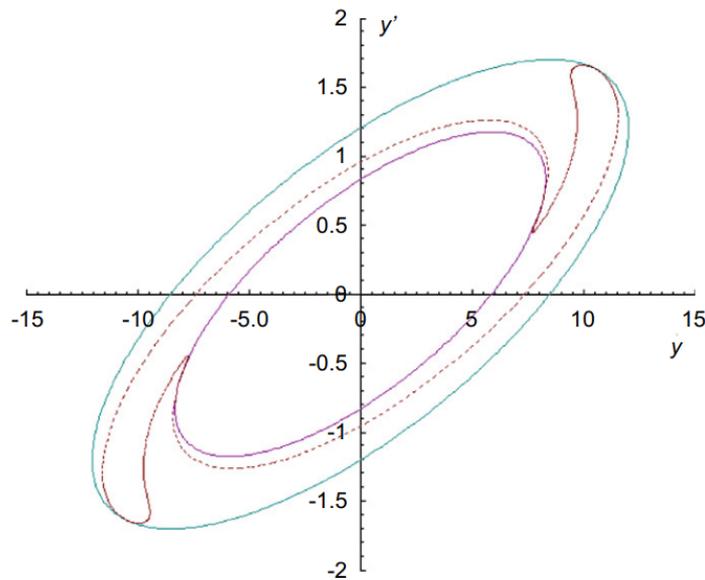
$$\frac{\epsilon_{\text{diluted}}}{\epsilon_0} = \frac{1}{2} \left( \frac{\beta_1}{\beta_2} + \left( \alpha_1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \alpha_2 \right)^2 \frac{\beta_2}{\beta_1} + \frac{\beta_2}{\beta_1} \right)$$

这篇文章指出, 对于 rms 发射度而言, 无论束团分布如何, 上式都是适用的。但对于高强度强子加速器, 当考虑束团粒子丢失时, 应使用总发射度, 这是因为 betatron mismatch 导致的发射度稀释对于总发射度比对于 rms 发射度重要得多。

- 贡献：由 betatron mismatch 导致的总发射度的稀释可以由 Fig.1 中的三个椭圆表示，其中 E1、E2 和 E3 分别表示 matched 束团、mismatch 束团和稀释发射度，E4 为分布均匀时未稀释部分的椭圆。



**Fig. 1.** Emittance dilution due to the betatron mismatch. E1: ellipse for the matched beam; E2: ellipse for the mismatched beam; E3: ellipse for the diluted emittance; E4: ellipse for the non-diluted part when the distribution is uniform.



**Fig. 2.** Filamentation effect in the early stage in the presence of nonlinear forces. Dashed line outlines the filamented part of the distribution; the outer and inner ellipses are E3 and E4 in Fig. 1.

由 filamentation 效应 (见 Fig.2) 产生的沿纵向的 betatron 调制将在一定周期后导致更大的束团发射度，即束团将填充整个 E3 椭圆。这篇文章给出了由 betatron mismatch 导致的总发射度稀释的推导，并且获得了总发射度稀释因子：

$$\eta = \frac{\epsilon_3}{\epsilon_2} = \xi + \sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$\xi = \frac{1}{2} \left( \frac{\beta_1}{\beta_2} + \frac{\beta_2}{\beta_1} + \frac{\beta_1}{\beta_2} \left( \alpha_2 - \frac{\beta_2}{\beta_1} \alpha_1 \right)^2 \right).$$

当使用总发射度时, 由于 betatron mismatch 导致的发射度稀释变得显著, 这与使用 rms 发射度时的情况截然不同。特别是在 mismatch 因子较小的情况下 ( $\xi - 1 \ll 1$ ), 总发射度的稀释是显著的, 但 rms 发射度的稀释则是可以忽略的。

与束团分布通常是类高斯的电子加速器的情况不同, 强子加速器中的束团分布更复杂。这篇文章使用了三种不同类型的分布: 高斯分布、均匀分布和抛物线分布来展示 betatron mismatch 情况下的稀释效应。当 betatron mismatch 发生时, filamentation 效应会稀释粒子分布, 所以在稀释发射度的外部束团分布会变得稀疏。Fig.4 展示了在上述三种分布下的数值结果, 其中  $I$  和  $I_0$  分别为 mismatch 和 matched 情况下的 Courant-Snyder 不变量 (即角度-作用变量中的作用量)。

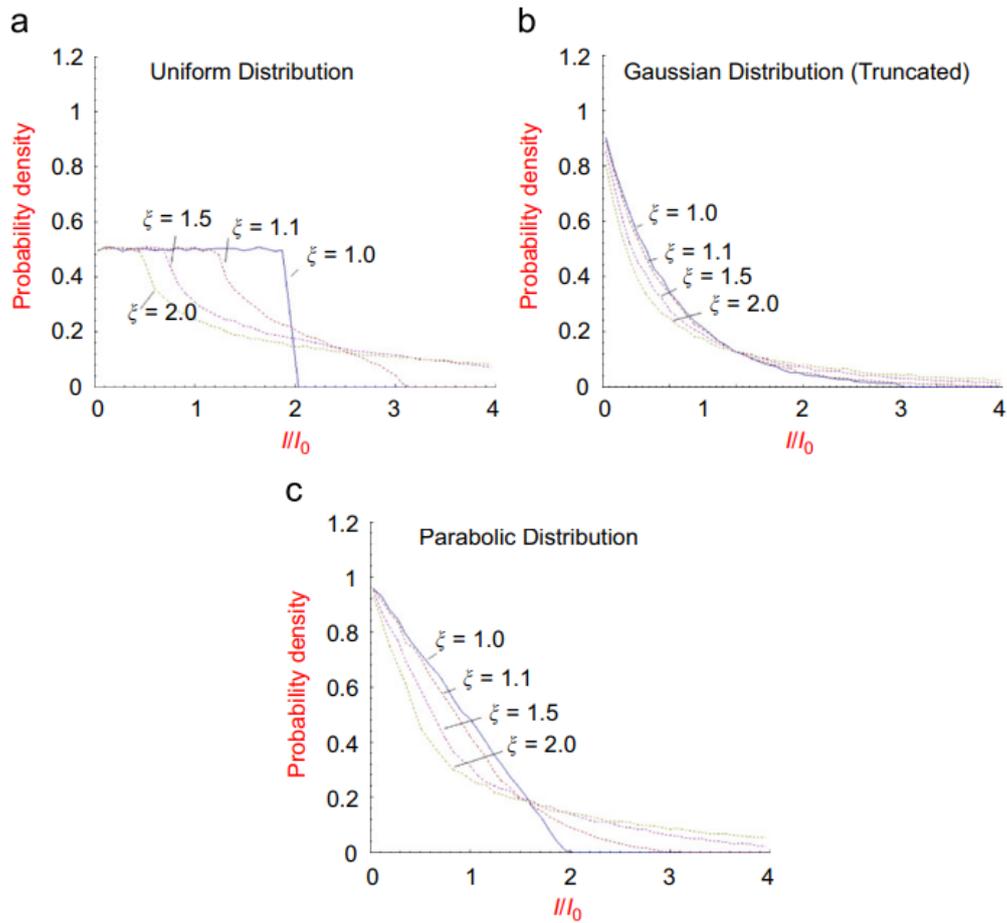


图 1: Fig.4: 在均匀分布和抛物线分布的情况下，稀释后的束团分布不再相同，而在初始高斯分布和相对较小的失配因子 ( $\xi \ll 2$ ) 的情况下，稀释后它仍然接近高斯分布，但具有不同的方差。对于均匀分布和抛物线分布，稀释部分中的粒子群似乎比高斯分布重要得多。均匀分布情况下的未扰动和未修改的核心与 Eq.(6) 一致。

## 7 通过光学平衡抵消相干同步辐射效应引起的发射度增长 [PRL 110] Cancellation of Coherent Synchrotron Radiation Kicks with Optics Balance

### 7.1 基本信息

- 分类: 相干同步辐射 (CSR)
- 作者: S.Di Mitri, M. Cornacchia and S.Spampinati (主要机构: Elettra-Sincrotrone Trieste)
- 类型: 理论
- 链接: <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.110.014801>

### 7.2 摘要

在设计用于传输高亮度电子束的直线加速器中, 最小化横向发射度是至关重要的。相干同步辐射 (CSR) 是导致发射度增加的一个重要因素。针对该问题, 已经提出了一种通过在电子传输线上施加某些对称条件来抵消这种影响的方法。这篇文章建立了束团 Courant-Snyder (C-S) 参数与发射度增长之间的联系, 并通过提供不对称光学的 CSR 抑制的一般方案来对上述方法进行扩展。

### 7.3 贡献或创新点

- 创新点: 这篇文章基于已经在 FERMI@Elettra 自由电子激光器中的双弯铁消色散系统 (double bend achromatic system) 中观察到的抑制由 CSR 导致的发射度增长的证据 [1], 通过将 C-S 描述的方法应用于 dogleg 消色散系统上, 解释并拓展了通过光学对称抑制 CSR kicks 的原始考虑。该分析结果允许将最终发射率增长作为非光学对称的函数进行评估, 因此它也适用于非对称的磁聚焦结构设计。这项研究有望实现具有相对较大弯转角度的紧凑色散传输线, 从而降低未来电子设备的成本。
- 贡献: 如下图所示, 这篇文章考虑的 FERMI 分束消色散系统 (简称 Spreader) 由两个相同的双弯铁消色散器 (简称 MDBA) 组成, 每个 MDBA 包括两个聚焦-散焦单元, 其 nominal 设置确保了对称的  $\beta$  和  $\alpha$  以及每个二极铁之间的相位超前为  $\pi$ 。

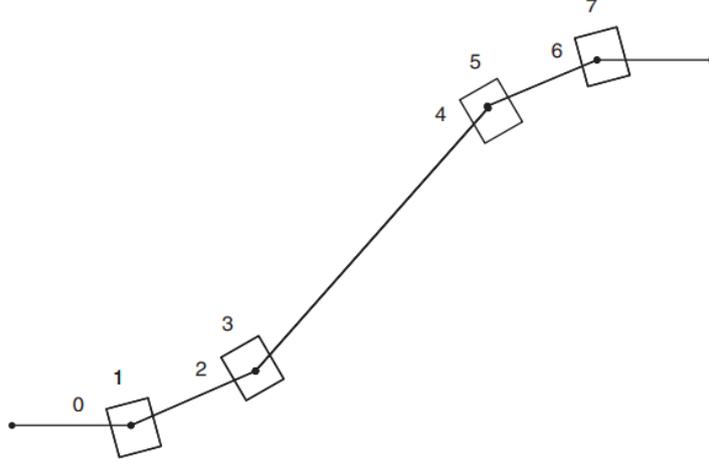


FIG. 1. The FERMI Spreader (not to scale). The design optics gives a betatron phase advance of  $\pi$  in the bending plane between two consecutive dipoles. There are quadrupoles between the dipoles (not shown here).

这篇文章通过 C-S 方法分析方法，假设初始粒子的坐标为  $x_0 = 0, x'_0 = 0$ ，在经历最后一个二极铁中的 CSR kick 之后，粒子的横向坐标为：

$$x_7 = \sqrt{2X_{15}J_1\beta_4} - \sqrt{2J_1\beta_1},$$

$$x'_7 = -\alpha_7\sqrt{\frac{2X_{15}J_1}{\beta_4}} - \alpha_1\sqrt{\frac{2J_1}{\beta_1}},$$

其中， $2J_i = \gamma_i x_i^2 + 2\alpha_i x_i x'_i + \beta_i x_i'^2$  为在  $i$  位置处的粒子不变量 (invariant)，并且：

$$X_{15} = \frac{J_5}{J_1} = \frac{\beta_1}{\beta_4} + \left( \alpha_1 \sqrt{\frac{\beta_4}{\beta_1}} - \alpha_5 \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_4}} \right)^2 + \alpha_5 (\alpha_1 + \alpha_3)$$

$$\times \left[ \alpha_5 (\alpha_1 + \alpha_3) - 2\alpha_1 \sqrt{\frac{\beta_4}{\beta_1}} + 2\alpha_5 \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_4}} \right].$$

最终可以得到传输线末端粒子的不变量  $J_7$  为：

$$2J_7 = 2J_1 \left[ \left( \sqrt{X_{15}} - \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_4}} \right)^2 + \left( \alpha_1 \sqrt{\frac{\beta_4}{\beta_1}} + \alpha_7 \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_4}} \right)^2 \right] \equiv 2J_1 X_{17}$$

通过对上式进行简单的分析发现，消除 CSR kicks 的最简单的磁聚焦结构是由两个相同的对称 DBA 组成的。每个消色散段必须保证适当的相位超前与上式所要求的 C-S 参数的对称性。另外，还必须满足的附加条件是，两个消色散段之间的相位超前为  $(2n + 1)\pi$ ，其中  $n$  为整数。如果磁聚焦结构的设计满足后一种条件

但不满足光学对称性，则会由于缺乏完全 CSR 抑制而导致的归一化 rms 发射度增长，并且由下式给出：

$$\Delta\gamma\epsilon = \gamma\epsilon \left[ \sqrt{1 + \frac{H_1\sigma_{\delta,\text{CSR}}^2 X_{17}}{\epsilon}} - 1 \right]$$

其中， $2J_1 = H_1\delta^2$ ,  $\sigma_{\delta,\text{CSR}}^2 = \langle\delta^2\rangle$ ,  $\epsilon$  为未受扰动的几何发射度。

这篇文章还将上述相同的方法应用到了只包含两个二极铁的 dogleg 消色散结构中，在该情况下，完全抵消 CSR kicks 的相位超前是  $2n\pi$ ，并且最终粒子的不变量为：

$$2J_f = 2J_i \left[ \left(1 - \sqrt{\frac{\beta_i}{\beta_f}}\right)^2 + \left(\alpha_i\sqrt{\frac{\beta_f}{\beta_i}} + \alpha_f\sqrt{\frac{\beta_i}{\beta_f}}\right)^2 \right]$$

其中，下标  $f$  和  $i$  分别指 dogleg 消色散结构中的两块二极铁。在二极铁之间设置奇数或偶数倍  $\pi$  的相位超前会改变上式中第一项平方中的符号。因此，需要完全对称的光学器件才能充分抑制 CSR kicks 的想法（两个相同色散元件之间的相位超前为  $\pi$ ），实际上只是当前处理的一个特殊例子。

## 7.4 其它

注意，在这篇文章的推导中，在二极铁的内部  $\beta$  和  $\alpha$  都被视为恒定值。

## 参考文献

- [1] FERMI@Elettra Conceptual Design Reports <https://www.elettra.eu/lightsources/fermi/fermi-machine/fermicdr/all.html>

## 8 基于切片矩阵的低能高亮度电子束动力学 [NIMA 937]

### Low-energy high-brightness electron beam dynamics based on slice beam matrix method

#### 8.1 基本信息

- 分类: 加速器和粒子束
- 作者: Cheng-Ying Tsai , Kuanjun Fan, Guangyao Feng, Juhao Wu, Guanqun Zhou, Yuan Hui Wu (主要机构: 华中科技大学)
- 类型: 理论
- 链接: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168900219306679>

#### 8.2 摘要

这篇论文提出了切片束矩阵的方法研究低束能量、高束团电荷状态下由空间电荷效应主导的束团动力学, 切片束矩阵方法可以研究束团任意纵向分布。在论文中从单粒子动力学和空间电荷场的计算开始, 之后基于束团的  $\Sigma$  矩阵和纵向切片分解的粒子矩阵证明了横向和纵向空间电荷效应中束矩阵和包络方法之间具有等价性, 并以此建立了切片束矩阵的半解析模型 (假设束团为空间分布对称) 同时给出了理论公式。这篇论文最后在单个 (a unit cell) 超导射频腔和 1.5-cell 射频腔系统中对束矩阵方法和 ASTRA 粒子追踪模拟进行了对比验证结果。

#### 8.3 贡献或创新点

- 创新点: 这篇论文从单粒子出发建立具有圆柱对称电场和磁场的射频腔 (和螺线管) 横向传输矩阵, 可以从纵向轴上的射频腔电场、工作频率 (和螺线管磁场) 以及粒子的初始能量和相位得到粒子在射频腔中的横向传输矩阵。之后考虑多个粒子的空间电荷效应, 将空间对称的束团在纵向切片 (不考虑粒子加速产生的空间电荷效应) 考虑其他切片对单个切片的影响, 以此建立了束团空间电荷效应的模型。最后分析了整体束团矩阵和切片束团矩阵的对应关系 (包括整体束团分解为束团切片和束团切片组装为整体束团), 并分析当纵向切片不错位时导致的切片投影发射度的变化。

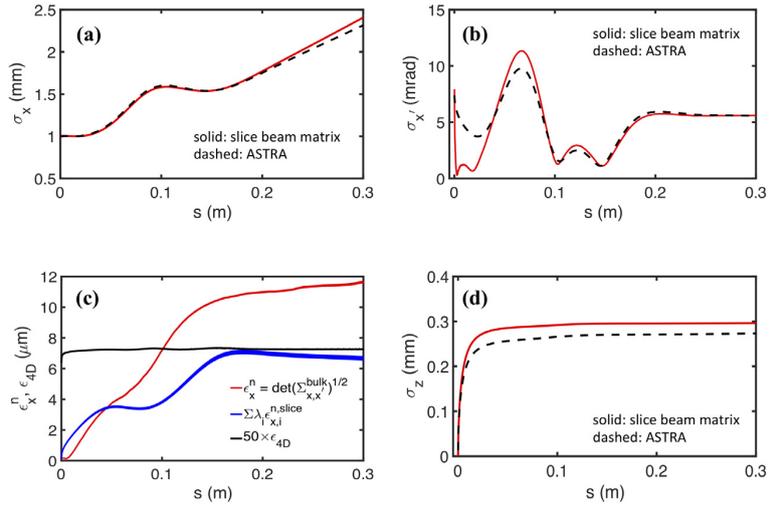


图 2: (上) 为束团椭圆图, (中) 为束团在平面  $(x, z)$  上的投影, (下) 为沿  $z$  轴切片和相空间投影其中相空间为  $(x, x'), (y, y')$ 。

- 贡献: 这篇论文建立了切片束矩阵的分析方法分析束团的横向相空间分布简化了复杂的束团传输系统可以简化计算, 并且束矩阵方法可以灵活的添加其他的物理效应 (例如, 束团控制元件等)。

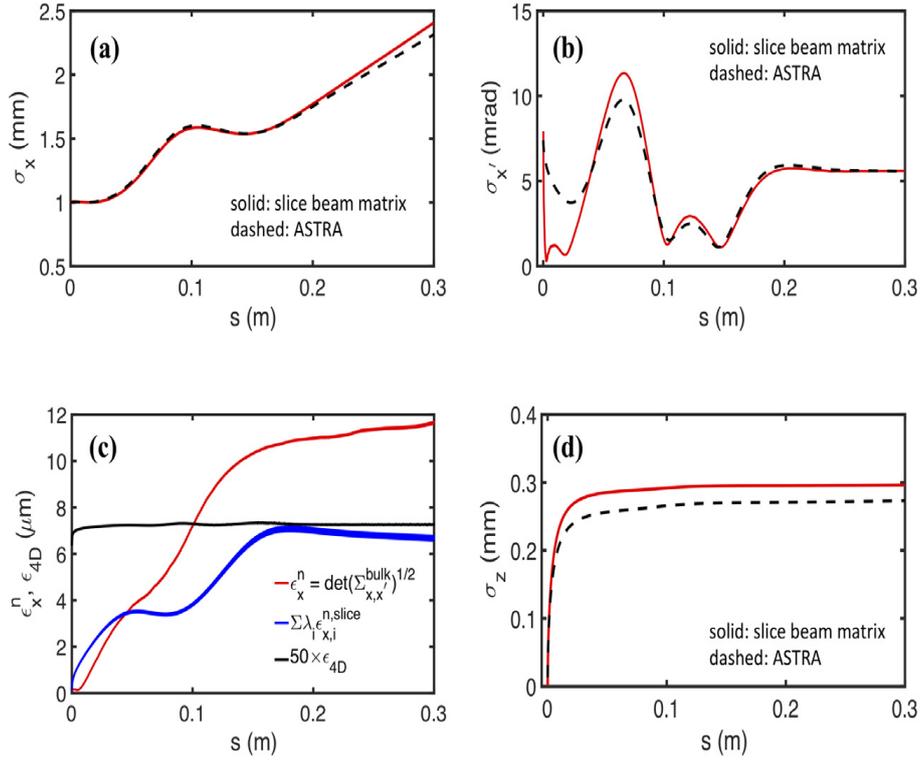


图 3: (1.5-cell 射频电子腔, 100 pC)(a) 横向水平均方根 (rms) 束团尺寸关于  $s$  的函数, 横向垂直方向的结果和水平方向一致; (b) 横向水平均方根 (rms) 束团散度关于  $s$  的函数; (c) 横向发射度关于  $s$  的函数, 红线为归一化发射度, 黑线为四维归一化发射度, 蓝线为计算加权和来评估横向水平发射度的特殊方法; (d) RMS 束团长度关于  $s$  的函数。图中红色实线为切片束矩阵结果, 黑色虚线为 ASTRA 结果。

## 9 在具有束团压缩的双弯铁消色散段中抑制相干同步辐射引起的发射度增长 [PRAB 26 05]

### Suppression of the coherent synchrotron radiation induced emittance growth in a double-bend achromat with bunch compression

#### 9.1 基本信息

- 分类: 相干同步辐射 (CSR)
- 作者: Chengyi Zhang (University of Chinese Academy of Sciences), Yi Jiao (University of Chinese Academy of Sciences), Weihang Liu (Chinese Academy of Sciences) and Cheng-Ying Tsai (Huazhong University of Science and Technology)
- 类型: 理论、模拟
- 链接: <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevAccelBeams.26.050701>

#### 9.2 摘要

这篇文章主要研究在具有束团压缩的双弯铁消色散段 (DBA) 中抑制相干同步辐射 (CSR) 导致的发射度增长这一问题, 借助于 CSR point-kick 模型, 得到了消除 CSR 影响的理论条件。这篇文章所得到的条件指向非对称的 DBA 设计, 其具有不同弯转角度或不同半径又或两者兼有的二极铁排布, 并且二极铁之间满足特定的传输矩阵关系。这篇文章以具有不同弯转角度二极铁的 DBA 为例, 证明如果满足所提出的条件, 则可以显著抑制由 CSR 引起的发射度增长。

#### 9.3 贡献或创新点

- 创新点: 在没有束团压缩的情况下, 对抑制 CSR 引起的发射度增长的问题已经有了广泛的研究 [1, 2]。然而, 对于具有显著束长变化的情况来说, 因为难以分析涉及不同束长的净 CSR 效应 (net CSR effect), 所以通过束团压缩抑制 CSR 引起的发射度增长会更具挑战性。这篇文章的创新点在于, 其通过在一维 CSR 理论的框架下结合 CSR point-kick 模型 [3] 和积分计算方法 (integration calculation

method)[4], 获得了在具有束团压缩的 DBA 中消除 CSR 影响的一般理论条件。

这篇文章的研究提出了一种设计实用 arc compressor 的新方法, 并有望作为设计和优化能量回收直线加速器 (ERL) 和其它循环加速器中消除 CSR 影响的 arc transfer line 的起点。

- 贡献: 这篇文章的推导基于三个假设:
  - 考虑线性束团压缩;
  - 采用极端相对论电子束的 CSR 的一维模型, 并且 CSR 效应的理论分析仅限于稳态区域和没有束管屏蔽的自由空间中;
  - 在束团压缩过程中, 将 CSR 对束团的影响视为扰动。

在假设 1. 下, magnetic compressor 中  $s$  位置处的 rms 束长可以近似的表示为 (下标 0 表示入口处):

$$\sigma_{z,s} \approx \sigma_{z0} (1 + hR_{56}^{0 \rightarrow s})$$

其中, 束团压缩主要涉及线性啁啾 (chirp)  $h$  和一阶纵向色散函数  $R_{56}^{0 \rightarrow s}$ , 压缩因子为  $C \simeq 1 / |1 + hR_{56}^{0 \rightarrow f}|$ 。

在假设 2. 下, 一维 CSR 模型在计算 CSR 尾场时考虑了纵向纵向线电荷, 只要 Derbenev ratio  $\kappa \equiv \sigma_x / (\sigma_z^{2/3} \rho^{1/3}) \ll 1$ , 该模型就仍然有效。其中,  $\sigma_x$  是束团的横向尺寸,  $\rho$  是束团的弯转半径。对于在中等束团压缩情况下具有小横向发射度的电子束, 通常都满足上述要求。

在假设 3. 下, 束团压缩和 CSR 之间的粒子-场相互作用 (particle-field interaction) 被忽略。严格的讲, CSR 计算应该考虑尾场本身引起的  $z$  和 Twiss 参数变化。除非最终峰值电流相对较高, 否则这种自场效应并不显著, 可以被视为扰动。

CSR point-kick 模型提供了一种在  $(x, x')$  二维平面分析 CSR 引起的发射度增长的方法, 在该模型中, 粒子经过扇形二极铁 (弯转角度与弯转半径分别为  $\theta$  和  $\rho$ ) 后, CSR 引起的粒子相对于参考粒子路径的坐标偏差可以与二极铁中心的 point-kick 等效的公式化:

$$X_k = \begin{pmatrix} x_x \\ x'_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho^{4/3} k [\theta \cos(\theta/2) - 2 \sin(\theta/2)] \\ \sin(\theta/2) (2\delta + \rho^{1/3} \theta k) \end{pmatrix}$$

其中,  $\delta = \delta_i + \delta_{\text{CSR}}$ 。  $\delta_i$  是初始能量偏差,  $\delta_{\text{CSR}}$  是 CSR 在传输线上游中引起的能量偏差, 在穿过弯转角度和半径为  $\theta$  和  $\rho$  的二极铁后, 其会增加  $k\rho^{1/3}\theta$ 。这篇文

章将该模型应用到了由两个分别具有不同弯转角度和弯转半径的二极铁组成的通用 DBA 中，如下图 Fig. 1 所示。在进行分析时，通常使用  $2 \times 2$  传输矩阵来表征两个二极铁之间的包含的非二极磁铁结构，最后推导出了消除 CSR 影响的理论一般条件：

$$\rho_1 \theta_1^3 = C \rho_2 \theta_2^3, \quad \text{or} \quad L_1 \theta_1^2 = C L_2 \theta_2^2,$$

以及

$$r_{21} = \frac{6(1+C)\theta_2}{L_1 \theta_1}$$

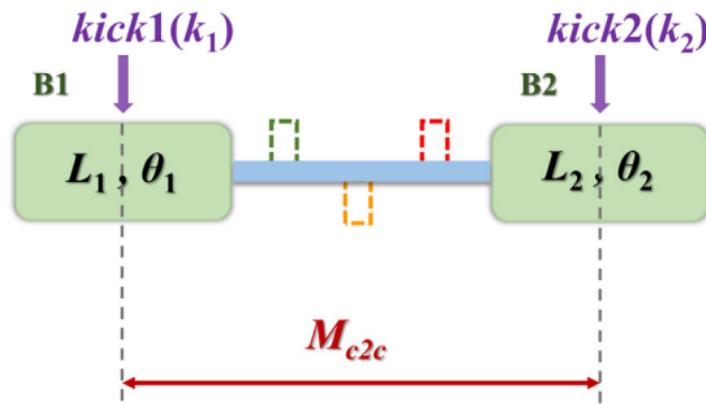


FIG. 1. Schematic of a DBA and the physical model for the CSR point-kick analysis in the DBA. The lattice section between B1 and B2 containing, e.g., quadrupoles, sextupoles, and drifts, etc. are not specifically specified. As an example, the green, orange, and red rectangles marked using dashed boxes show a possible design with three quadrupoles.  $M_{c2c}$  represents the transfer matrix from the center of B1 to the center of B2.

上两式给出的一般条件对 DBA 设计提出了两种要求：前者意味着对 B1 和 B2 的二极铁参数的要求，而后者则是对传输矩阵的要求（即对二极铁之间非二极磁铁结构的要求）。

另外，这篇文章为了更精确的评估 CSR 的影响，还进一步考虑了两个二极铁中更精确的束长变化模型，在该模型中使用了数值积分方法来评估 CSR 引起的坐标偏差。下图 Fig. 2 和 Fig. 3 给出了在不同  $\theta_2$  (第二个二极铁的弯转角度) 下  $q$  和  $r_{21}$  的数值结果，其中， $q = \frac{\theta_2}{\theta_1}$ ，下标 PK 指带通过 point-kick 模型获得的结果，下标 R 表示两个二极铁具有相同的弯转半径，而下标 NI 则表示  $q$  和  $r_{21}$  的最佳值。

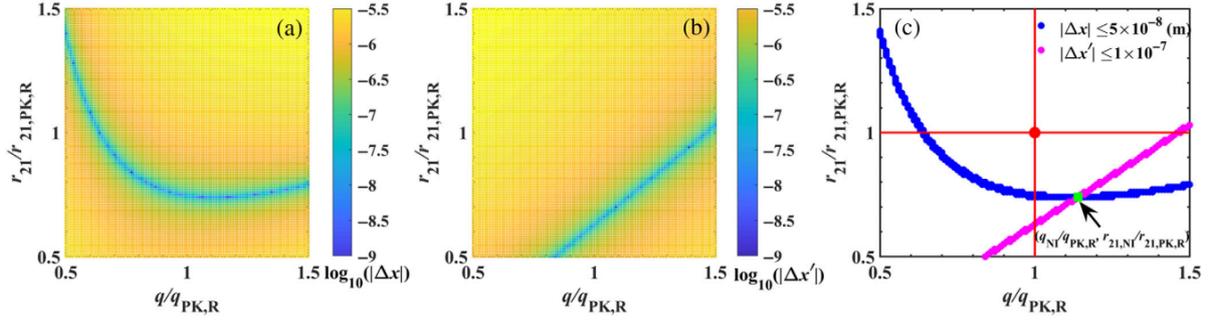


图 4: FIG.2 (a) 和 (b) 分别为  $\rho_1 = \rho_2 = 5.53$  m 且  $\theta_1$  固定为  $15^\circ$  情况下, 在  $C = 10$  的 DBA 的  $(q_{PK,R}, r_{21,PK,R})$  附近使用积分方法计算的  $\log_{10}(|\Delta x|)$  和  $\log_{10}(|\Delta x'|)$  结果。(c) 给出了满足  $|\Delta x| \leq 5 \times 10^{-8}$  (m) 和  $|\Delta x'| \leq 1 \times 10^{-7}$  的  $(q/q_{PK,R}, r_{21}/r_{21,PK,R})$  (蓝色和粉色原点)。同时满足最小  $|\Delta x|$  和  $|\Delta x'|$  的  $(q_{NI,R}/q_{PK,R}, r_{21,NI,R}/r_{21,PK,R})$  由绿色正方形给出。使用积分方法对  $q$  和  $r_{21}$  的校正通常给出  $q_{21,NI,R} > q_{21,PK,R}$  和  $r_{21,NI,R} < r_{21,PK,R}$ , 这主要源于 CSR kick 分析中采用的 constant-bunch 近似引起的误差。在 CSR kick 分析中, 束长分别被近似为  $\sigma_{z0}$  和  $\sigma_{zf}$ , 其中 0 和  $f$  分别指初始和末尾位置。因此, 恒定束长的假设倾向于低估第一块二极铁中的 CSR 效应, 同时高估第二块二极铁中的 CSR 效应。

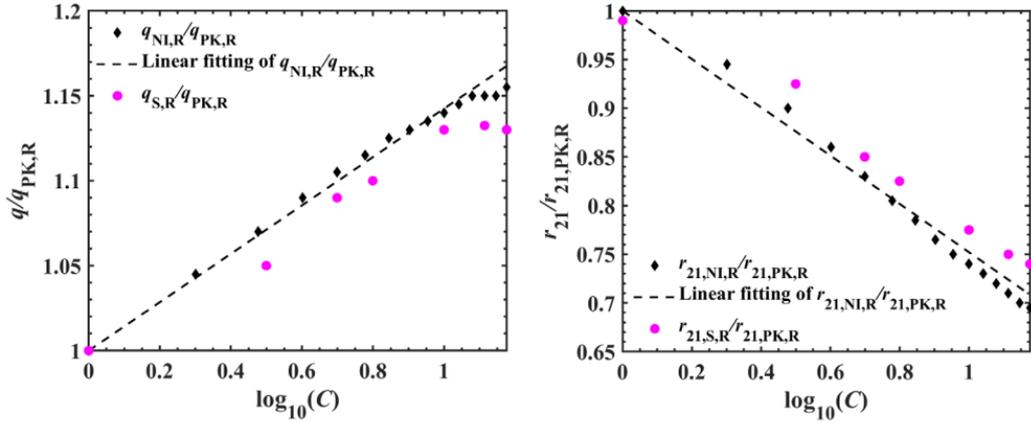


图 5: FIG.3 使用关于  $\log_{10}(C)$  的积分方法获得的  $q_{NI,R}/q_{PK,R}$  和  $r_{21,NI,R}/r_{21,PK,R}$  (黑色菱形) 以及线性拟合线 (黑色虚线)。粉色圆点表示在 ELEGANT 扫描中获得的  $q_{S,R}/q_{PK,R}$  和  $r_{21,S,R}/r_{21,PK,R}$ , 扫描的范围是  $q_{NI,R} \pm 0.05$  以及  $r_{21,NI,R} \pm 0.05$ 。结果表明,  $(q_{NI,R}/q_{PK,R}, r_{21,NI,R}/r_{21,PK,R})$  对  $\theta$  和  $\rho$  具体的值几乎没有依赖性, 相反, 它在很大程度上取决于压缩因子  $C$ 。

## 参考文献

- [1] Di Mitri S, Cornacchia M, Spampinati S. Cancellation of coherent synchrotron radiation kicks with optics balance[J]. Physical Review Letters, 2013, 110(1): 014801.<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.110.014801>
- [2] Hajima R. Emittance compensation in a return arc of an energy-recovery linac[M]//Free Electron Lasers 2003. Elsevier, 2004: 335-339.<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/B9780444517272500778>
- [3] Jiao Y, Cui X, Huang X, et al. Generic conditions for suppressing the coherent synchrotron radiation induced emittance growth in a two-dipole achromat[J]. Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams, 2014, 17(6): 060701.<https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.17.060701>
- [4] P. Emma and R. Brinkmann, Emittance dilution through coherent energy spread generation in bending systems, in Proceedings of the Particle Accelerator Conference, Vancouver, BC, Canada, 1997 (IEEE, New York, 1997), pp. 1679–1681.<https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/750799/>

## 10 用于高强度束团相空间操纵的广义 Kapchinskij-Vladimirskij 分布和束矩阵 [PRL 117]

### Generalized Kapchinskij-Vladimirskij Distribution and Beam Matrix for Phase-Space Manipulations of High-Intensity Beams

#### 10.1 基本信息

- 分类: 束流动力学
- 作者: Moses Chung (Ulsan National Institute of Science and Technology), Hong Qin (Princeton University), Ronald C. Davidson (Princeton University), Lars Groening (GSI Helmholtzzentrum für Schwerionenforschung GmbH), and Chen Xiao (GSI Helmholtzzentrum für Schwerionenforschung GmbH)
- 类型: 理论
- 链接: <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.117.224801>

#### 10.2 摘要

在非耦合线性磁聚焦结构中,基于单粒子 Courant-Snyder 不变量制定的 Kapchinskij-Vladimirskij (KV) 分布在过去几十年中一直是分析高强度束团平衡、稳定性和输运性质的基本理论基础。然而,高强度束团的最新应用需要通过有意引入强耦合来操纵束团相空间。这篇文章对 KV 模型进行了全面推广,其中包括所有线性(外部和空间电荷)耦合力、束团能量变化和任意 emittance partition,这些都是相空间操作的基本要素。新的广义 KV 模型可以根据需要产生均匀的密度分布和相应的线性自场力。

#### 10.3 贡献或创新点

- 创新点: 这篇文章对一般线性耦合系统的 KV 模型 [1] 进行了全面的推广,从而使该模型描述了高强度束团横向相空间操纵的所有重要过程。因为广义 Courant-Snyder 不变量 (CS 不变量) 的存在,这篇文章所开发的 KV 模型为耦合磁聚焦结构中高强度束团的非线性 Vlasov-Maxwell 方程提供了自治解,并给出了包络方程的矩阵形式。这篇文章中给出的数值示例说明了发射度操纵过程中的空间电荷效应,这是以前的 KV 模型无法解决的一个领域。这篇文章的广义 KV 模型对应的矩阵包络方程和束矩阵为操纵高强度束团的详细设计和分析提供了新的重要理论工具。

- 贡献：这篇文章从考虑一般线性聚焦 lattice 中的横向哈密顿量开始，该哈密顿量的形式如下所示：

$$H_{\perp} = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T A_c(s) \mathbf{z}, \quad A_c(s) = \begin{bmatrix} \kappa & R \\ R^T & m^{-1} \end{bmatrix}.$$

其中， $\mathbf{z} = (x, y, p_x, p_y)^T$  表示横向正则坐标， $s$  是路径长度， $\kappa$  和  $m^{-1}$  是  $2 \times 2$  的对称矩阵。 $R$  为任意  $2 \times 2$  矩阵但在一般情况下是不对称的。正则动量由参考动量  $p_0 = \gamma_0 m_b \beta_0 c$  归一化。基于已有的广义 CS 理论，这篇文章以  $\mathbf{z}_s = M(s) \mathbf{z}_0$  的形式获得了由上述哈密顿量控制的耦合动力学方程的解，其中  $\mathbf{z}_0$  是初始条件， $M$  的定义如下：

$$M(s) = Q^{-1} P^{-1} P_0 Q_0 = \begin{bmatrix} W & 0 \\ V & W^{-T} \end{bmatrix} P^T \begin{bmatrix} W^{-1} & 0 \\ -V^T & W^T \end{bmatrix}_0$$

其中，下标 0 表示在  $s = 0$  的初始条件， $P^T = P^{-1}$ ，同时  $P_0$  被设置为等于单位矩阵  $I$ 。 $W$  和  $V$  为  $2 \times 2$  矩阵，并且由  $W = w^T$  以及  $V = m [(dw^T/ds) - R^T w^T]$  定义，其中  $w$  为  $2 \times 2$  包络矩阵，可以通过矩阵包络方程给出。

这篇文章通过将  $s$  作为独立坐标，同时假设  $|p_x - q_b A_x/p_0|$ ， $|p_y - q_b A_y/p_0| \ll p_0$  以及  $|q_b \phi^{SC}| \ll \gamma_b m_b c^2$ ，将横向哈密顿量（由  $p_0$  归一化）表示为：

$$H_{\perp} = \frac{1}{2p_b/p_0} \left[ \left( p_x - \frac{q_b A_x}{p_0} \right)^2 + \left( p_y - \frac{q_b A_y}{p_0} \right)^2 \right] + \left( \frac{1}{\gamma_b^2} \right) \frac{q_b \phi^{SC}}{\beta_b c p_0} - \frac{q_b A_s^{\text{ext}}}{p_0},$$

其中，这里将纵向矢量势视为由外部 ( $A_s^{\text{ext}}$ ) 和空间电荷效应 ( $A_s^{\text{SC}}$ ) 两部分的贡献组成，并且自场势 (self-field potential)  $\phi^{SC}$  和  $A_s^{\text{SC}}$  近似的由  $A_s^{\text{SC}} = \beta_b \phi^{SC}/c$  相关。此外，这里还假设参考轨迹是一条直线，纵向运动独立于横向运动，并且不存在外部电聚焦。

这篇文章为了证明  $Q^T P^T \xi P Q$  和束矩阵之间的联系，引入了几何因子  $g$  和由  $Q^T P^T \xi P Q = g \Sigma^{-1}$  定义的对称矩阵  $\Sigma$ 。其中， $\xi$  是一个  $4 \times 4$  常数矩阵，当束团的分布是根据 CS 不变量定义时，该矩阵就获得了与发射度相关的意义。 $\xi$  的两个辛本征值与束团的本征发射度直接相关。利用特征向量的正交性有  $\mathbf{z} = \sum_{j=1}^4 y_j \mathbf{u}_j$ ，其中  $y_j = \mathbf{u}_j^T \mathbf{z}$ ，由此可以证明存在使  $\Sigma$  等于束矩阵  $\langle \mathbf{z} \mathbf{z}^T \rangle$  的实数  $g$ ：

$$\langle \mathbf{z} \mathbf{z}^T \rangle = \frac{\sqrt{|\xi|}}{\pi^2} \sum_{i=1}^4 \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \int \delta \left( g \sum_{k=1}^4 \frac{y_k^2}{\lambda_k} - 1 \right) y_i^2 dy$$

这篇文章在处理上式时利用了这样一个事实，即除非  $y_i = y_j$ ，否则上述积分会因为对称性而消失，最终有  $\langle \mathbf{z} \mathbf{z}^T \rangle = (1/4g) \sum_{i=1}^4 \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \lambda_i = (1/4g) \Sigma$ 。因此，如果

$g = 1/4$ , 则  $\Sigma = \langle \mathbf{z}\mathbf{z}^T \rangle = \frac{1}{4}Q^{-1}P^{-1}\varepsilon P^{-T}Q^{-T}$ , 其中发射度矩阵由  $\varepsilon = \xi^{-1}$  定义。

对于强空间电荷的情况, 由于空间电荷聚焦系数  $\kappa_{SC}$  取决于  $\Sigma$ , 因此束包络在束矩阵  $\Sigma$  的影响下演化。所以, 在这种情况下, 重要的是确保可以正确的生成初始束矩阵  $\Sigma_0$ 。这可以通过要求  $\varepsilon = \xi^{-1} = 4Q_0\Sigma_0Q_0^T$  来实现。这篇文献考虑了参考文献 [2] 中具有 EMTEX 参数的初始束矩阵以作为一个数值示例, 如图 Fig. 1 所示。

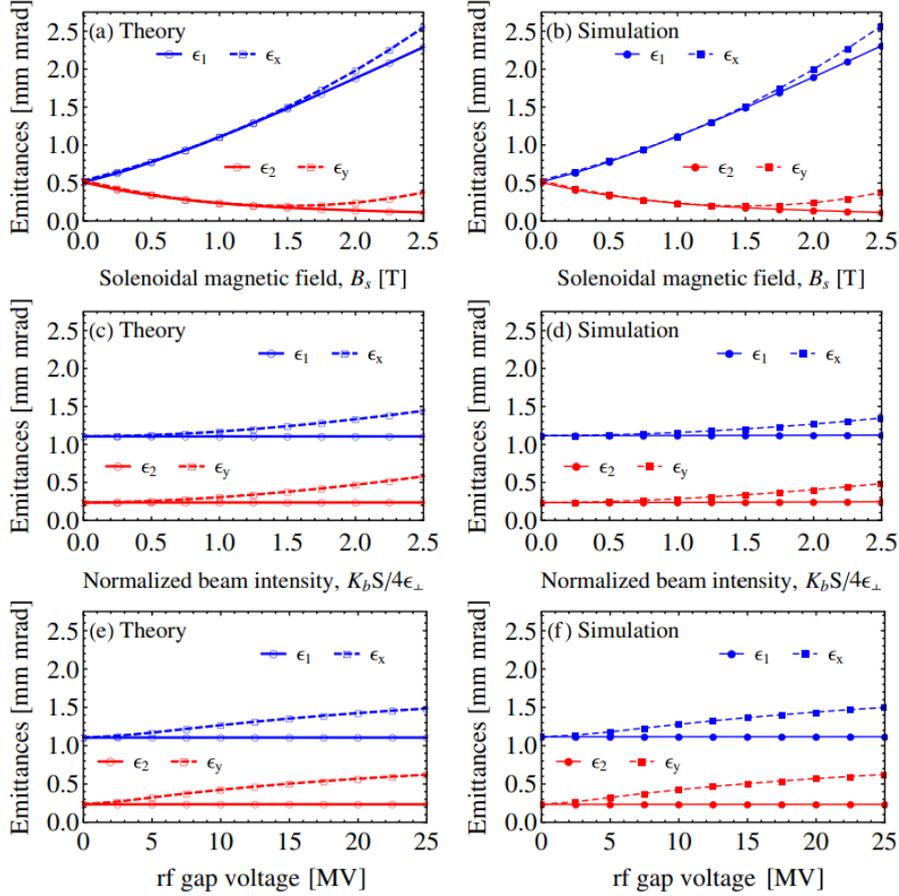


图 6: FIG.1 skew-quadrupole triplet 出口处的本征发射度 (带圆圈的实线) 和投影 rms 发射度 (带有正方形的虚线)。(a)、(c) 和 (e) 表示由 Mathematica 分析的当前 KV 模型的结果, (b)、(d) 和 (f) 表示使用 TRACK 代码的多粒子跟踪模拟结果。(a) 和 (b) 分别对应于具有  $K_b = 0$  和零加速度的情况, (c) 和 (d) 对应于具有  $B_s = 1$  T 和零加速度的情况, 以及 (e) 和 (f) 则分别对应于  $B_s = 1$  T 和  $K_b = 0$  的情况。(a) 和 (b) 表明 decoupling 过程对螺线管的场不敏感, 特别是在  $B_s \lesssim 1$  时。(c) 和 (d) 展示了空间电荷力对 decoupling 过程的影响, 如果归一化束强度  $K_b S / 4\epsilon_{\perp}$  大于约 1.0(即空间电荷力变得与发射度贡献相当或大于发射度贡献), 则 rms 发射度与本征发射度的偏差会变得显著且会持续增加。最后 (e) 和 (f) 则展示了束团能量变化对 decoupling 过程的影响。

## 参考文献

- [1] Kapchinskij I M, Vladimirskij V V. Limitations of proton beam current in a strong focusing linear accelerator associated with the beam space charge[C]//Proceedings of the International Conference on High Energy Accelerators and Instrumentation. CERN Scientific Information Service Geneva, 1959: 274.<https://s3.cern.ch/inspire-prod-files-5/526fe2f2ff6f05063bcb9a9b08da12f9>
- [2] AXiao C, Kester O K, Groening L, et al. Single-knob beam line for transverse emittance partitioning[J]. Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams, 2013, 16(4): 044201.<https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.16.044201>

## 11 加速过程束流的空间电荷效应 [PRSTAB 11-01]

### Space charge effect in an accelerated beam

#### 11.1 基本信息

- 分类：多粒子集体效应
- 作者：G. Stupakov and Z. Huang (SLAC)
- 类型：理论和模拟
- 链接：<https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.11.014401>

#### 11.2 摘要

通常假定相对论性束团的空间电荷效应与束团的能量的比例为  $\gamma^{-2}$  (其中  $\gamma$  为相对论性因子)。在这篇文章中证明了对于沿纵向加速的束团存在一个额外的空间电荷效应 (正比于  $E/\gamma$ , 其中  $E$  为加速场)。这个场和电动力学 (electrodynamics) 教材中“电子的电磁质量 (electromagnetic mass of the electron)”有相同的起源, 它维持了束团动能和束团磁能之间的平衡。作者在射频电子枪 (RF e-gun) 产生的束团中计算了由这个场产生的束团能散 (energy spread)。

#### 11.3 贡献或创新点

- 创新点和贡献：现代加速器光源需要高峰值电流、小发射度的束团。这种类型的束团的一个重要特性是能散。其中在射频电子枪中束团的能散最主要源于束团的空间电荷效应。这篇文章中作者得到了沿纵向加速束团产生的新的空间电荷效应分量 (假设束团在加速过程中的形状不变)。

加速度场为：

$$\begin{aligned}\tilde{E}_z = & -\frac{e}{c^2}a \int \frac{n(x', y', z' + v\tau)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \\ & -\frac{e}{2c^2}a\beta \int [\beta|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - (z - z')] \times \partial_{zz}n(x', y', z' + v\tau) d^3r' \\ & +\frac{e}{2c^2}a \int \left( \frac{z - z'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - 4\beta \right) \partial_z n(x', y', z' + v\tau) d^3r'\end{aligned}$$

其中,  $a = dv/dt$ ,  $n(x, y, z)$  为束团的初始位置的电子密度,  $\partial_{zz}n = \partial n^2(x, y, z)/\partial z^2$ 。在等式中设置  $t = z_0 = 0$ , 即在观测时的束团密度分布为  $n(x, y, z)$ 。

之后讨论了高斯束团的加速场, 利用加速度和  $\gamma$  因子的关系  $a = (c/(\gamma)^3)\beta$  得到。因为加速场造成束团中粒子的能量变化, 最终证明了加速场保持束团的电磁能量和粒子动能之间的平衡, 并在 LCLS 的射频电子枪中给出了这个效应的理论估算。

这篇文章利用高斯束模型和 LCLS 的射频电子枪参数, 在加速场引入了能量扩散, 并表明它对空间电荷场引入的能散有修正, 这对高亮度束团的模拟具有指导意义。

#### 11.4 其它

这篇论文采 CGS-Gaussian 单位制。

## 12 用 CST 模拟具有真空间隙的层状光栅的 THz Smith-Purcell 辐射 [NIMB 355]

### CST simulations of THz Smith – Purcell radiation from a lamellar grating with vacuum gaps

#### 12.1 基本信息

- 分类: Smith-Purcell 辐射
- 作者: K. Lekomtsev (High Energy Accelerator Research Organization, KEK), P. Karataev (John Adams Institute at Royal Holloway University of London, JAI), A.A. Tishchenko (National Research Nuclear University MEPhI), and J. Urakawa (KEK)
- 类型: 模拟
- 链接:<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168583X15001810>

#### 12.2 摘要

这篇文章使用计算机模拟技术 (Computer Simulation Technology, CST) 粒子工作室 (Particle In Cell, PIC) 求解器计算来自具有真空间隙的片状光栅的 Smith–Purcell 辐射 (Smith Purcell radiation, SPR)。之后模拟辐射分布的曲线与共振衍射辐射理论 (Resonant Diffraction Radiation theory) 得到的曲线进行了比较。然后进行了计算域网格划分的研究并分析了横向束大小对计算精度和 SPR 强度分布的影响。最后计算了 SPR 强度与洛伦兹因子和光栅条带深度的关系, 并与先前发表的理论 and 实验研究进行对比。

#### 12.3 贡献或创新点

- 贡献: 这篇论文用 CST 模拟了带有真空间隙的片状光栅的 SPR, 为光栅的优化和光栅参数预实验提供验证工具。以下讨论采用的坐标变量定义如图 Figs. 1-3。

使用的参数总结如下表。

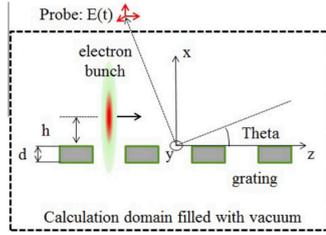


Fig. 1. Top view of the geometry. The beam propagates along the +z direction.

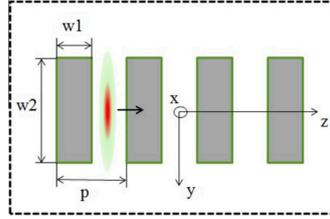


Fig. 2. Side view of the geometry.

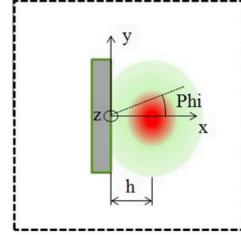


Fig. 3. Front view of the geometry. The beam propagates in the +z direction.

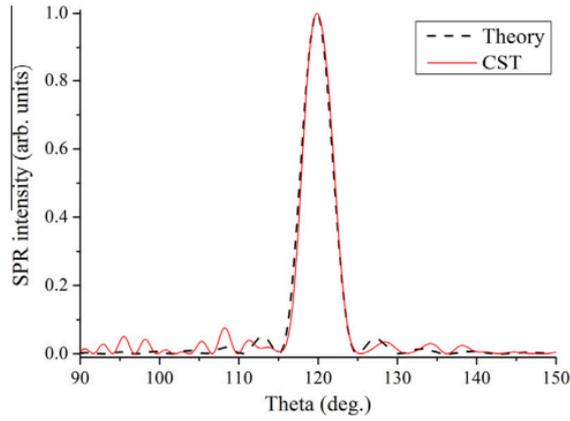
**Table 1**  
Grating and bunch parameters.

Parameter	Value
Bunch energy ( $\gamma$ )	5–40
Bunch charge	0.1 nC
Bunch longitudinal size, RMS width ( $\sigma_{\text{long}}$ )	0.1 mm
Bunch transverse size, RMS width ( $\sigma_{\text{transv}}$ )	Point-like or $\sigma_{\text{transv}}$
Radiation frequency/wavelength	450–700 GHz/0.43–0.67 mm
Grating material	Perfect electric conductor
Number of strips	20
Strip width ( $w_1$ )	0.2 mm
Grating period ( $p$ )	0.4 mm
Grating width ( $w_2$ )	10 mm
Strip depth ( $d$ )	0.04–1 mm
Impact parameter ( $h$ )	0.3–0.7 mm

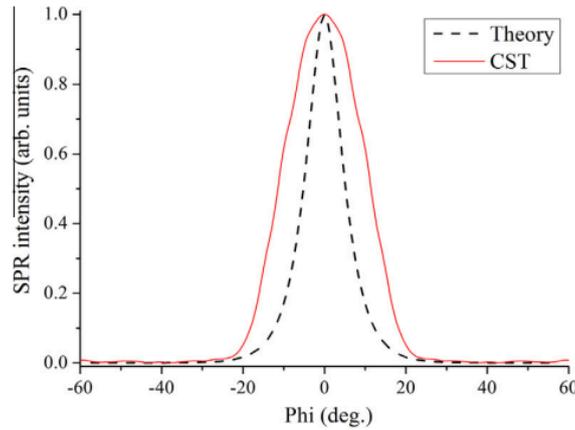
这篇论文主要将 CST 模拟的 SPR 和共振衍射辐射理论得到的 SPR 进行对比，其中，考虑的情况为光栅深度远小于波长，并且是理想的导体。对比得到如下两张图 Fig. 4、Fig. 5 的关系，其中，Fig. 4 峰值的位置和宽度与理论曲线相对应，Fig. 5 模拟的曲线比理论曲线宽，这可能是由于划分网格的误差或理论与模拟的几何形状的误差。

数值模拟中，横向束团分布不考虑尺寸，近似为“点”； $d$  为光栅的深度； $\gamma$  为洛伦兹因子；Theta 为极角；Phi 为辐射观测角度； $h$  为束团中心和光栅的距离。

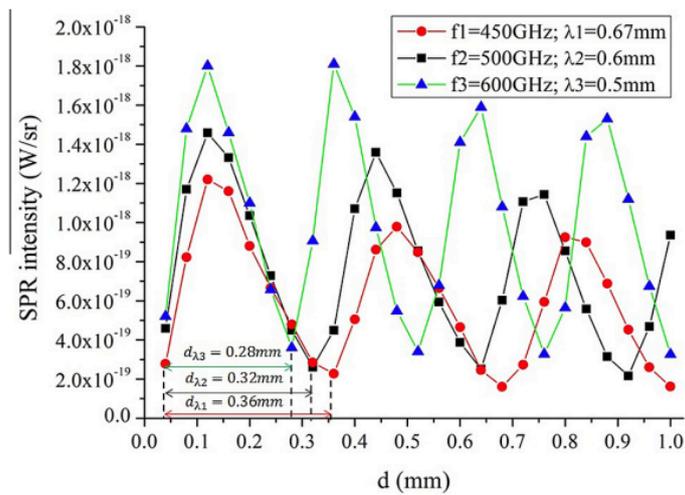
之后，这篇论文对比了不同的网格划分下模拟的情况，分别对比了 500 GHz，600 GHz 和 700 GHz 下的 SPR 辐射频谱，当频率越高越难以可靠地模拟 SPR 的频谱。最后，这篇文章模拟光栅深度和 SPR 强度的关系，SPR 的强度随光栅深度周期性变化，周期近似为  $\lambda/2$ ，参考图 Fig. 11。



**Fig. 4.** Polar distribution of SPR.  $\Phi = 0$  and  $\Theta$  is in the range  $(90; 150)^\circ$ . The following parameters were used:  $\sigma_{\text{transv}}$  is point-like;  $\gamma = 16$ ;  $d = 0.1$  mm;  $h = 0.7$  mm.



**Fig. 5.** Azimuthal distribution of SPR.  $\Theta = 119.87^\circ$ . ( $n = -1$  diffraction order) and  $\Theta$  is in the range  $(-60; 60)^\circ$ . The following parameters were used:  $\sigma_{\text{transv}}$  is point-like;  $\gamma = 16$ ;  $d = 0.1$  mm;  $h = 0.7$  mm.



**Fig. 11.** SPR intensity dependence on grating depth. Parameters:  $\Phi = 0$ ;  $\Theta$  correspond to the peak of SPR distribution ( $n = -1$ );  $\sigma_{\text{transv}} = 0.3$  mm;  $\gamma = 16$ ;  $h = 0.5$  mm.

## 13 针对相干同步辐射在多弯铁循环弧中导致的微聚束的另一种观点 [NIMA 943]

### An alternative view of coherent synchrotron radiation induced microbunching development in multibend recirculation arcs

#### 13.1 基本信息

- 分类: 相干同步辐射 (CSR)、微聚束不稳定性 (microbunching instability)
- 作者: Cheng-Ying Tsai (Huazhong University of Science and Technology)
- 类型: 理论
- 链接: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0168900219310423>

#### 13.2 摘要

这篇文章主要研究 CSR 导致的微聚束对穿过多弯铁循环弧 (multi-bend recirculation arc) 的纵向束团动力学的影响, 其中主要涉及微聚束放大 (microbunching amplification) 的相关物理过程。这篇文章开发了一种半解析的 Vlasov solver, 在 Huang 和 Kim (2002) 提出的 stage gain 概念的基础上 [1], 发展了根据 stage order 来描述 CSR 微聚束发展的另一种观点。Stage order 能够在相似的初始束团参数下对不同磁聚焦结构的 lattice optics 对微聚束发展的影响进行公平和定量的比较。这篇文章考虑的 multi-bend arcs 具有多级放大的显著特征, 对于总共有 24 个二极铁的 recirculation arc 来说, CSR 微聚束增益展现六级放大 (six-stage amplification) 而增长。

#### 13.3 贡献或创新点

- 创新点: 在 Huang 和 Kim 以前的工作中 [1], 已经研究并获得了一个可用于估计 three-dipole chicane 的微聚束增益因子的公式。他们指出, 对总增益的贡献主要来源于高增益或高电流操作的两级放大 (two stage amplification)。这篇文章在保持对束团电流的多项式依赖性的同时, 以更物理的角度进一步阐述了 stage gain amplification 的概念。对于这篇文章考虑的多弯铁循环弧, 由于其二极铁的数量从 3(或 4) 增加到了几十个或者更多, 分析公式不太可能包括所有可能 stages 的放大。尽管如此, 这篇文章的目的是探索扩展 stage gain 概念后的替代观点, 其中主要包括以下两个分析:

1. 深入了解 CSR 导致的微聚束如何在 stage gain 概念的基础上沿着束线演变，以及如何量化每个单独阶段的 CSR 增益。
  2. 探索采用 stage gain 概念时的优势，stage gain 方法使得可以在相似的初始束团条件下，对不同磁聚焦结构的 optics 对微聚束增益的影响进行公平和定量的比较。
- 贡献：这篇文章首先概述了基于线性化 Vlasov 方程的理论公式；将 CSR 效应视为扰动，并考虑 coasting beam。控制方程的解可以自洽地获得（即直接解方程），也可以通过数值迭代（即迭代解）得到。尽管两种解决方案都给出了等效的结果，但这篇文章从后者中获得了对于 multi-bend transport arcs 微聚束不稳定性发展的更深入理解。在参考文献 [1] 中的 stage gain 概念的基础上，通过扩展和量化单个 stage gain 从而进行了更深入的分析，这一概念为微聚束放大过程提供了另一种观点。

具体地讲，为了更进一步的分析，这篇文章将一些束团参数的贡献与磁聚焦结构特性的贡献进行区分以讨论 CSR 增益的量化。为此，这篇文章将迭代法中的 stage gain function 展开为了束团电流的一系列多项式

$$\tilde{G}_f^{(M)} = \tilde{G}^{(M)}(s = s_f) = \tilde{G}_0 + \tilde{G}_1 I_b + \cdots + \tilde{G}_M I_b^M = \sum_{m=0}^M \tilde{G}_m I_b^m,$$

其中，为了简单起见这篇文章仅处理等时弧 (isochronous arcs)，上式可以通过控制方程中的 kernel function 进行进一步的简化

$$\tilde{G}_f^{(M)} = \sum_{m=0}^M A^m d_m^{(\lambda)} \left( \frac{I_b}{\gamma_0 I_A} \right)^m,$$

其中， $A \approx -0.94 + 1.63i$ ， $\gamma_0$  是相对论因子， $d_m^{(\lambda)}$  是一无量纲系数并通过有限的束团发射度和能散反映了第  $m$  阶段的 lattice optics 和相空间 smearing。一旦给出了束团和 lattice optics 的信息，将可以直接获得系数  $d_m^{(\lambda)}$ 。为方便起见，这篇文章将单个级的增益定义为如下形式

$$C_f^{(m)} = \left| A^m d_m^{(\lambda)} \left( \frac{I_b}{\gamma I_A} \right)^m \right|,$$

需要注意的是，与评估总体 CSR 增益的直接解（即直接解控制方程）不同，上式仅考虑第  $m$  阶段。并且注意到可以通过增益谱求解控制方程来获得，因此，stage gain 分析的一个优点在于，如果给定最佳波长，它可以用于快速估计最大 CSR 增益的束团电流依赖性，并且不需要针对不同的参数设置反复求解控制方程。

此外，这篇文章还给出并比较了实际的例子，以此演示 stage gain 及其与直接解和迭代解的联系，这里给出部分结果。其中所考虑的具体例子为两个 1.3GeV 的高能 recirculation arcs，它们拥有相同的磁铁布局，但因为四极铁强度不同从而表现出截然不同的光学行为，如 Fig.2 所示。两个 recirculation arcs 的 CSR 微聚束增益如 Fig.3 和 Fig.4 所示，其中示例 1 具有六级放大的特征。Fig.5 展示了两种示例下的 stage gain 系数  $|d_m^{(\lambda)}|$ ，Fig.6 则展示了两个示例出口处的 individual staged gains  $\mathcal{G}_f^{(m)}$  (作为束团电流和 stage index  $m$  的函数)。

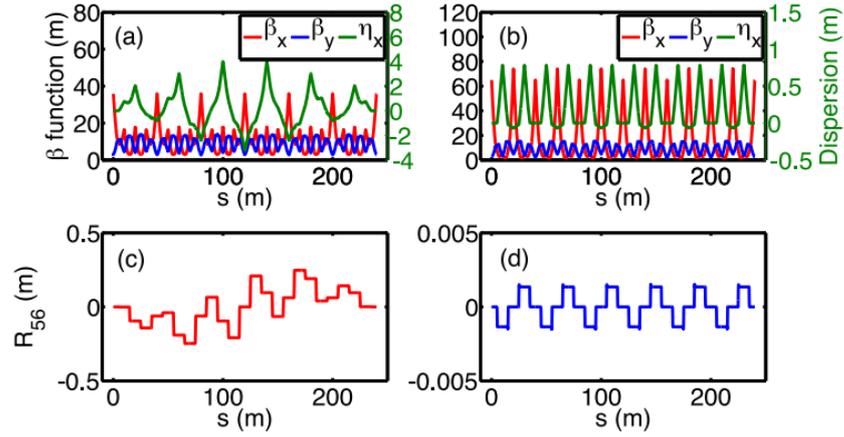


Fig. 2. Lattice and transport functions for 1.3 GeV high-energy transport arcs with (a), (c) large momentum compaction function  $R_{56}$  (Example 1) and (b), (d) small momentum compaction function  $R_{56}$  (Example 2).

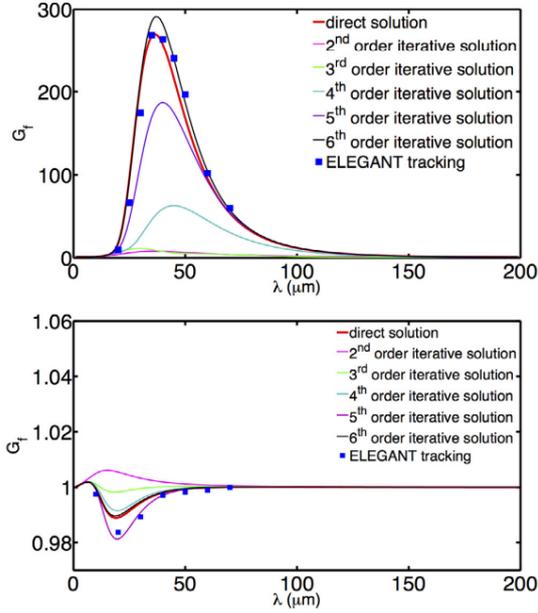


Fig. 3. CSR gain spectra  $G_f(\lambda)$  as a function of the initial modulation wavelength for the Example 1 (top) and Example 2 (bottom) lattices. The iterative solutions are obtained using Eq. (12). ELEGANT tracking results were obtained for initial modulation amplitudes 0.05% (top) and 0.8% (bottom), and 70-million macroparticles were used in the tracking simulation.

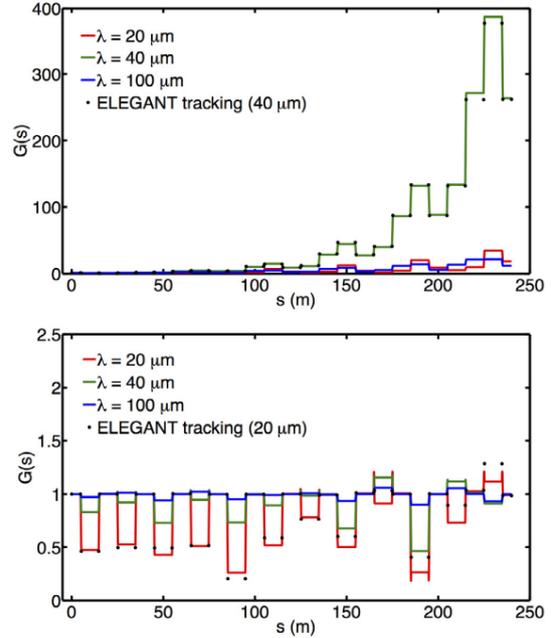
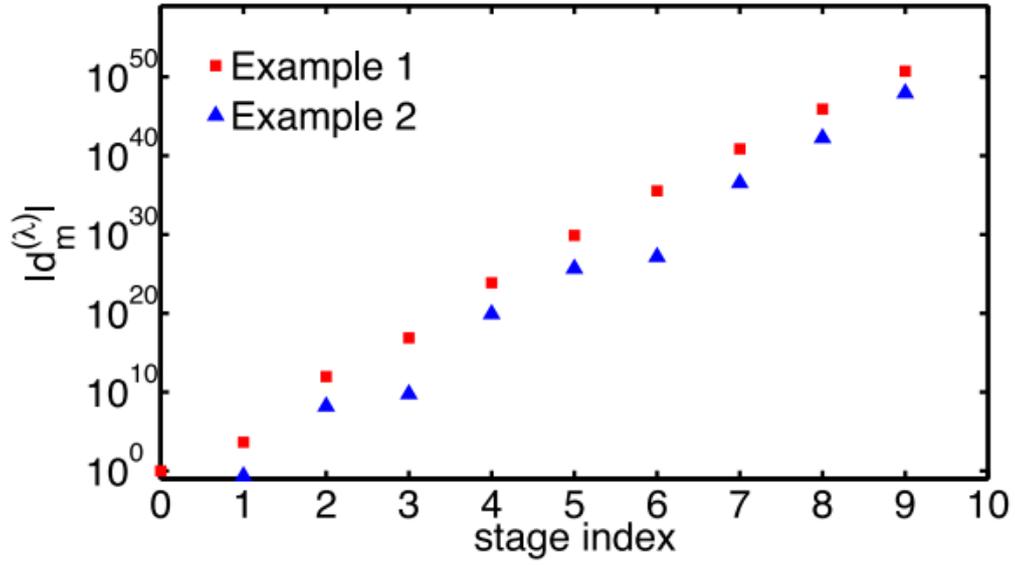


Fig. 4. Direct solution of CSR gain functions  $G(s)$  for the Example 1 (top) and Example 2 (bottom) lattices.

图 7: Fig.3 展示了增益谱  $G_f(\lambda)$  作为初始调制波长的函数。在估计 CSR 增益时, 采用了三种方法, 即直接解法、迭代法和适用 ELEGANT 的粒子跟踪模拟。两个示例之间的主要差异表明, 示例 1 容易受 CSR 微聚束的影响, 而示例 2 中的微聚束增益保持在 1 左右。Fig.4 展示了增益函数在几个调制波长下作为  $s$  的函数。在 Fig.3 和 Fig.4 中, 由于相空间 smearing, 较短的波长增强了朗道阻尼, 而较长的波长具有可忽略的 CSR 效应。为了验证这篇文章的半解析 Vlasov 解, 使用了 ELEGANT 对两个示例进行了测试, 测试结果显示出了良好的一致性。



**Fig. 5.** Comparison of  $|d_m^{(\lambda)}|$  for the two 1.3 GeV high-energy transport arcs. The red squares and blue triangles denote Examples 1 and 2, respectively. The vertical axis represents a log scale. Note that  $|d_m^{(\lambda)}|$  for Example 1 are at least three orders of magnitude larger than those for Example 2.

图 8: 不难看出, 示例 1 的系数比示例 2 的系数大至少 3 个数量级。两个弧之间的 CSR 增益的显著差异可以归因于  $d_m^{(\lambda)}$ 。

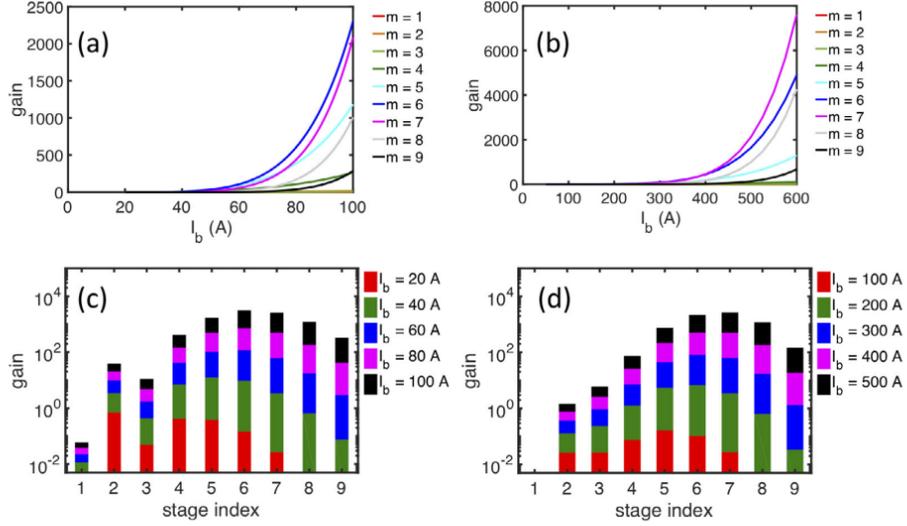


Fig. 6. The individual staged gains [Eq. (16)] at the exits of a beamline as a function of beam currents for Example 1 (a) and Example 2 (b), and as a function of the stage index for Example 1 (c) and Example 2 (d). Here the modulation wavelength is fixed for Example 1 at  $\lambda = 36.82 \mu\text{m}$  and for Example 2 at  $\lambda = 19 \mu\text{m}$ .

图 9: Fig.6(a,b) 表明, 在给定特定的 stage order 情况下,  $\mathcal{G}_f^{(q)}$  随着束团电流  $I_b$  增加。而对于给定的束团电流的情况下,  $\mathcal{G}_f^{(q)}$  不一定随 stage order 数增加, 因为 stage gain 系数  $d_m^{(\lambda)}$  取决于磁聚焦结构的性质 [Fig.6(c,d)]。结果表明, 示例 1 和示例 2 的主要 stage orders 分别为 6 和 7。

## 参考文献

- [1] Huang, Zhirong, and Kwang-Je Kim, "Formulas for coherent synchrotron radiation microbunching in a bunch compressor chicane." *Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams* 5.7 (2002): 074401. <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.5.074401>

## 14 六维路径传输矩阵的半解析方法及其在高亮度带电粒子束传输中的应用 [WEPLS12]

### A semi-analytical approach to six-dimensional path-dependent transport matrices with application to high-brightness charged-particle beam transport

#### 14.1 基本信息

- 分类: 多粒子动力学、空间电荷效应
- 作者: Cheng-Ying Tsai and Kuanjun Fan
- 类型: 理论和模拟
- 链接: <http://accelconf.web.cern.ch/napac2019/papers/wep1s12.pdf>

#### 14.2 摘要

高效、准确地估计高亮度束流动力学是评估现代粒子加速器整体性能的关键步骤。利用矩 (moment) 描述来研究多粒子束动力学, 需要建立与路径相关的传输矩阵, 并应用 drift-kick 算法。这篇文章将建立三种典型的束流传输元件的半解析模型, 包括带边缘场的螺线管 (solenoid with fringe fields)、横向偏转腔 (transverse deflecting cavity) 和束流狭缝 (beam slit)。由于这些元件还没有一个简单并容易得到的解析模型, 这篇文章先制定简化的单粒子运动方程, 并应用典型的数值分析技术来求解相应的  $6 \times 6$  传输矩阵作为路径坐标的函数。这些模型对非相对论性和极端相对论性的情况都适用。通过三个实例对所建立的半解析模型进行了验证, 并与粒子跟踪模拟结果进行了比较。这些与路径相关的传输矩阵模型可以应用于高亮度带电粒子束传输的束矩阵分析中。

**备注:** 这篇论文的缩减版本在 NAPAC 2009 会议发表过。这里导读的论文为未删减版本。

#### 14.3 贡献或创新点

- 创新点: 这篇文章建立了螺线管、横向偏转腔和束流狭缝的六维传输矩阵的半解析模型。首先这篇文章简要回顾了加速器系统的单粒子运动方程, 并推导到束团

质心和束团 sigma 矩阵。之后得到了实验室坐标系下含有边缘场的螺线管传输矩阵如下式

$$\begin{bmatrix} x_L \\ x'_L \\ y_L \\ y'_L \end{bmatrix}_s = \begin{pmatrix} M_{L,11}^{\text{Re}} & M_{L,12}^{\text{Re}} & -M_{L,11}^{\text{Im}} & -M_{L,12}^{\text{Im}} \\ M_{L,21}^{\text{Re}} & M_{L,22}^{\text{Re}} & -M_{L,21}^{\text{Im}} & -M_{L,22}^{\text{Im}} \\ M_{L,11}^{\text{Im}} & M_{L,12}^{\text{Im}} & M_{L,11}^{\text{Re}} & M_{L,12}^{\text{Re}} \\ M_{L,21}^{\text{Im}} & M_{L,22}^{\text{Im}} & M_{L,21}^{\text{Re}} & M_{L,22}^{\text{Re}} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_L \\ x'_L \\ y_L \\ y'_L \end{bmatrix}_{s_i}$$

其中,

$$\begin{aligned} \frac{dM_{L,11}}{ds} &= M_{L,21} \\ \frac{dM_{L,12}}{ds} &= M_{L,22} \\ \frac{dM_{L,21}}{ds} &= -\frac{i}{2}\mathcal{S}'(s)M_{L,11} - i1\mathcal{S}(s)M_{L,21} \\ \frac{dM_{L,22}}{ds} &= -\frac{i}{2}\mathcal{S}'(s)M_{L,12} - i\mathcal{S}(s)M_{L,22} \end{aligned}$$

其中,  $\mathcal{S}(s) = eB_s(s)/\gamma m\beta c = B_s(s)/[B\rho]$ ,  $[B\rho]$  为磁刚度,  $B_s(s)$  为纵向磁场。

之后推导了横向偏转腔的传输矩阵, 这篇文章先得到单个粒子的方程再假设 16 个粒子的情况从而反推得到束流的传输矩阵。包含 16 个粒子的传输矩阵可以写为:

$$\mathbf{Z}_{16 \times 16}^i \mathbf{R}_{16 \times 1}^{i \rightarrow f}(s) = \mathbf{Z}_{16 \times 1}^f(s)$$

其中,  $\mathbf{R}_{16 \times 1}^{i \rightarrow f}(s)$  含有四个分块对角矩阵。

$$\mathbf{Z}_{16 \times 16}^i = \begin{pmatrix} \mathcal{Z}_{4 \times 4}^{(1-4)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{Z}_{4 \times 4}^{(5-8)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{Z}_{4 \times 4}^{(9-12)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{Z}_{4 \times 4}^{(13-16)} \end{pmatrix}$$

其中,  $\mathcal{Z}_{4 \times 4}^{(1-4)} = [\mathbf{X}_{4D}^{(1)} \mathbf{X}_{4D}^{(2)} \mathbf{X}_{4D}^{(3)} \mathbf{X}_{4D}^{(4)}]^T$ 。

因为  $\mathbf{Z}_{16 \times 16}^i$  已知,  $\mathbf{Z}_{16 \times 1}^f(s)$  也可以得到, 所以可以通过计算得到  $\mathbf{R}_{16 \times 1}^{i \rightarrow f}(s)$  并得到标准针形式的  $\mathbf{M}$  矩阵。

最后得到了狭缝 (slit) 的 sigma 矩阵, 束流经过狭缝后的 sigma 矩阵可由下式得

到。

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(s^+) = \mathbb{V}(X_i, X_j) &= \left. \frac{\partial^2 m_{\mathbf{X}}}{\partial t_i \partial t_j} \right|_{t=0} = \sigma_{ij} + \sum_{k=1}^6 \frac{\sigma_{ik} \sigma_{jk}}{\sigma_{kk}} [a_k \mathcal{F}_k(a_k) - b_k \mathcal{F}_k(b_k)] \\ &+ \sum_{k=1}^6 \sigma_{ik} \left\{ \sum_{q \neq k} \left( \sigma_{jq} - \frac{\sigma_{kq} \sigma_{jk}}{\sigma_{kk}} \right) [(\mathcal{F}_{k,q}(a_k, a_q) - \mathcal{F}_{k,q}(a_k, b_q)) \right. \\ &\quad \left. - (\mathcal{F}_{k_0}(b_k, a_n) - \mathcal{F}_{kaq}(b_k, b_\alpha))] \right\}\end{aligned}$$

其中,

$$\mathcal{F}_{k,q}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \int_{\mathbf{a}-\{a_k\}\mathbf{a}-\{a_q\}}^{\mathbf{b}-\{b_k\}} \int_{\alpha}^{\mathbf{b}-\{b_q\}} f_{\alpha}(\mathbf{X} - \{X_k, X_q\}) d\mathbf{X}_{-q} d\mathbf{X}_{-k}$$

其中,  $\mathbf{a} = (-D_x/2, -\infty, -D_y/2, -\infty, -\infty, -\infty)$ ,  $\mathbf{b} = (D_x/2, \infty, D_y/2, \infty, \infty, \infty)$ 。

- 贡献: 这篇文章的方法面向整个束流的传输过程而不是单个粒子, 因此相较于粒子追踪模拟明显加快了计算速度。但是这种方法的局限是对束的描述只限于二阶矩, 所以只在线性范围内有效。

#### 14.4 部分模拟结果对比

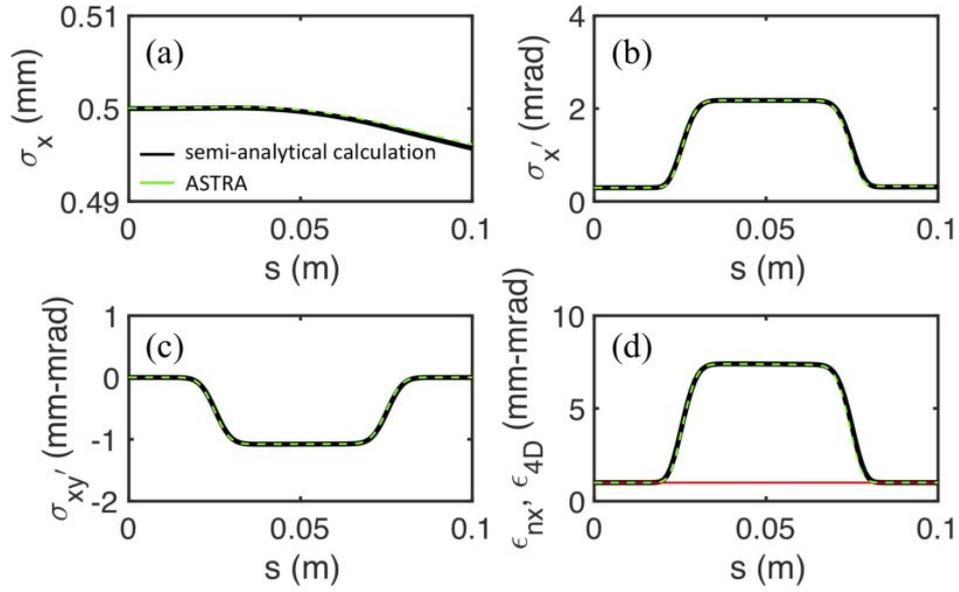


Figure 3: (a) Transverse rms beam size as a function of  $s$ ; (b) transverse rms beam divergence as a function of  $s$ ; (c) transverse  $x - y'$  correlation as a function of  $s$ ; (d) transverse emittances as a function of  $s$ . Here the black solid lines are obtained from our semi-analytical models and green dashed lines from ASTRA. In ASTRA, we use the ordinary phase space coordinate instead of the canonical one. Therefore one can see the change of the transverse horizontal emittance in Fig. 3(d). The red line in Fig. 3(d) refers to the transverse 4-D emittance, which is conserved along  $s$ .

图 10: 螺线管

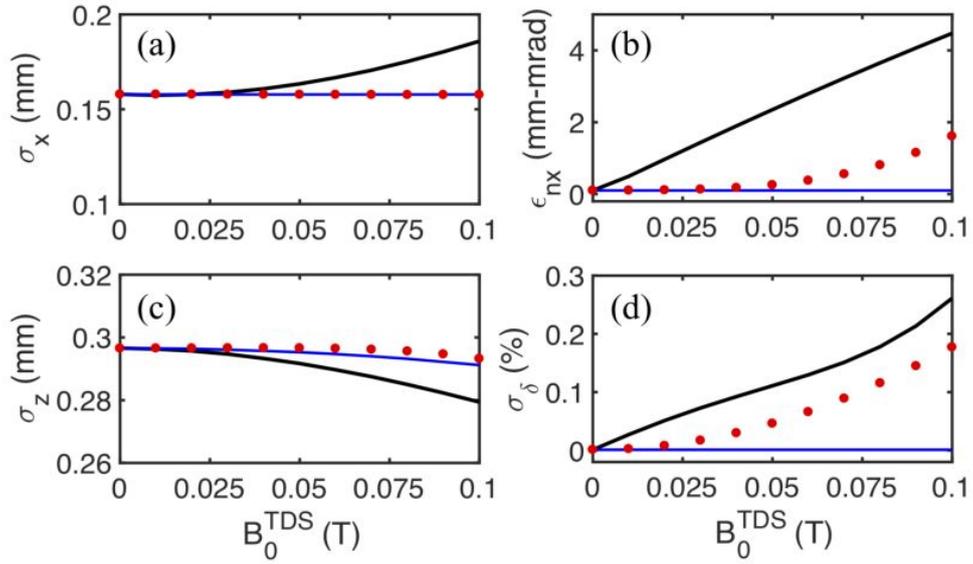


Figure 7: Dependence on the magnetic deflecting field for (a) beam size and; (b) beam emittance; (c) bunch length; (d) the relative energy spread, at the exit of the TDS. The numerical setup follows those in Fig. 5. The initial beam size is assumed 0.16 mm, with the initial transverse normalized emittance  $0.1 \mu\text{m}$ . The black lines are obtained from our semi-analytical model, the blue lines from the analytical formulas by van Rens *et al.* [43], and the red dots from particle tracking simulation ELEGANT.

图 11: 横向偏转腔

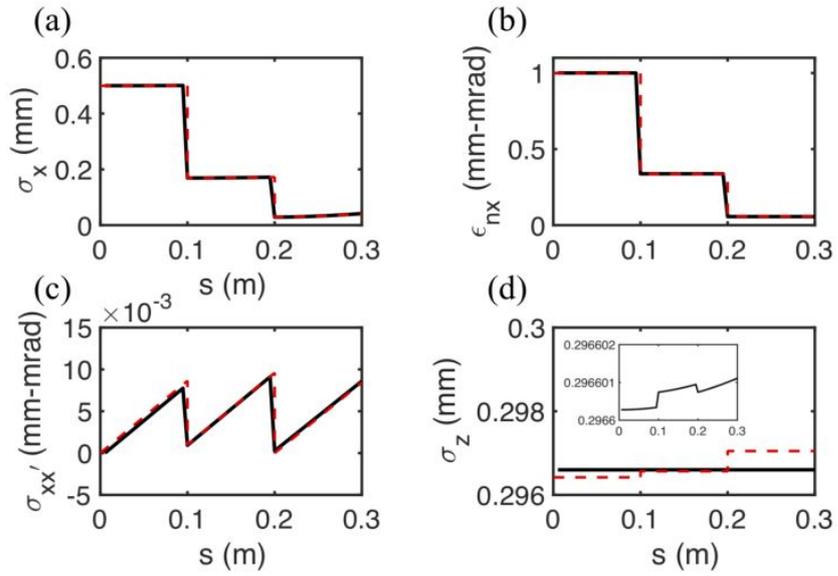


Figure 8: Evolution of beam properties through two square slits (placed at  $s = 0.1$  and  $0.2$  m with the full width  $0.6$  and  $0.1$  mm, respectively), including (a) the transverse beam size; (b) the transverse normalized emittance; (c) the transverse  $(x - x')$  correlation; and (d) the longitudinal bunch length. The inset in (d) shows the zoom-in of the black solid line. The small increase of the bunch length is due to scrapping of the central portion of the beam. The black lines are from our semi-analytical model and the red dashed lines from ELEGANT.

图 12: 束流狭缝