

## 加速器束流动力学期刊论文导读 (2023 年 3 月)

受“京师物理”公众号启发，我们几个同好便萌生将加速器领域的代表性期刊 Physical Review Accelerators and Beams (PRAB) 里的论文进行导读。主要 (但不限于) 导读材料选自 PRAB 近期上线的期刊，与部分美国物理学会 (American Physical Society, APS) 旗下的其它期刊或过去 PRST-AB、Elsevier 的核物理与技术 Nuclear Instruments and Methods (NIM) 期刊等可能涉及加速器方面的论文。与超快电子衍射成像动力学相关的论文则不在此限。

预期论文导读将于每个月初收集后发布，在 [http://faculty.hust.edu.cn/jcytsai/zh\\_CN/article/2191806/content/1551.htm#article](http://faculty.hust.edu.cn/jcytsai/zh_CN/article/2191806/content/1551.htm#article) 可以找到过去的导读文档。限于成员水平，导读仍许多地方有待改进 (正)。任何关于导读内容的指正、建议、意见都欢迎提出、交流，我们期待从交流讨论中激发的可能研究课题。

本期 (2023 年 3 月) 结果统计如下表

成员姓名	导读列表	联系方式
蔡承颖	[1]、[2]、[3]、[4]、[5]	jcytsai@hust.edu.cn
周剑晖	[6]、[7]、[8]、[9]、[10]、[11]、[12]、[13]、[14]、[15]	
李嘉鹏	[??]	

## 目录

1	快照谱成像技术回顾 Review of snapshot spectral imaging technologies	4
2	论非均匀磁场中的同步辐射特性 [Opt. Comm. 22] On synchrotron radiation in non-uniform magnetic fields	8
3	短脉冲光学波荡器脉冲前沿倾斜的色散特性 [TUPMA031] Dispersive property of the pulse front tilt of a short pulse optical undulator	10
4	在高梯度介质激光加速器中为增加作用长度的激光光路设计 [NIMA 909] Optical design for increased interaction length in a high gradient dielectric laser accelerator	12
5	储存环中非聚束束团过冲现象的解析方法 [PRD 28] Analytical approach to the overshoot phenomenon for a coasting beam in particle accelerators	15
6	束团压缩器中的相干同步辐射不稳定性 [PRST-AB 5] Coherent synchrotron radiation instability in a bunch compressor	21
7	束团压缩器中相干同步辐射微聚束公式 [PRST-AB 5] Formulas for coherent synchrotron radiation microbunching in a bunch compressor chicane	26
8	相干同步辐射引起的束团不稳定性和微聚束 [PRST-AB 5] Beam instability and microbunching due to coherent synchrotron radiation	31
9	紧凑储存环中的相干同步辐射和束流稳定性 [PRST-AB 8] Coherent synchrotron radiation and bunch stability in a compact storage ring	34
10	电子储存环中微波不稳定性的线性理论 [PRST-AB 14] Linear theory of microwave instability in electron storage rings	39
11	电子存储环中微波不稳定性的阈值研究 [PRST-AB 13] Threshold studies of the microwave instability in electron storage rings	43
12	单模相干同步辐射不稳定性 [PRST-AB 6] Single-mode coherent synchrotron radiation instability	46
13	聚束束团的单模相干同步辐射不稳定性 [PRST-AB 6] Single-mode coherent synchrotron radiation instability of a bunched beam	50

- 14 电子储存环中相干同步辐射爆涨的动力学模型 [PRL 89]  
Bursts of Coherent Synchrotron Radiation in Electron Storage Rings: A  
Dynamical Model 56
- 15 储存环中的微聚束不稳定性：相空间结构与太赫兹相干同步辐射射频光谱之间的联系  
[PRST-AB 17]  
Microbunching instability in storage rings: Link between phase-space struc-  
ture and terahertz coherent synchrotron radiation radio-frequency spectra 59

## 1 快照谱成像技术回顾

### Review of snapshot spectral imaging technologies

#### 1.1 基本信息

- 分类：其它
- 作者：N. Hagen and M.W. Kudenov (主要机构：Rebellion Photonics Inc.)
- 类型：综述
- 链接：<https://doi.org/10.1117/1.OE.52.9.090901>

#### 1.2 摘要

过去在谱成像领域，扫描元件是主要部件。近年，许多快照<sup>1</sup>谱成像 (snapshot spectral imaging) 系统已经商业可得，提供使用者开展许多新应用。扫描成像与快照成像是两个平行进展的成像技术。这篇论文简短回顾扫描成像，对目前开展的快照谱成像技术有较详细的回顾，并探讨这些新技术的潜在应用。

#### 1.3 贡献或创新点

- 贡献：1980 年代开始，有二维电荷耦合器件 (charged coupled device, CCD)，是一种新型的光电转换器件。往后三十年间，光电领域的进展大大增进了 CCD 器件效能。成像系统布局仍是标准布局，效能进展约一个数量级。快照谱成像的出现，改变了成像系统布局，改进数据采集能力，成像效能提高约三个数量级。
- 一些名词：谱成像指的是对  $I(x, y, \lambda)$  的采集，参考下图 Fig. 1。以下“谱成像”一词泛指在  $\lambda$  维度采集三个数据以上的成像。沿着  $\lambda$  轴的数据，称 channel (有些文献称 band)；在某个固定  $\lambda$  下的  $(x, y)$  数据，称 channel image。Datacube 的每个“格子”称 voxel、pixel。三个维度的数据个数分别为  $N_x$ 、 $N_y$ 、 $N_w$ 。更高维度的 hypercube，则为四维数据，分别为  $N_x$ 、 $N_y$ 、 $N_w$ 、 $N_t$ ，用在 time-resolved system，又称 video imaging system。注意，这里的  $t$  是测量的时序，与样品自身的  $N_w$  意义不同。

注意，快照 (snapshot) 比起扫描 (scanning) 有更好的数据采集效率，但不意味着高通量 (throughput) 或高效率 (efficiency)，特别是当有过滤元件时。注意，快照

---

<sup>1</sup>区别快照 (snapshot) 与扫描 (scanning)。这里的快照可以视为非扫描 (non-scanning) 过程。

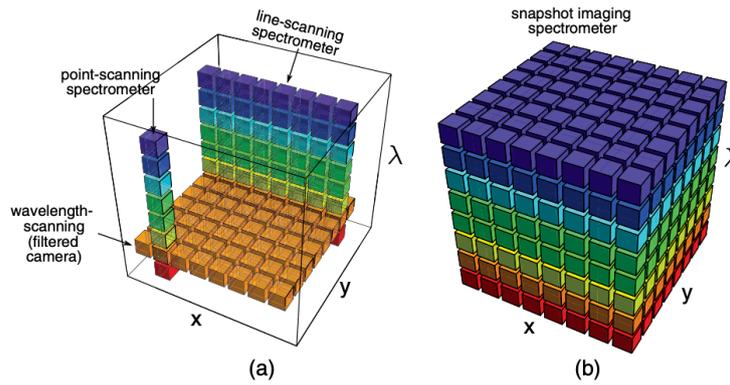


Fig. 1 The portions of the datacube collected during a single detector integration period for (a) scanning and (b) snapshot devices.

不一定“快”(fast), 即, 快照未必就能捕捉动态过程。是否能捕捉动态过程, 需要看成像与样品动力学过程的时间改变或空间改变的尺度。这里涉及使成像产生 blur 或 artifact 的结果。一般 artifact 在后处理时比较难修正。

快照谱成像技术最早发展历史大概在 1930-40 年代由对天体观测开始。可参考该论文 §2, 细节不论。

扫描谱成像简短回顾参考 §3, 此处不论。

这篇论文尝试回顾、比较以下几种目前开展的快照谱成像技术, 包含

- CTIS: computed tomography imaging spectrometer
- CASSI: coded aperture snapshot spectral imager
- MAFC: multiaperture filtered camera
- IMS: image mapping spectrometry
- SHIFT: snapshot hyperspectral imaging Fourier transform spectrometer
- MSI: multispectral Sagnac interferometer

该论文中对应各种快照谱成像技术的章节、示意图及初始参考文献整理如下表 Table 1。

**Table 1** Location of summaries discussing each technology.

Name	Section	Figure	Date	Reference
IFS-M	4.1	3	1938	9
IFS-F	4.2	4	1958	17
IFS-L	4.3	5	1960	21
MSBS	4.4	6	1978	56
CTIS	4.5	7	1991	57
MAFC	4.6	8	1994	58
TEI	4.7	9	2000	59
SRDA	4.8	10	2001	60
IRIS	4.9	11	2003	61
CASSI	4.10	12	2007	34
IMS	4.11	13	2009	62
SHIFT	4.12	14	2010	63
MSI	4.13	15	2010	64

## 1.4 其它

几种方案的优缺比较，从不同观点，参考该论文 §5，此处不论。快照谱成像用到了大量的探测阵列，因此，成像效率对于成像系统的紧凑性、成本、采集速度等，比起扫描成像更紧密地关联在一起。为了量化技术先进程度，这篇论文介绍了 information density  $Q$ 、efficiency  $\eta$ 、探测器利用程度  $\zeta$ 、使用的探测器个数  $M$  等。参考 §5.1。此外，快照谱成像的一些潜在缺点等，参考 §5.3。

## 2 论非均匀磁场中的同步辐射特性 [Opt. Comm. 22]

### On synchrotron radiation in non-uniform magnetic fields

#### 2.1 基本信息

- 分类：同步辐射
- 作者：R. Coisson (Universita di Parma, 意大利)
- 类型：理论
- 链接：<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0030401877900049>

#### 2.2 摘要

这篇论文讨论当带电粒子经过非均匀磁场时，特别是经过“长”或“短”磁铁的入口或出口边缘场区域的特性。分析指出，粒子弯转时发出的同步辐射频谱能够延伸至临界频率 (critical frequency) 以上。对高能质子储存环，此辐射特性应该能清楚观测到。

#### 2.3 贡献或创新点

- 创新点：该作者长期研究同步辐射特性。这篇论文是早期讨论非均匀磁场中的同步辐射特性的经典论文之一。
- 贡献：对足够长的弯转磁铁而言，粒子经过发出的同步辐射在远方观察位置看到一个完整的脉冲，其脉冲时间长度 (实验室静止坐标) 可以估算为

$$\tau_c = \frac{1}{2\gamma^2} \frac{R}{c\gamma} = \frac{m}{2\gamma^2 eB}$$

对应的主频率成分有  $\nu_c = 1/\tau_c$ ，又称临界频率 (critical frequency)。过了主频率成分，谱强度按指数衰减为  $(\nu/\nu_c) \exp(-4\pi\nu/3\nu_c)$ 。对非均匀磁场的磁铁，更具体地说，在非均匀区域导致的弯转角度小于 opening angle 时，即  $\alpha \ll 1/\gamma$ ，观测到的辐射脉冲时间长度没那么长 (但假设仍完整)，脉冲时间长度可以估算为  $\tau_d \approx (1/2\gamma^2) L/c$ ，因此，主频率成分有  $\nu_d = 1/\tau_d$ 。当  $\alpha < 1/\gamma$  时，比  $\nu_c$  大。这篇论文讨论到，对于电子加速器，由于  $\gamma$  在多数时候较大 ( $\gamma \gg 1$ )，如果要观察到以上特性，对磁铁非均匀性要求很高，在当时对此特性的观察可能不实际。对质子加速器，由于  $\gamma$  相对小得多，对磁铁非均匀性要求较低，有机会观察到此同步辐射特性。

另外，对于足够长的磁铁，但是考虑入口或出口处的非均匀磁场，也可以按类似方式分析频谱特性。参考下图 Fig. 1(定性) 与 Fig. 2(定量)，比较了三种不同情况。

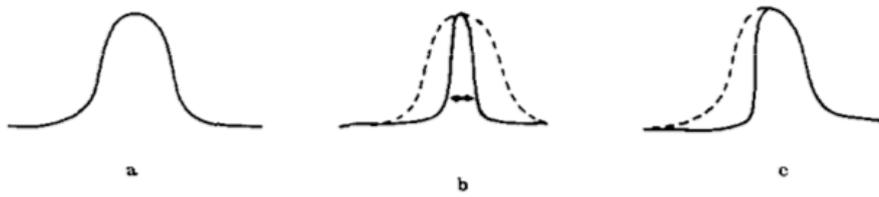


Fig. 1. Time dependence of e.m. field produced by a single particle, as seen by the observer: (a) "long" magnet, (b) "short" magnet (dashed line: "long" magnet with same B), (c) "sharp" edge of a "long" magnet.

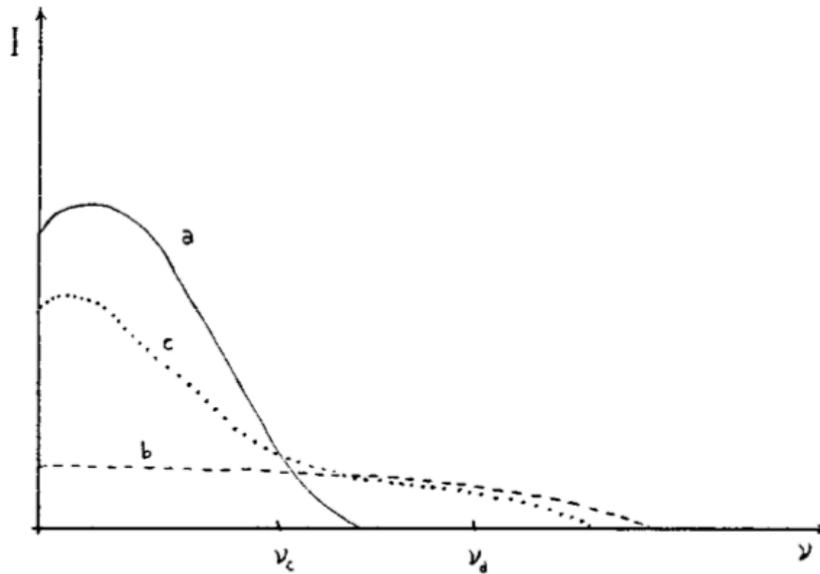


Fig. 2. Qualitative picture of spectral density in the three cases considered in fig. 1.

## 2.4 其它

对电子经过边缘磁场产生的同步辐射特性的研究在后来还有不少讨论更细致的文献，此处仅是早期文献之一。一种可能的应用是作为束团特性量测。

### 3 短脉冲光学波荡器脉冲前沿倾斜的色散特性 [TUPMA031]

#### Dispersive property of the pulse front tilt of a short pulse optical undulator

##### 3.1 基本信息

- 分类：同步辐射与自由电子激光
- 作者：M.-H. Wang, J. Wu, Z. Wu, and J. Liang (主要机构：SLAC)
- 类型：理论、模拟
- 链接：<https://accelconf.web.cern.ch/IPAC2015/papers/tupma031.pdf>

##### 3.2 摘要

激光脉冲可以被用来作为高增益、高亮度自由电子激光的光学波荡器。为了保持电子与波荡器光场的有效相互作用，其最好同向传播并且保持足够小的夹角。此外，为了维持共振关系，纵向激光脉冲分布应采平顶 (flattened) 与脉冲前沿倾斜。由于短脉冲特性，激光脉冲具有宽谱。这篇论文利用光束矩阵描述，用来描述推广高斯分布脉冲的传播。利用此分析工具，可以研究激光脉冲前沿倾斜时的色散特性。作为应用，这篇论文给出一个基于 SLAC 康普顿散射 FEL 的激光光路设计作为一个分析例子。

##### 3.3 贡献或创新点

- 创新点：利用 Kostenbauder 矩阵理论描述康普顿散射 FEL 的激光光路设计，用来评估超短激光脉冲的色散特性。
- 贡献：这篇论文一开始总结 Kostenbauder 矩阵理论的基础。如下图所示基于 SLAC 康普顿散射 FEL 的激光光路设计，这篇论文第二部分则分析  $\Delta x_G = 20 \text{ mm}$  与  $\Delta t_G = 20 \text{ fs}$  的输入高斯激光脉冲，在经过光路后，在出口处的光脉冲特性改变。由论文 Figs. 2 与 3 可以看出，在出口处的激光脉冲存在脉冲前沿倾斜 (pulse front tilt, PFT)，但是几乎没有空间色散 (spatial dispersion, SD)。然而，在出口处有非零  $\text{Im}R_{xw}$ ，即目前设计仍存在波前前沿倾斜 (wave front tilt, WFT)。

##### 3.4 其它

关于 Kostenbauder 矩阵理论的原始论文，可参考 [1]。

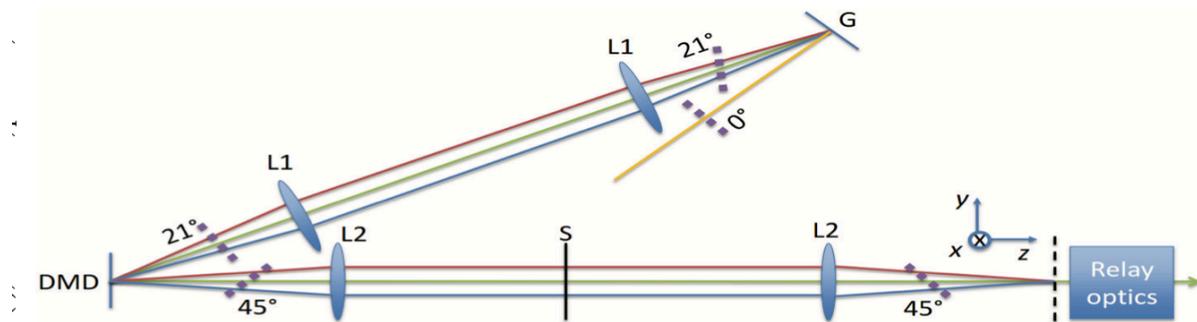


Figure 1: Schematic layout of optic design for the proposal of SLAC Compton scattering FEL. Where  $G$  means grating,  $L1$ ,  $L2$ : lenses, DMD: digital micromirror device,  $S$ : slit. The yellow line represents an input fs pulse, red line chief ray of the longest wavelength  $\lambda_l$ , green line chief ray of the central wavelength  $\lambda_c$ , blue line chief ray of the shortest wavelength  $\lambda_s$ . The black dash line represents the image plane and the purple dash line the pulse front.

## 参考文献

- [1] A.G. Kostenbauder, Ray-pulse matrices: a rational treatment for dispersive optical systems, IEEE Journal of Quantum Electronics 26, 1148-1157 (1990). <https://ieeexplore.ieee.org/document/108113>

## 4 在高梯度介质激光加速器中为增加作用长度的激光光路设计 [NIMA 909]

### Optical design for increased interaction length in a high gradient dielectric laser accelerator

#### 4.1 基本信息

- 分类：先进加速器方案
- 作者：D. Cesar, J. Maxson, P. Musumeci, X. Shen, R.J. England, K.P. Wootton (主要机构：UCLA)
- 类型：理论、数值计算
- 链接：<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168900218300263?via%3Dihub>

#### 4.2 摘要

这篇论文给出针对高梯度介质激光加速器 (dielectric laser accelerator, DLA) 的一个设计并量测超快激光脉冲前沿倾斜 (pulse front tilt, PFT)<sup>2</sup>的方法。之前的研究大多关注测量高梯度介质激光加速器的加速梯度，并且仅考虑较短<sup>3</sup>的电子-激光相互作用长度。这篇论文给出的激光光路设计目的为增加电子-激光作用长度至约 1 mm 量级。

#### 4.3 贡献或创新点

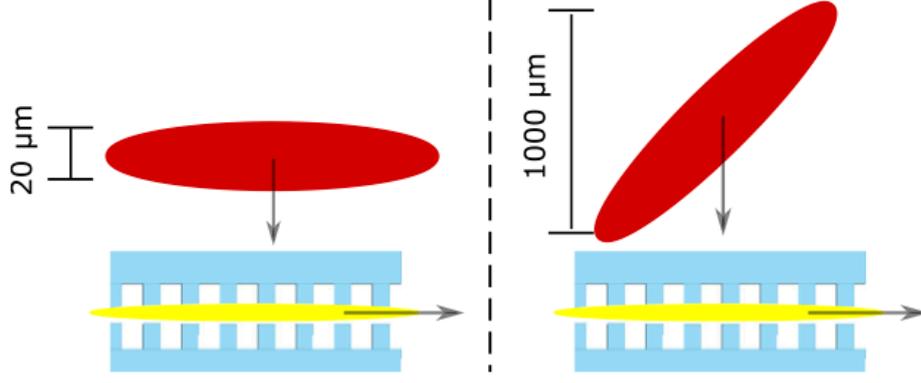
- 创新点：这篇论文提出一种对激光束脉冲前沿倾斜 (PFT) 调整方案，使电子-激光相互作用长度增加至 mm 数量级。此外，这篇论文也给出量测此超快激光脉冲的光路设计。

下面示意图表示，对于没有 PFT 的激光脉冲，其能够有效加速的电子束较长，但是作用长度短；对于存在 PFT 的激光脉冲，其能够有效加速的电子束较短（只有局部或一切片），但是作用长度长。

---

<sup>2</sup>注意，pulse front tilt 不等于 phase front tilt。

<sup>3</sup>几个  $\mu\text{m}$  数量级，对应到激光脉冲长度（约 fs 数量级），因为基于 DLA 的激光与电子大约相垂直。



**Fig. 1.** Illustration comparing acceleration with a flat pulse (left) to a tilted pulse (right). The flat pulse accelerates a long electron bunch for a short interaction while the tilted pulse accelerates a single slice for an extended interaction.

- 贡献：目前而言，基于高梯度介质激光加速器能够达到的加速梯度大约为 1.8 GV/m (对相对论电子) 与 0.37 GV/m (对非相对论电子)，在电子与光场尽可能保持同步情况下。目前努力的方向包含改进激光场对称性、介质材料损坏处理、级联、诊断等。

考虑如下图激光光路，激光脉冲抵达介质结构时，存在 PFT 有

$$\theta_{\text{PFT}} = \tan^{-1} \left( \frac{\lambda_0 m}{d \cos(\theta_d)} \right)$$

其中， $\lambda_0$  为中心波长、 $m$  为成像系统的角度放大倍率、 $d$  为光栅周期 (grating pitch)、 $\theta_d$  为衍射角，满足

$$d(\sin(\theta_i) + \sin(\theta_d)) = N\lambda_0$$

利用 Kostenbauder 矩阵，从图中的光栅至 DLA 的激光光路，其传输矩阵可以写成

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 & 0 & 0 \\ M_{21} & \frac{1}{M_{11}} & 0 & \frac{\lambda}{\beta_{\text{PFT}} c} \\ \frac{M_{11}}{\beta_{\text{PFT}} c} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

到达 DLA 的激光电场可以利用 Huygens 核函数写成

$$E(x_{\text{out}}, t_{\text{out}}) \propto \iint dx_{\text{in}} dt_{\text{in}} e^{-i\pi M_{21}/\lambda_0 M_{11}} \delta(x_{\text{in}} - x_{\text{out}}/M_{11}) \delta(t_{\text{in}} - (t_{\text{out}} - M_{31}x_{\text{in}})) E(x_{\text{in}}, t_{\text{in}})$$

抵达 DLA 的线性激光脉冲特性可以由上面结果导出，此处不论。此外，对于非线性效应，如 Kerr 非线性，该论文 §5.2 有些讨论。

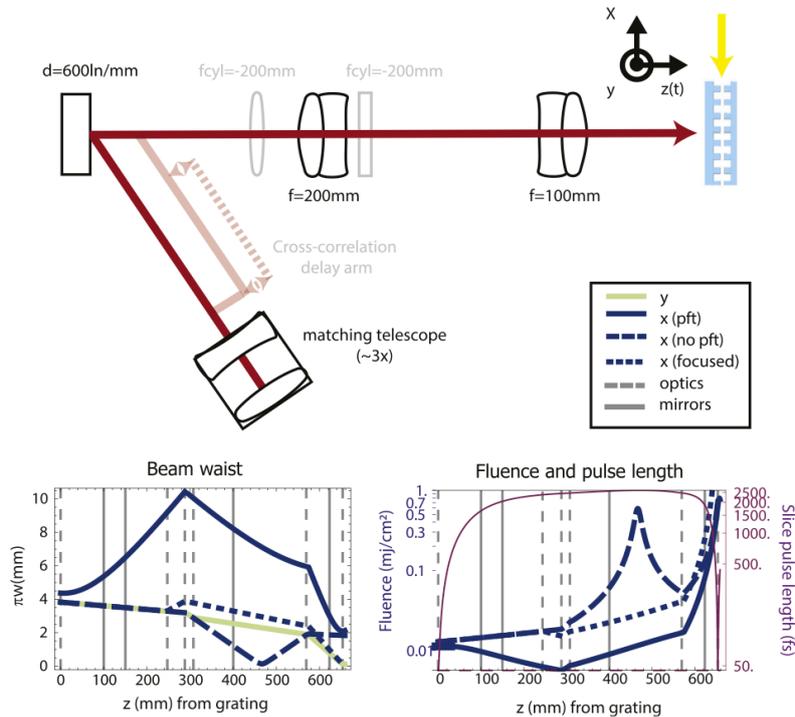


Fig. 2. Illustration of the optical design. (top) Cartoon showing the relative position of optics. (bottom left) Spot size in 4 operating configurations. (bottom right) Fluence (for 300 mJ) and slice pulse length (on-axis) used to check damage thresholds.

#### 4.4 其它

这篇论文基于 Kostenbauder 矩阵方法描述超短激光脉冲经历光路系统的动力学过程。该论文 §2.1 简单总结了部分结果，更多关于基础理论的介绍可以参考 [1, 2, 3]。这里的 Kostenbauder 矩阵描述类似于电子光学的传输矩阵，分析线性动力学过程。对于高阶现象，如像差 (aberration) 等，不在 Kostenbauder 矩阵描述框架内。

#### 参考文献

- [1] A.G. Kostenbauder, Ray-pulse matrices: a rational treatment for dispersive optical systems, IEEE Journal of Quantum Electronics 26, 1148-1157 (1990). <https://ieeexplore.ieee.org/document/108113>
- [2] S. Akturk, X. Gu, P. Gabolde, R. Trebino, The general theory of first-order spatio-temporal distortions of Gaussian pulses and beams, Opt. Express 13 (21) (2005) 8642-8661. <http://dx.doi.org/10.1364/OPEX.13.008642>
- [3] G. Marcus, Spatial and temporal pulse propagation for dispersive paraxial optical systems, Opt. Express 24 (7) (2016) 7752-7766. <http://dx.doi.org/10.1364/OE.24.007752>

## 5 储存环中非聚束束团过冲现象的解析方法 [PRD 28]

### Analytical approach to the overshoot phenomenon for a coasting beam in particle accelerators

#### 5.1 基本信息

- 分类：多粒子动力学
- 作者：Yongho Chin and Kaoru Yokoya (主要机构：KEK)
- 类型：理论、数值计算
- 链接：<https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.28.2141>

#### 5.2 摘要

针对储存环加速器中非聚束束团 (coasting beam) 纵向不稳定性，这篇论文给出一种非线性微扰理论。与传统线性理论相比，这里的微扰分析多了一个微扰小量的二阶项。根据这篇论文的方法，推导了一组耦合的方程，包含束团能散  $\sigma_\epsilon$  与微扰量振幅  $A$ 。此外，还给出  $dD/dt$  在  $U$ - $V$  归一化阻抗复平面上的映射，并指出即使通过稳定区间 ( $F < 0$ )，最终束团能散仍可能增加。

对初始情况已不稳定的束团，其束团能散持续增加，可能超过阈值条件后，能散仍继续增加，然后才逐渐收敛至渐近值。这篇论文给出一理论过冲公式 (overshoot formula)，并与 CERN ISR 加速器的实验结果进行定性比较与讨论。

#### 5.3 贡献或创新点

- 创新点：传统集体效应分析着重在束团发生不稳定时的初始阶段，即不稳定性阈值。这篇论文给出在当束团经历集体效应且经过阈值后的束团特性演化。具体地说，分析束团经过不稳定阈值后的束团能散可能存在“过冲”(overshoot) 现象。不同于传统线性化分析，这篇论文采非线性微扰法，即零阶方程现在包含微扰的二阶项，且  $f_0$  允许带有时间依存关系。
- 主要结果：根据 R.A. Dory 的计算机模拟结果，显示在束团经过阈值之后，束团能散可能发生“过冲”，满足如下关系：

$$\sigma_f \sigma_i \approx \sigma_{th}^2$$

通过这篇论文分析，作者给出一稍微不同的形式，也能解释过冲现象，有

$$\sigma_f^2 + \sigma_i^2 \approx 2\sigma_{\text{th}}^2$$

对于束团已经处在不稳定情况，在初始能散越小的情况下，过冲现象越明显。对于束团处在稳定情况，即低于不稳定阈值，几乎没有过冲情况。

- 贡献：这篇论文的分析由 Vlasov 方程开始，通过将相空间分布写成  $f = f_0 + f_1$  ( $|f_1| \ll f_0$ )，将 Vlasov 方程拆写成以下两个式子

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} - \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \frac{\partial h(\epsilon, t)}{\partial \epsilon} e\omega_0 Z^* \phi^*(t) \right] = 0$$

与

$$\frac{\partial f_1(\epsilon, \theta, t)}{\partial t} + \frac{\partial f_1(\epsilon, \theta, t)}{\partial \theta} \omega + \frac{\partial f_0(\epsilon, t)}{\partial \epsilon} \dot{\epsilon} = 0$$

注意到，上面第一式关于  $f_0$  的式子不是零阶方程，而是包含微扰的二阶项。并且，上面第二式（一阶方程）关于  $f_0$  包含了时间的明显依存关系。由一阶方程可以得到色散方程，有

$$1 - \frac{(e\omega_0)^2}{2\pi} iZ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\partial f_0 / \partial \epsilon)_{t_1} d\epsilon}{\Omega - n(\omega_0 + k_0 \epsilon)} = 0$$

其中，存在极点  $\epsilon = \epsilon_P = \frac{1}{k_0} \left( \frac{\Omega}{n} - \omega_0 \right)$ ，涉及的围道积分路径选择根据 below transition 与 above transition 不同，参考该论文 Fig. 1，此处不论。带有零阶与二阶的方程可以进一步化简，写成

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} - \frac{(e\omega_0)^2}{2} I_0^2 |Z|^2 A(t_1) \frac{\partial}{\partial \epsilon} \frac{\Delta\Omega_i (\partial f_0 / \partial \epsilon)_{t_1}}{(\Delta\Omega_r - nk_0 \epsilon)^2 + \Delta\Omega_i^2}$$

其中，

$$\frac{dA(t)}{dt} = 2\Delta\Omega_i A(t)$$

这里的  $A$  定义为

$$A(t) = \frac{|\phi(t)|^2}{I_0^2} > 0$$

其中， $\phi(t)$  应该视为束团线密度微扰量的傅立叶分量。

由于我们关心的是束团能散，可以在  $f_0$  的方程两边加权，将其写成能散的方程<sup>4</sup>，有

$$\frac{d\sigma_\epsilon^2}{dt} - \frac{\beta^2 E_c e}{\eta n I_0} |\phi(t)|^2 (Z_r \Delta\Omega_r + Z_i \Delta\Omega_i) = 0$$

---

<sup>4</sup>假设束团的分布形状不变。

进一步化简符号，令  $D = \left(\frac{\sigma_e}{E_c}\right)^2$ ，将上式写成

$$\frac{dD(t)}{dt} - \text{sgn}(\eta)KA(t)(Z_r\Delta\Omega_r + Z_i\Delta\Omega_i) = 0 \quad \text{或写成} \quad \frac{dD(t)}{dt} = F(D)A(t)$$

结合

$$\frac{dA(t)}{dt} = 2\Delta\Omega_i A(t)$$

形成一组耦合的方程，包含束团能散  $\sigma_e$  与微扰量振幅  $A$ 。

这篇论文 Section III 以归一化阻抗描述方式讨论系统的稳定性，上面  $F$  与  $K$  的定义如下

$$F = \text{sgn}(\eta)K(Z_r\Delta\Omega_r + Z_i\Delta\Omega_i)$$

与

$$K = \frac{I_0\beta^2}{|\eta|nE_c/e}$$

考虑束团能散分布函数  $g_0(x, t_1) = \frac{8a}{3\pi}(1 - a^2x^2)^{3/2}$ ，其中  $|x| < \frac{1}{a}$  的情况，有如下的稳定图 (stability diagram)，稳定区域为  $\text{Im}(x_1) \leq 0$  范围。

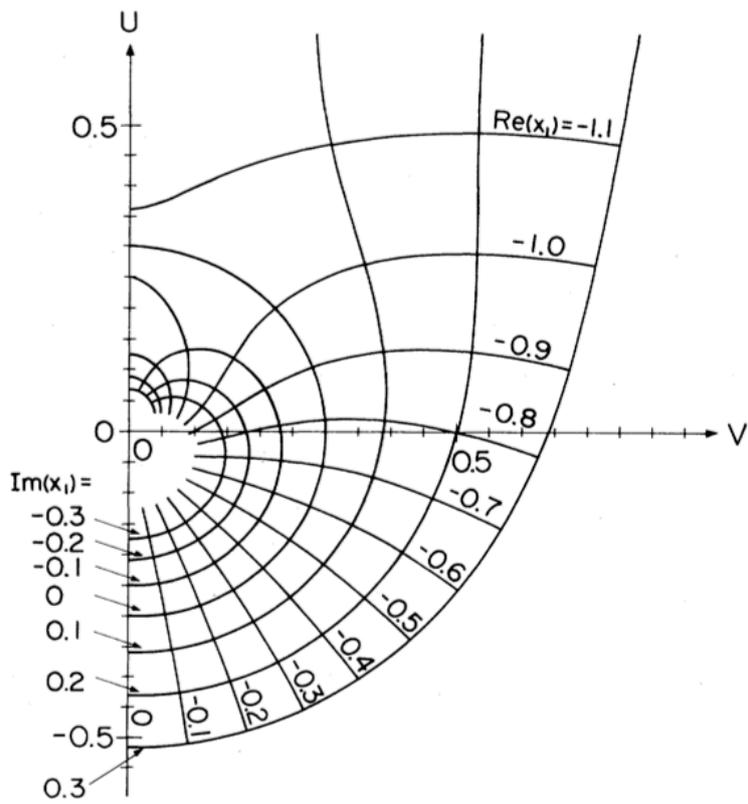


FIG. 2. The stability diagram below the transition energy for the distribution function given by Eq. (2.30).

为了进一步讨论过冲现象 (Section IV), 这篇论文考虑了在稳定图中随时间演化的不同路径, 特别是考虑下图 Fig. 4 中的 Line A 与 Line B

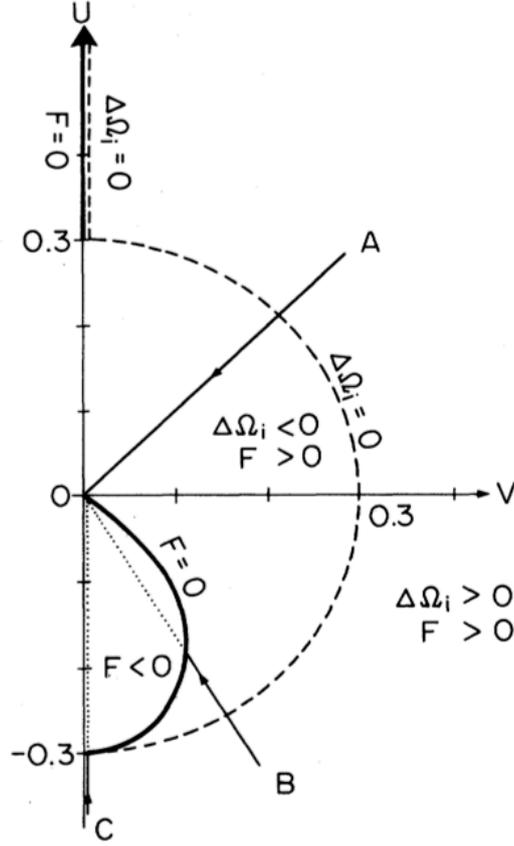


FIG. 4. Motion of  $U, V$  pairs associated with the blowup of the energy spread for three different impedances. They never can get into the region  $F < 0$ , which is denoted by the dotted line.

利用对色散方程 Eq. (3.11) 中的分母寻找极点, 有

$$F(D_f) \left[ 2 \int_{D_i}^{D_f} \frac{\Delta\Omega_i}{F(D)} dD + A(0) \right] = 0$$

接着, 通过省略  $A(0)$  项, 得到  $\int_{D_i}^{D_f} \frac{\Delta\Omega_i}{F(D)} dD = 0$  关系。这篇论文给出在束团经历不稳定阈值前后的能散改变应满足如下关系

$$D_f + D_i \approx 2D_{th}$$

或

$$\sigma_f^2 + \sigma_i^2 \approx 2\sigma_{th}^2$$

其中, 在  $D_{th}$  量测的面积贡献互相抵消 (参考该论文 Fig. 5)。

下图 Fig. 6 给出示意图，在通过不稳定阈值之后，束团能散继续增加，直到达到渐近值。在发生不稳定阈值的较长时间尺度后，微扰振幅也逐渐衰减至零。

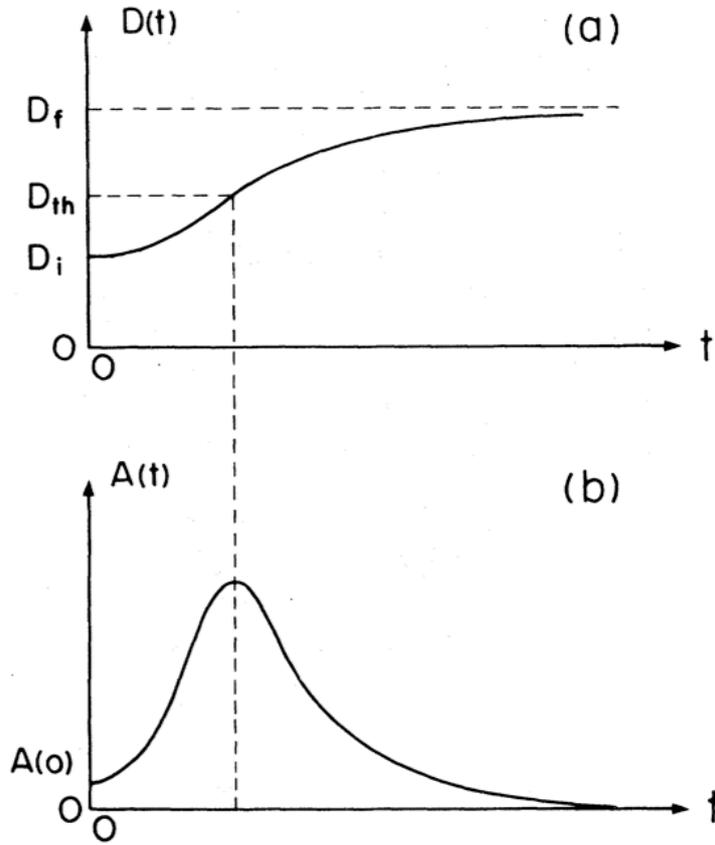


FIG. 6. Sketches of the qualitative behavior of (a)  $D(t)$  and (b)  $A(t)$  as a function of time  $t$ .

#### 5.4 其它

这篇论文最后还讨论了基于非线性微扰分析的部分结论与 Dory 模拟结果不一致的地方，部分归因于这篇论文分析过程使用的假设。

## 6 束团压缩器中的相干同步辐射不稳定性 [PRST-AB 5]

### Coherent synchrotron radiation instability in a bunch compressor

#### 6.1 基本信息

- 分类: 相干同步辐射 (CSR)、微聚束 (Microbunching)
- 作者: S. Heifets, G. Stupakov and S. Krinsky (主要机构: SLAC)
- 类型: 理论
- 链接: <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.5.064401>

#### 6.2 摘要

在束团压缩器 (bunch compressor) 中, 束团的相干同步辐射 (coherent synchrotron radiation) 将导致微波不稳定性 (microwave instability), 从而产生与束团长度相比较小波长尺度的纵向调制。这种不稳定性也是压缩器中束团发射度增长这个非期待结果的来源。该文章推导并分析了描述微波调制线性演化的方程, 其中考虑了非相干能散和束团有限发射度的影响。以直线加速器相干光源 (Linac Coherent Light Source, LCLS) 束团压缩器为例, 该方程的数值解给出了微聚束 (microbunching) 对应不同波长的放大因子。

这篇论文从在压缩器中单粒子的运动方程出发找到运动积分, 引入了具有能量啁啾 (energy chirp) 的束团的平衡分布函数作为 Vlasov 方程的解, 并在 Vlasov 方程中加入同步辐射尾场项以描述束团自身尾场引起的微聚束 (self-induced microbunching)。这篇论文假设了平衡分布函数的扰动较小, 以此对方程进行了线性化的处理, 紧接着沿着未受扰动的轨迹对线性化的 Vlasov 方程进行积分, 将其简化为一维 Volterra 积分方程。最后, 该文章给出了 LCLS 束团压缩器积分方程的数值解结果。

#### 6.3 贡献或创新点

- 创新点:
  - 本文章的第一个创新点在于其处理了在束团压缩器中由相干同步辐射导致的微波不稳定性, 在分布函数中同时考虑了束团的能量啁啾与有限的束团发射

度。该文章将首先通过在束团压缩器中的单粒子运动方程以及方程相应的通解找到了运动积分  $x_0, \theta_0, z_0$ ，这些参数确定了 betatron 振荡的振幅和相位并且可以通过粒子在位置  $s$  处的坐标  $x, \theta, z$  来表示：

$$\begin{aligned} x_0(x, \theta, p, s) &= \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta}}(x - Dp) \cos \psi - \sqrt{\beta_0 \beta} \left[ \theta - D'p + \frac{\alpha}{\beta}(x - Dp) \right] \sin \psi, \\ \theta_0(x, \theta, p, s) &= \frac{x - Dp}{\sqrt{\beta \beta_0}} \sin \psi + \sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}} \left[ \theta - D'p + \frac{\alpha}{\beta}(x - Dp) \right] \cos \psi, \\ z_0(x, \theta, p, s) &= z - R_{56}p - x_0 R_{51} - \theta_0 R_{52}. \end{aligned}$$

定义在压缩器中束团的分布函数  $\rho(x, \theta, z, p, s)$ ，该分布函数的积分  $\int dx d\theta dp \rho$  给出束团单位长度的粒子数。先不考虑尾场效应，该分布函数将满足 Vlasov 方程，并且解为运动积分的任意函数：

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial s} - \frac{x}{R} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \theta \frac{\partial \rho_0}{\partial x} + \left( -k_\beta^2 x + \frac{p}{R} \right) \frac{\partial \rho_0}{\partial \theta} = 0$$

其中，通解可以写成

$$\rho_0(x, \theta, z, p, s) = f_0 [x_0(x, \theta, z, p, s), \theta_0(x, \theta, z, p, s), z_0(x, \theta, z, p, s), p].$$

对于平衡函数  $f_0$ ，本文章选择在初始坐标  $x_0$  和  $u_0$  以及  $p$  上具有高斯分布的束团模型，并且引入了说明了粒子在束中的位置与其能量之间的相关性的能量啁啾参数  $u$ ：

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{n_b}{2\pi\epsilon_0} \exp\left(-\frac{x_0^2 + (\beta_0 \theta_0)^2}{2\epsilon_0 \beta_0}\right) \rho_G(p + uz_0), \\ \rho_G(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_p} \exp\left(-\frac{p^2}{2\sigma_p^2}\right), \end{aligned}$$

其中， $n_b$  是压缩器入口处 ( $s = 0$ ) 束团每单位长度的粒子数， $\epsilon_0$  是水平发射度， $\delta_p$  是束团的不相关能量扩散。

- 该文章另一个创新点为对 Vlasov 方程的线性化处理并求解。考虑相干同步辐射的尾场效应后，Vlasov 方程变为：

$$\frac{\partial \rho}{\partial s} - \frac{x}{R} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \theta \frac{\partial \rho}{\partial x} + \left( -k_\beta^2 x + \frac{p}{R} \right) \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \frac{r_e}{\gamma} \frac{\partial \rho}{\partial p} \int dz' W(z - z', s) n(z', s)$$

其中  $n(z, s) = \int dx d\theta dp \rho(x, \theta, z, p, s)$ 。本文通过微扰方法，考虑平衡分布函数的一个小扰动来对上述方程进行线性化处理， $\rho = \rho_0 + \rho_1, \rho_1 \ll \rho_0$ 。由此可以得到线性化的 Vlasov 方程：

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial s} - \frac{x}{R} \frac{\partial \rho_1}{\partial z} + \theta \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \left( -k_\beta^2 x + \frac{p}{R} \right) \frac{\partial \rho_1}{\partial \theta} = \frac{r_e}{\gamma} \frac{\partial \rho_0}{\partial p} \int dz' W(z - z', s) n_1(z', s)$$

其中  $n_1(z, s) = \int dx d\theta dp \rho_1(x, \theta, z, p, s)$ 。上式的解可以写为运动积分的函数  $\rho_1(x, \theta, z, p, s) = f_1(x_0, \theta_0, z_0, p, s)$ ，其中  $f_1$  满足：

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial s} = & -\frac{r_e}{\gamma} f_0 \left[ \frac{x_0}{\epsilon_0 \beta_0} \frac{\partial x_0}{\partial p} + \frac{\beta_0 \theta_0}{\epsilon_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial p} + \frac{p_0}{\sigma_p^2} \left( 1 + u \frac{\partial z_0}{\partial p} \right) \right] \\ & \times \int dx'_0 d\theta'_0 dz'_0 dp'_0 f_1(x'_0, \theta'_0, z'_0, p'_0, s) \\ & \times W[(z_0 - z'_0)(1 - uR_{56}) + (p_0 - p'_0)R_{56} + (x_0 - x'_0)R_{51} + (\theta_0 - \theta'_0)R_{52}, s]. \end{aligned}$$

对于上面的方程，本文通过假设  $f_1$  与  $z_0$  呈正弦关系来进行求解，即：

$$f_1(x_0, \theta_0, z_0, p_0, s) = f_k(x_0, \theta_0, p_0, s) e^{ikz_0}.$$

由此可以得到与密度扰动（波数为  $k$ ）的振幅相关的参数  $g_k(s)$ ：

$$n_{1,k}(z, s) = C(s)g_k(s)e^{ikC(s)z},$$

$$g_k(s) = g_k^{(0)}(s) + \int_0^s K(s, s') g_k(s') ds',$$

其中  $g_k^{(0)}(s)$  与  $f_k$  的初始值有关并且最终可以得到：

$$g_k^{(0)}(s) = n_{1,k}^{(0)} e^{-[C(s)^2 k^2 \epsilon_0 / 2\beta_0] [\beta_0^2 R_{51}^2(s) + R_{52}^2(s)] - C(s)^2 k^2 \sigma_p^2 R_{56}^2(s) / 2}$$

上面两个式子描述了任意线性光学器件以及初始纵向和横向发射度的束团稳定性，并构成了本文最终数值计算的基础。

- 贡献：这篇论文发展了一个线性理论，描述了磁场束团压缩器中束团自身引起的微聚束效应。微聚束是由短波调制的相干同步辐射以自洽方式驱动的微波不稳定性引起的。求解具有纵向和横向自由度的线性化 Vlasov 方程为串式压缩器中 CSR 的影响提供了新的描述，其中横向运动有助于正确量化由 CSR 产生的能量偏差引起的聚束效应。此外，横向发射度引起的朗道阻尼被证明是一个重要的稳定影响。本文章这里提出的方法是对问题的数值模拟的补充，因为所做的近似是不同的，数值误差的来源也是不同的。

表征束团相对密度扰动增长的放大因子由下式给出：

$$G(s) = \frac{|n_{1,k}(s, z)|}{C(s)n_{1,k}^{(0)}}$$

文章中给出了在不同发射度  $\epsilon$ 、不同能散  $\delta_p$  以及不同扰动波长  $\lambda = 2\pi/k$  下的数值结果，数值方法使用了 Volterra 方程在网格上的离散化，通常具有 400–600 个点，并使用梯形求积规则通过求和近似积分。

放大因子  $G_f$  作为扰动波长  $\lambda$  的函数的结果：

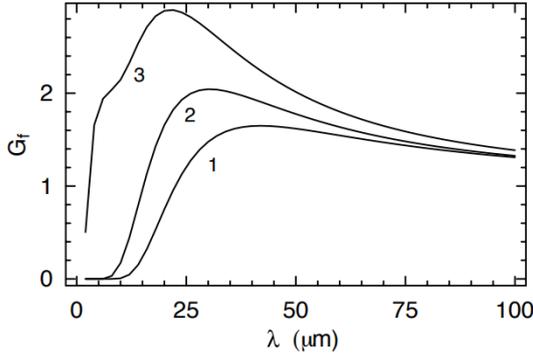


FIG. 3. Amplification factor  $G_f$  as a function of wavelength  $\lambda$  of the perturbation at the compressor entrance for various beam emittance and energy spread: (1)  $\sigma_p = 3.0 \times 10^{-5}$ ,  $\epsilon = 1 \mu\text{m}$ ; (2)  $\sigma_p = 3.0 \times 10^{-5}$ ,  $\epsilon = 0$ ; and (3)  $\sigma_p = 3.0 \times 10^{-6}$ ,  $\epsilon = 1 \mu\text{m}$ .

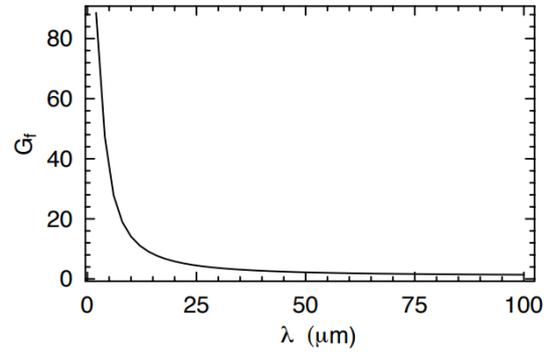


FIG. 4. Amplification factor  $G_f$  as a function of wavelength for the zero beam emittance and  $\sigma_p = 3.0 \times 10^{-6}$ .

以及放大因子  $G(s)$  作为  $s$  的函数的结果：

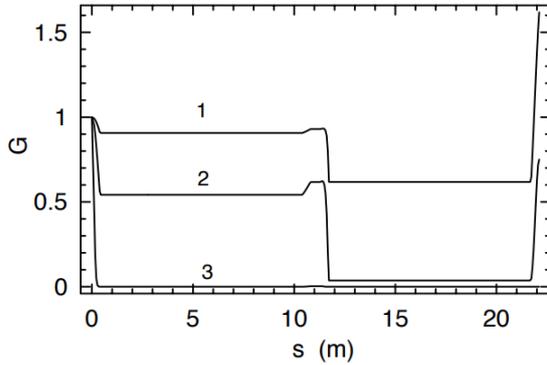


FIG. 5. Amplification factor  $G(s)$  for  $\epsilon = 1 \mu\text{m}$ ,  $\sigma_p = 3.0 \times 10^{-5}$  for three values of  $\lambda$ : (1)  $\lambda = 50 \mu\text{m}$ , (2)  $\lambda = 20 \mu\text{m}$ , and (3)  $\lambda = 5 \mu\text{m}$ .

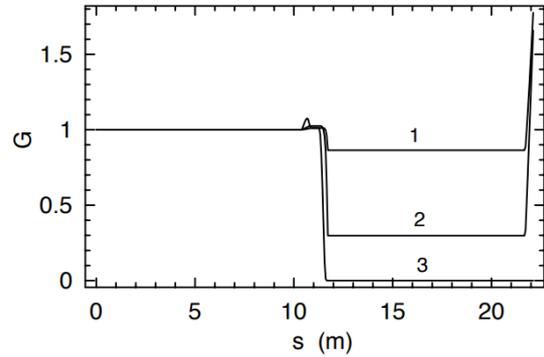


FIG. 6. Amplification factor  $G(s)$  for  $\epsilon = 0$ ,  $\sigma_p = 3.0 \times 10^{-5}$  for three values of  $\lambda$ : (1)  $\lambda = 50 \mu\text{m}$ , (2)  $\lambda = 20 \mu\text{m}$ , and (3)  $\lambda = 5 \mu\text{m}$ .

## 6.4 其它

这篇论文中使用的尾场表示式 [该文章的 Eq.(11)] 可能不适用于非常短的波长。事实上，该尾场是针对一个在横向上无限薄 (即，线束团) 的束团推导出来的，并且假设

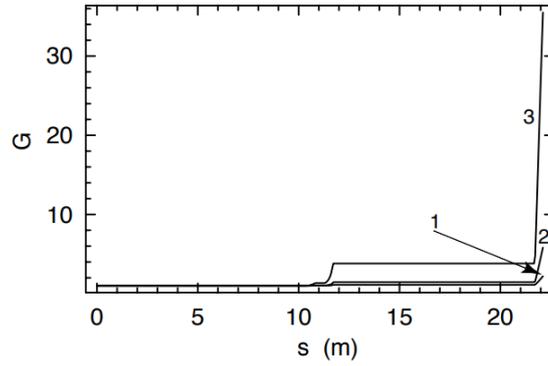


FIG. 7. Amplification factor  $G(s)$  for  $\epsilon = 0$ ,  $\sigma_p = 3.0 \times 10^{-6}$  for three values of  $\lambda$ : (1)  $\lambda = 50 \mu\text{m}$ , (2)  $\lambda = 20 \mu\text{m}$ , and (3)  $\lambda = 5 \mu\text{m}$ .

束团横截面上的所有粒子都是相干辐射的。然而，横向相干长度  $l_{\perp} \sim \lambda^{2/3} R^{1/3}$  随波长而减小，并且在某一点处变得小于光束的横向尺寸，对于这种情况必须使用考虑到光束横向尺寸的尾场。

关于这篇论文的勘误，可参考<https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.5.129902>。

## 参考文献

- [1] Stupakov, G., and S. Heifets, “Beam instability and microbunching due to coherent synchrotron radiation.” *Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams* 5.5 (2002): 054402.
- [2] Heifets, S., and G. Stupakov, “Beam instability and microbunching due to coherent synchrotron radiation.” PACS2001. *Proceedings of the 2001 Particle Accelerator Conference (Cat. No. 01CH37268)*. Vol. 3. IEEE, 2001.

## 7 束团压缩器中相干同步辐射微聚束公式 [PRST-AB 5]

### Formulas for coherent synchrotron radiation microbunching in a bunch compressor chicane

#### 7.1 基本信息

- 分类: 相干同步辐射 (CSR)、微聚束 (Microbunching)
- 作者: Zhirong Huang and Kwang-Je Kim (主要机构: SLAC)
- 类型: 理论
- 链接: <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.5.074401>

#### 7.2 摘要

这篇论文利用积分方程的迭代解, 研究了由相干同步辐射 (CSR) 驱动的束团压缩器中的微聚束不稳定性。通过包括一级和两级放大 (one-stage and two-stage amplifications), 获得了在低增益和高增益状态下都有效的 CSR 微聚束的解析表达式。这些公式可用于探索 CSR 微聚束对压缩束团、能散和发射度的依赖性, 并提供设计 X 射线自由电子激光器所需的稳定束团压缩器的理论指导。

这篇论文分析了一个典型的束团压缩器中的微聚束过程, 并获得了在高增益和低增益状态下都有效的积分方程的迭代解。在 [1] 中使用的线性化 Vlasov 方程基础上, 给出了 CSR 微聚束积分方程的紧凑推导。这篇论文根据束能量、电流、发射度、能散和啁啾 (chirp)、初始 lattice 参数以及基本的 chicane 参数, 表示了由密度或能量调制引起的 CSR 微聚束。最后, 应用这些结果来研究 LCLS 束团压缩器的稳定性, 并说明各种放大过程。

#### 7.3 贡献或创新点

- 创新点:
  - 这篇论文的第一个创新点在于其获得了描述由 CSR 驱动的微聚束不稳定性在高增益和低增益状态下都有效的积分方程的迭代解, 给出了由初始密度调制引起的微聚束中与 one-stage 和 two-stage amplifications 相关的讨论。该文章

从 [1] 的线性化 Vlasov 方程的推导出发，通过 bunching parameter  $b(k; s)$  (该参数用以量化在波长  $\lambda$  的密度调制度) 以更紧凑的形式给出了对应的解：

$$b(k; s) = \frac{1}{N} \int d\mathbf{X} e^{-ikz} f(\mathbf{X}; s),$$

$$b[k(s); s] = b_0[k(s); s] + \int_0^s d\tau K(\tau, s) b[k(\tau); \tau]$$

其中， $\mathbf{X} = (x, x', z, \delta)$  为在  $s$  处的相空间变量，kernel  $K$  为：

$$K(\tau, s) = ik(s)R_{56}(\tau \rightarrow s) \frac{I(\tau)Z[k(\tau); \tau]}{\gamma I_A} e^{-k_0^2 U^2(s, \tau) \sigma_\delta^2 / 2} \\ \times \exp \left[ -\frac{k_0^2 \varepsilon_0 \beta_0}{2} \left( V(s, \tau) - \frac{\alpha_0}{\beta_0} W(s, \tau) \right)^2 - \frac{k_0^2 \varepsilon_0}{2\beta_0} W^2(s, \tau) \right]$$

其中， $k(\tau)/B(\tau) = k(s)/B(s) = k_0$ ， $B(s) = [1 + hR_{56}(s)]^{-1}$ ，并且：

$$U(s, \tau) = B(s)R_{56}(s) - B(\tau)R_{56}(\tau)$$

$$V(s, \tau) = B(s)R_{51}(s) - B(\tau)R_{51}(\tau)$$

$$W(s, \tau) = B(s)R_{52}(s) - B(\tau)R_{52}(\tau).$$

上式物理意义为： $\tau$  处的密度调制通过 CSR 阻抗诱导能量调制，随后通过传递函数  $R_{56}(\tau \rightarrow s)$  转化为  $s$  处的密度调制。

为简单起见，这篇论文研究仅由三个矩形二极铁组成的对称 chicane。第一个和最后一个偶极铁的长度都是  $L_b$ ，而中间磁铁的长度是  $L_b$  的两倍。通常， $L_b$  比偶极铁之间的间距  $\Delta L$  小得多，并且此处假设没有水平聚焦。由此得到因初始密度调制导致的微聚束在不同偶极铁的 bunching parameter：

$$b[k(s_1); s_1] \approx b_0[k(s_1); s_1], \quad 0 \leq s_1 \leq L_b,$$

$$b[k(s_2); s_2] \approx b_0[k(s_2); s_2] + \int_0^{L_b} ds_1 K(s_1, s_2) b_0[k(s_1); s_1], \quad 0 \leq s_2 \leq 2L_b$$

$$b[k(s_3); s_3] \approx b_0[k(s_3); s_3]$$

$$+ \int_0^{L_b} ds_1 K(s_1, s_3) b_0[k(s_1); s_1] + \int_0^{2L_b} ds_2 K(s_2, s_3) b_0[k(s_2); s_2],$$

$$+ \int_0^{2L_b} ds_2 K(s_2, s_3) \int_0^{L_b} ds_1 K(s_1, s_2) b_0[k(s_1); s_1], \quad 0 \leq s_3 \leq L_b,$$

如果位于中间偶极铁的 induced bunching  $\int_0^{L_b} ds_1 K(s_1, s_2) b_0(k_0; s_1)$  比  $b_0(k_0; s_1)$  和  $b_0[k(s_2); s_2]$  大得多，即增益比 1 大得多，那么最后一个偶极铁的聚束主要由中间偶极铁中的 induced bunching 决定，这种情况为 two-stage amplification。然而，当同时考虑发射度和能量扩散时，增益通常不是很高；那么从第

一个和中间的偶极铁到最后一个偶极铁的 one-stage amplification 也很重要, 甚至可能主导 two-stage 过程。

在 chicane 中密度调制的最终增益  $G_f = |b(k_f; f)/b_0(k_0; 0)|$  以及在波长  $\lambda = 2\pi/k$  处的感应相对能量调制 (induced relative energy modulation)  $\Delta p[k(s); s]$  的计算结果如下:

$$G_f \approx \left| \exp \left[ -\frac{\bar{\sigma}_\delta^2}{2(1+hR_{56})^2} \right] + A\bar{I}_f \left[ \left( F_0(\bar{\sigma}_x) + \frac{1-e^{-\bar{\sigma}_x^2}}{2\bar{\sigma}_x^2} \right) \exp \left( -\frac{\bar{\sigma}_\delta^2}{2(1+hR_{56})^2} \right) + F_1(hR_{56}, \bar{\sigma}_x, \alpha_0, \phi, \bar{\sigma}_\delta) \right] + A^2 \bar{I}_f^2 F_0(\bar{\sigma}_x) F_2(hR_{56}, \bar{\sigma}_x, \alpha_0, \phi, \bar{\sigma}_\delta) \right|$$

$$\Delta p[k(s); s] \approx - \int_0^s d\tau \frac{I(\tau)}{\gamma I_A} Z[k(\tau), \tau] b[k(\tau), \tau] e^{-k_0^2 U^2(s, \tau) \sigma_{\delta^2/2}}$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{k_0^2 \varepsilon_0 \beta_0}{2} \left[ V(s, \tau) - \frac{\alpha_0}{\beta_0} W(s, \tau) \right]^2 - \frac{k_0^2 \varepsilon_0}{2\beta_0} W^2(s, \tau) \right\},$$

– 这篇论文还给出了由初始能量调制引起的微聚束情况下 bunching parameter 的结果:

$$b^p(k_f; f) = -ik_f R_{56} \Delta p(k_0; 0) \left[ \exp \left( -\frac{\bar{\sigma}_\delta^2}{2(1+hR_{56})^2} \right) + A\bar{I}_f F_2(hR_{56}, \bar{\sigma}_x, \alpha_0, \phi, \bar{\sigma}_\delta) \right]$$

- 贡献: 这篇论文证明了单级和双级放大是束团压缩电路中 CSR 微聚束的重要过程。基于偶极铁之间的间距远大于单个偶极铁长度的假设, 研究了典型的 chicane 中的聚束过程, 并导出了密度和能量调制引发的 CSR 微聚束的方程。这些结果应用于 LCLS 串式压缩器的研究, 以确定系统的稳定性。本文提出的方法和公式应可帮助束团压缩器的设计, 以达到 X 射线自由电子激光所需的具有挑战性的束团参数。

接着, 应用前面的结果来研究 LCLS 束团压缩器的稳定性, 给出了相应的数值模拟结果以说明不同放大过程, LCLS 的设计中包括两个串联的压缩器 (BC1 和 BC2)。

BC1 出口处 1 至 100 $\mu\text{m}$  波长的密度调制中的放大因子  $G_{f1}$  和感应能量调制  $\Delta p_1(k_f; f)$  的结果如下:

BC2 中对应参考文献 [?] 中研究的四种情况下密度调制  $G_{f2}$  的放大率的数值和解析结果较为一致, 如下:

## 7.4 其它

为了确定束团 (具有一些初始密度调制) 通过 BC1 和 BC2 之后的总放大因子  $G_T$ , 原则上应该将两个压缩器中的 CSR 能量踢传递到 BC2 末端的密度调制。本文章将 BC1

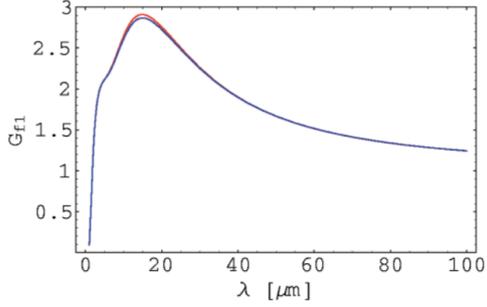


FIG. 1. (Color) BC1 gain  $G_{f1}$  of the density modulation as a function of modulation wavelength at the exit of BC1 as calculated from Eq. (38) with (in red) and without (in blue) the last term (the two-stage amplification).

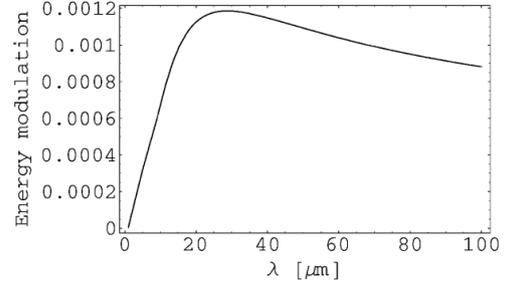


FIG. 2. Energy modulation amplitude  $|\Delta p_1(k_f; f)|$  (in units of initial bunching) as a function of modulation wavelength at the exit of BC1.

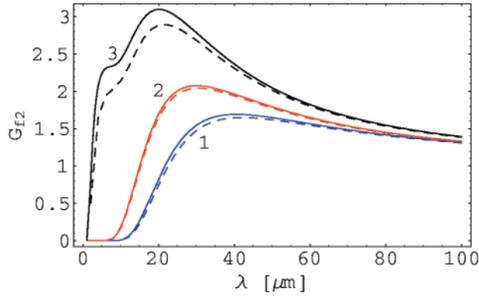


FIG. 3. (Color) BC2 gain  $G_{f2}$  of the density modulation as a function of the modulation wavelength at the entrance of BC2 for (1)  $\sigma_\delta = 3 \times 10^{-5}$ ,  $\gamma\epsilon_0 = 1 \mu\text{m}$  (in blue); (2)  $\sigma_\delta = 3 \times 10^{-5}$ ,  $\gamma\epsilon_0 = 0 \mu\text{m}$  (in red); (3)  $\sigma_\delta = 3 \times 10^{-6}$ ,  $\gamma\epsilon_0 = 1 \mu\text{m}$  (in black). Solid curves are calculated from Eq. (38) and dashed curves are numerical solutions of the integral equation found in Ref. [8].

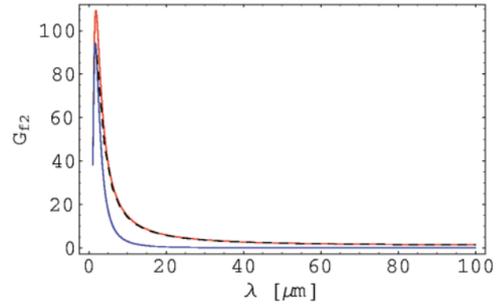


FIG. 4. (Color) BC2 gain  $G_{f2}$  of density modulation as a function of modulation wavelength at the entrance of BC2 for  $\sigma_\delta = 3 \times 10^{-6}$ ,  $\gamma\epsilon_0 = 0 \mu\text{m}$ , as calculated from Eq. (38) (in red) and the last term of Eq. (38) only (in blue). The dashed curve is the numerical solution of the integral equation found in Ref. [8].

中的 CSR energy kick 近似为 BC2 入口处的有效能量调制  $\Delta p_2(k_0; 0) = \frac{E_1}{E_2} \Delta p_1(k_f; f)$ , 并假设 BC1 的密度调制保持到 BC2 的入口来简化总放大因子的计算, 结果如下图 Fig. 5。

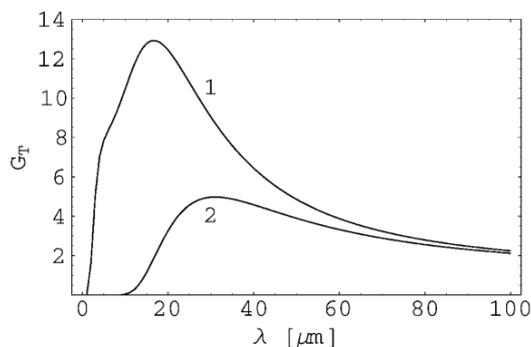


FIG. 5. Total amplification factor  $G_T$  of BC1 and BC2 as a function of the modulation wavelength at the entrance of BC2 (1) without the wiggler; (2) with the wiggler.

关于这篇论文的勘误,可参考<https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.5.129903>。

## 参考文献

- [1] S. Heifets, S. Krinsky, and G. Stupakov, SLAC Report No. SLAC-PUB-9165, 2002; Phys. Rev. ST Accel. Beams 5, 064401 (2002).

## 8 相干同步辐射引起的束团不稳定性及微聚束 [PRST-AB 5]

### Beam instability and microbunching due to coherent synchrotron radiation

#### 8.1 基本信息

- 分类: 相干同步辐射 (CSR)、微聚束 (Microbunching)
- 作者: G.Stupakov and S.Heifets (SLAC)
- 类型: 理论
- 链接: <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.5.054402>

#### 8.2 摘要

这篇文章从理论上研究了具有比束团长度更小尺度的密度涨落 (density fluctuation) 在相干同步辐射 (CSR) 影响下所引起的微波不稳定性 (microwave instability), 有时又称微束团不稳定性 (microbunching instability)。在电子储存环加速器中, 波长超过束团长度的同步辐射会因为真空室传导腔的屏蔽作用而被抑制, 而对由尺度较小 (波长较短) 的密度涨落引起的同步辐射仍然存在并且可以相干地辐射, 这些辐射反作用于束团, 导致密度涨落的生长, 从而引起束团的不稳定性。这会导致束团的微聚束和短波长下相干辐射的增加。

#### 8.3 贡献或创新点

- 创新点: 这篇论文对由同步辐射引起的束团不稳定性这一问题的处理方式与参考文献 [1] 相同, 即用分布函数  $\rho(\delta, z, s)$  通过 Vlasov 方程来描述束团内部密度的变化。考虑 CSR 尾场的作用, 该方程是非线性的, 通过微扰理论假设  $\rho = \rho_0 + \rho_1$  来对其进行线性化处理, 其中  $\rho_1 \ll \rho_0$ 。值得一提的是, 这篇论文假设了不稳定性的特征波长与束团长度相比很小。在这种情况下, 不稳定性的发展由束团的局部值决定, 所以可简化分析, 忽略束团内整体束团较大区域密度的变化。与参考文献 [1] 不同的是, 这篇论文后半还给出了这种不稳定性的阈值。
- 贡献: 基于上述理论框架, 这篇文章的后半部分给出了这种不稳定性的扰动波数  $k$ 、束团长度  $\sigma_z$  以及金属管壁半径  $b$  的阈值, 一旦超过该阈值, 不稳定性就开始

变得明显。文章给出了线性化 Vlasov 方程的解  $\hat{\rho}_1$ ，需满足色散方程：

$$\hat{\rho}_1 = \frac{icr_0 Z(k)}{\gamma(\omega + ck\eta\delta)} \frac{d\rho_0}{d\delta} \hat{n}_1,$$

或有

$$1 = \frac{ir_0 c Z(k)}{\gamma} \int \frac{d\delta (d\rho_0/d\delta)}{\omega + ck\eta\delta}.$$

阈值条件以及归一化频率  $\omega$  与波数  $k$  的函数关系图如下，满足这些条件或者频率虚部为正的束团将变得不稳定：

$$kR < 2.0\Lambda^{3/2},$$

或

$$\sigma_z \gtrsim 0.5R\Lambda^{-3/2},$$

或

$$\frac{R}{b} \lesssim \Lambda.$$

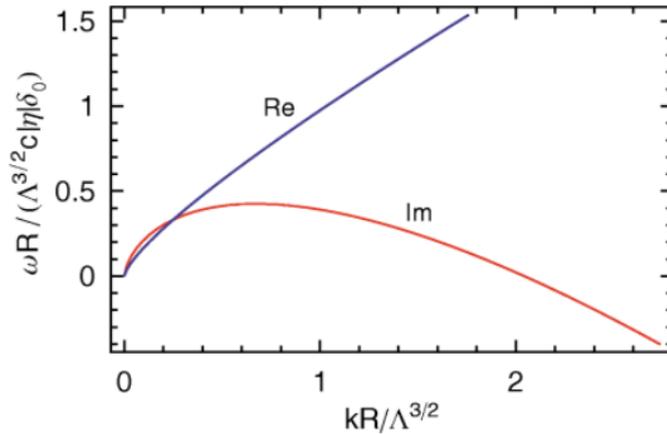


FIG. 1. (Color) The imaginary (Im) and real (Re) parts of the frequency  $\omega$  as functions of  $kR/\Lambda^{3/2}$ , for a positive value of  $\eta$ . For negative values of  $k$ , the frequency can be found from the relation  $\omega(-k) = -\omega^*(k)$  which follows from Eq. (9).

这篇文章表明，如果线性束密度  $\Lambda$  高于上述方程给出的阈值，相干同步辐射将产生束调制。不稳定性发生在波数  $k$  的范围内。小尺度波长 CSR 导致的不稳定性可以通过束团中的能散来抑制，而大尺度波长的 CSR 则因为真空室金属管壁的屏蔽效应或束团的有限长度而被抑制。另外，值得强调的是，阈值取决于均方根能量分布  $\delta_0$ ，并且能散越小的束团更容易受到不稳定性的影响。

#### 8.4 其它

注意，本文中使用的尾场函数 [该论文 Eq.(2)] 可能不适用于非常短的波长。事实上，该尾场是针对一个在横向上无限小的线束团 (thread beam) 推导出来的，并且假设

束团横截面上的所有粒子都是相干辐射的。然而，横向相干长度  $\ell_{\perp} \sim \lambda^{2/3} R^{1/3}$  随波长而减小，并且在某一点处变得小于光束的横向尺寸，对于这种情况必须使用考虑到电子束横向尺寸的尾场。

## 参考文献

- [1] Heifets, Stupakov, G. Stupakov, and S. Krinsky, Coherent synchrotron radiation instability in a bunch compressor, Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams 5.6 (2002): 064401. <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.5.064401>

## 9 紧凑储存环中的相干同步辐射和束流稳定性 [PRST-AB 8]

### Coherent synchrotron radiation and bunch stability in a compact storage ring

#### 9.1 基本信息

- 分类: 相干同步辐射 (CSR)、微聚束 (Microbunching)
- 作者: Marco Venturini, Robert Warnock and Ronald Ruth (主要机构: LBL)
- 类型: 理论、数值计算
- 链接: <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.8.014202>

#### 9.2 摘要

这篇文章研究了在小弯曲半径电子储存环中由相干同步辐射 (CSR) 引起的集体效应。基于完整的、非线性 Vlasov 方程时域积分的计算找到了仅由 CSR 引起的纵向微波不稳定性的阈值电流。该模型说明了由于真空腔的金属屏蔽而对长波长辐射的抑制。在刚刚超过阈值的计算中, 电荷分布中的小涟漪 (ripples) 在同步加速器储存环周期的一小部分内形成, 但随后消失, 产生相对平滑但与初始状态不同的分布, 最终导致束长振荡。不稳定性是由初始平滑束上的小噪声演变而来的, 其均方根长度远大于屏蔽截止值。

这篇论文回顾了单粒子运动方程和 Vlasov 方程, 接着给出了来自屏蔽 CSR 的集体尾场的假设形式。随后, 给出了频域中 coasting beam 的线性化 Vlasov 方程理论的一些数学细节, 例如, 计算中处理的第三类积分方程。最后, 这篇文章给出了非线性 Vlasov 方程的数值计算结果, 即 coasting beam 的不稳定性阈值。该数值结果与线性分析结果吻合较好, 并且还计算了 coasting beam 的非线性演化。结果展示了不稳定性的出现及其在较长时间内的“饱和”, 强调了电流分布傅里叶谱的演化。这篇文章提出的非线性纵向束流动力学计算为 CSR 成为限制因素的电子储存环提供了理论指导。

#### 9.3 贡献或创新点

- 创新点:
  - 这篇文章讨论了小弯转半径电子储存环 (粒子在中心平面内半径为  $R$  的圆上移动) 中由 CSR 引起的集体不稳定性。在由间隔为  $h$  的无限平行板组成的模

型中, 真空腔对 CSR 的屏蔽截止波长为 [1]:

$$\lambda_0 = 2h \left( \frac{h}{R} \right)^{1/2}$$

对于小弯转半径的电子储存环来说, 真空腔对 CSR 抑制的截止波长较长, 所以需考虑小波长 CSR 的作用。特别是如果束团形式存在与某种小规模结构相关的更高阶模 (即有更小尺度的微结构)。此时, 高电流下相干辐射的场足够强, 从而导致更突出的小规模结构, 那么, 束团形式可能会出现指数级的累积, 并最终发生大规模变化。这些高阶模的阻抗可以由下图表示:

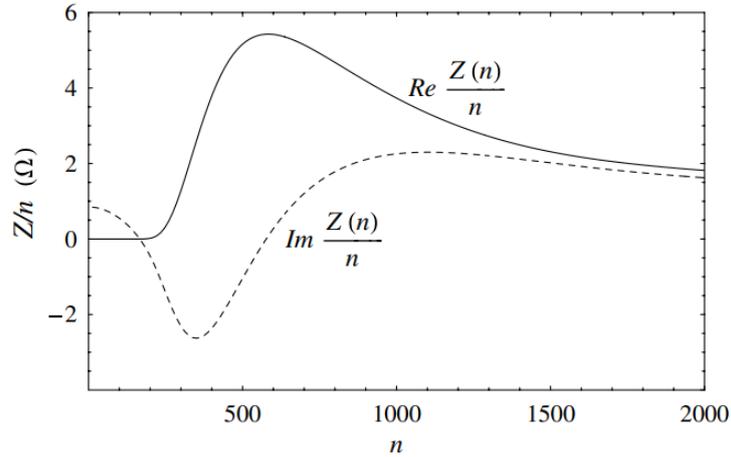


FIG. 1. Real (solid line) and imaginary (dashed line) part of  $Z(n)/n$  for the parallel plate model with  $h = 1$  cm,  $R = 25$  cm, and energy  $E_0 = 25$  MeV.

在低能量下,  $\text{Im } Z(n)$  有一个显著的空间电荷贡献, 在本文的例子中, 它足够大, 足以引起明显的势阱畸变和束团缩短。这篇文章采用 Vlasov 方程来描述上述集体效应, 但值得一提的是, 与参考文献 [2, 3] 不同的是, 储存环中还额外包含一项来自于 RF 腔的聚焦项  $-\frac{\partial f}{\partial p}q$ , 该项在后续线性分析中被忽略。

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + p \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial p} [q + I_c F(q, f, \tau)] = 0$$

其中,  $q = \frac{z}{\sigma_z}$ ,  $p = -\text{sgn}(\eta) \frac{E-E_0}{\sigma_E}$  为本文选择的动力学变量且  $\frac{dp}{d\tau} = -aq$ ,  $\frac{dq}{d\tau} = \frac{p}{a}$ ,  $\tau = \omega_s t$ ,  $I_c F(q, f, \tau)$  为集体效应项, 此处按低电流束团条件, 有  $a = 1$ 。接下来, 通过微扰  $f = f_0 + f_1$ , 对 Vlasov 方程进行线性化处理, 并通过 Boussard 标准有效性的条件 [4]  $F(q, f_0(\cdot, \tau)) = 0$  和 coasting beam 的假设, 最终可以得到解析的结果, 并给出阈值电流约为  $I_c = 0.8183 \text{ pC/V}$  (对应  $n = 702$ )。

- 该文献的另一个创新点在于利用 Boussard 标准有效性的条件中的声明, 即 bunched beam 和 coasting beam (电流等于 bunched beam 的峰值电流) 应表现出类似的不稳定性阈值, 前提是不稳定模式的波长与束长相比较小, 将线性

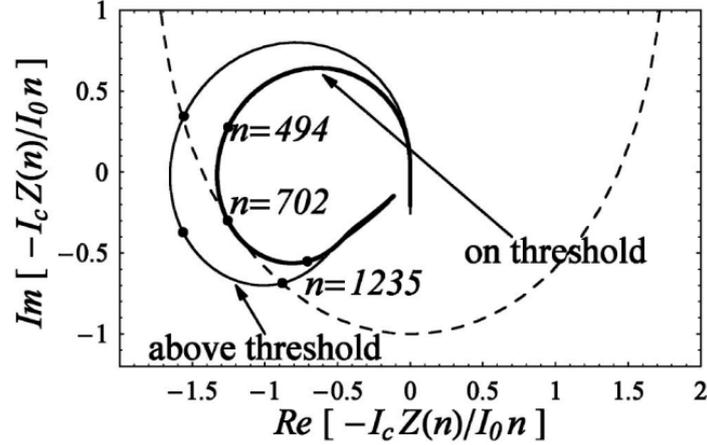


FIG. 2. Keil-Schnell stability diagram. The dashed line defines the onion-shaped stability boundary characteristic of an unperturbed distribution that is Gaussian in momentum. The solid lines represent  $-I_c Z(n)/I_0 n$  with  $I_c$  equal to the critical value  $I_c^{\text{th}} = 0.8183$  ( $Q = 7.1$  nC) for instability (thicker line) and  $I_c = 1.018$  (thinner line).  $I_0 = \sqrt{2\pi}\sigma_q(\sigma_z/R)^2/\omega_0$ .

Vlasov 方程下，coasting beam 最不稳定的模式数  $n$  延展到了 bunched beam 的情况，最终，阈值电流的数值结果仅相差 6%，这也同时印证了 Boussard 标准有效性的条件。

注意，在 bunched beam 情况下，由于所考虑的束能量相对较低，阻抗模型中的空间电荷分量导致了一个小但明显的势阱畸变 (potential well distortion, PWD)。为保证分析不受影响，以及方便计算，这里假设  $f_0$  为 Haissinski 分布并作为 Vlasov 的平衡解以考虑该畸变。

- 贡献：这篇文章关注 CSR 的动力学效应，并试图开发一个简化但希望仍然足够精确的模型来研究不稳定性。通过寻找二维 Vlasov 方程的数值解来研究纵向束流动力学，同时关注紧凑储存环的具体情况。然而，最终所获得的结果的一些方面被认为也适用于更传统的储存环。

该文章的数值研究的主要结果 (数值结果为非线性 Vlasov 方程下的结果) 可以总结为：

1. 不稳定性的电流阈值非常接近于 coasting beam 线性理论预测的值 (确认了 Boussard 标准的有效性，精度为 6%)
2. 出现阈值以上的“微聚束”(即束密度分布上的电荷密度调制) 作为不稳定性的标志，以及
3. 不稳定性的快速饱和 (在两个同步加速器周期内) 和束密度的饱和后平滑。

随着时间的推移，尽管 bunched beam 和 coasting beam 的行为在某些方面有所不同。但它们有一个共同的特点，即非线性导致了在不稳定性开始后看到的许多短尺度密度扰动的松弛，即达到饱和。这一过程发展迅速，在一到两个同步加速器周期内发生。

Bunched beam 和 coasting beam 的数值结果如下图 Fig. 4 与 Fig. 7。

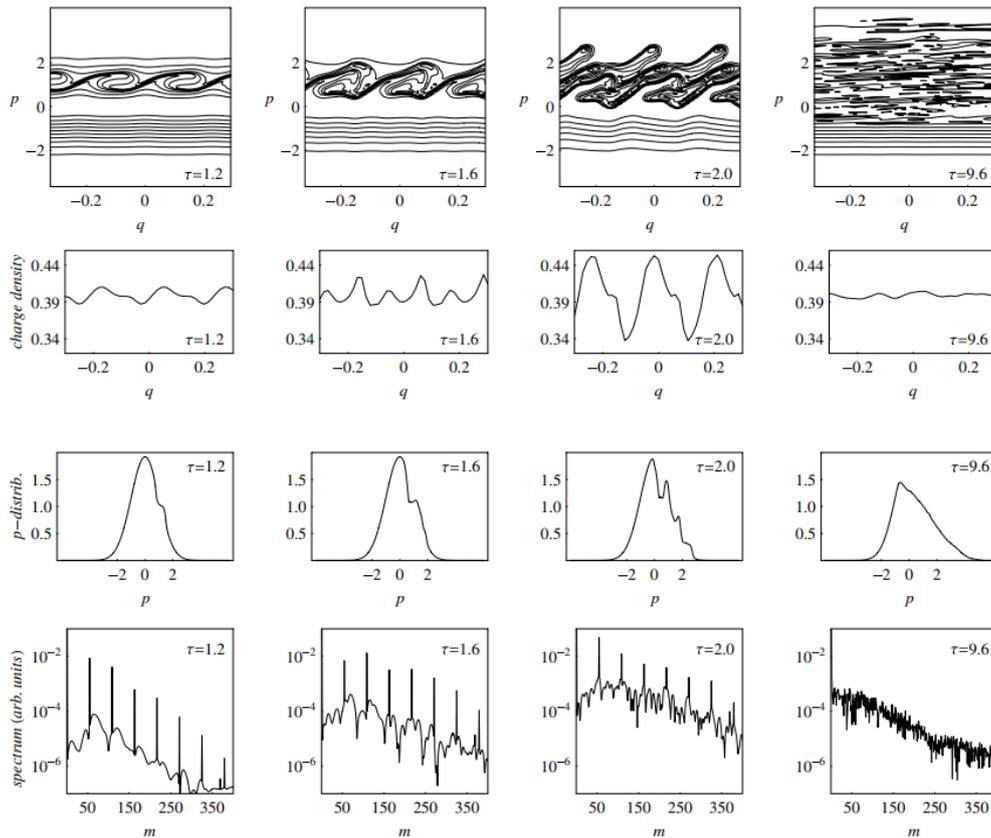


FIG. 4. Evolution in time of coasting beam by effect of CSR. Instability initiated by a small perturbation with mode number  $n = 702$  (wavelength  $\lambda = 2.2$  mm). From top to bottom: snapshots of contour plots of phase space density (top row), charge density (second row), momentum distribution (third row), and spectrum of charge density (bottom row). Pictures are taken at (normalized) time  $\tau = 1.2, 1.6, 2.0,$  and  $9.6$ . In the bottom row the abscissa is  $m = n/13$ , where  $n$  is the mode number (see text). The plots in the top two rows show only a small part of the full grid in  $q$ .

## 9.4 其它

这篇论文的讨论中并没有包含辐射阻尼，超过阈值的 CSR 驱动的不稳定性将导致持续的 (可能不可接受的) 发射度增加。值得强调的是，微聚束结构最终的饱和平滑，是在没有耗散力的作用下发生的结果。这篇论文计算电压时，假设当前电荷分布一直存在，没有适当处理束团扭曲情况下的推迟效应。

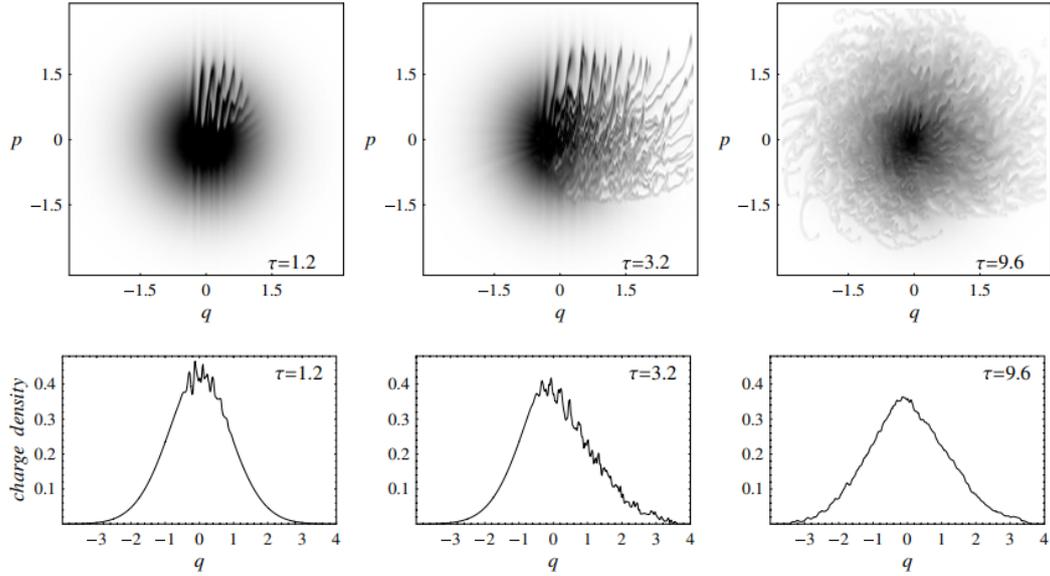


FIG. 7. Time evolution of bunch under effect of CSR. Density plots in phase space (top row) and charge density (second row). Pictures are taken at (normalized) time  $\tau = 1.2, 3.2,$  and  $9.6$ . Instability initiated by a small perturbation with mode number  $n = 702$  (wavelength  $\lambda = 2.2$  mm). A unit of  $q$  corresponds to 1 cm.

## 参考文献

- [1] R. Warnock and P. Morton, Fields excited by a beam in a smooth toroidal chamber, Part. Accel. 25, 113 (1990). <https://s3.cern.ch/inspire-prod-files-1/1ea32227de65e71784fa96f11db3a6ba>
- [2] G. Stupakov, and S. Heifets, Beam instability and microbunching due to coherent synchrotron radiation, Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams 5.5 (2002): 054402. <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.5.054402>
- [3] S. Heifets, G. Stupakov, and S. Krinsky, Coherent synchrotron radiation instability in a bunch compressor, Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams 5.6 (2002): 064401. <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.5.064401>
- [4] D. Boussard, Observation of microwave longitudinal instabilities in the CPS, CERN Report No. CERN LABII/RF/INT/75-2, 1975. <https://cds.cern.ch/record/872559/files/cer-002556319.pdf>

## 10 电子储存环中微波不稳定性的线性理论 [PRST-AB 14]

### Linear theory of microwave instability in electron storage rings

#### 10.1 基本信息

- 分类: 微波不稳定性
- 作者: Yunhai Cai (SLAC)
- 类型: 理论
- 链接: <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.14.061002>

#### 10.2 摘要

Haissinski 分布提供了电子储存环中低于阈值电流的稳态平衡纵向束分布。然而, 在理论上还没有一个严格的方法来准确地确定 Haissinski 分布变得不稳定的阈值。这篇文章展示了如何应用拉盖尔多项式 (Laguerre polynomials) 来分析 potential-well distortion (PWD) 相关的稳定性, 这提供了 Oide 和 Yokoya 提出的离散化方法 [1] 的替代方案。此外, 这篇论文重新建立了与 Sacherer 提出的模式耦合理论的重要联系。新的自洽方法被应用于研究由已知阻抗驱动微波不稳定性的, 包括自由空间中的相干同步辐射。

#### 10.3 贡献或创新点

- 创新点:
  - 这篇文章首先以 Vlasov-Fokker-Planck(VFP) 方程描述束流的纵向动力学, 一般来说, 电子也经历了由 bunch distribution 导致  $\lambda(q, \theta)$  的集体力。通过尾场的概念, 动力学过程可以由哈密顿量表示:

$$H = \frac{1}{2} (q^2 + p^2) - I_n \int_{-\infty}^q dq'' \int_{-\infty}^{\infty} dq' W(q'' - q') \lambda(q', \theta)$$

其中,  $q = z/\sigma_z, p = -\delta/\sigma_\delta$  为归一化坐标,  $I_n = \frac{r_e N_b}{2\pi\nu_s \gamma \sigma_\delta}$  为归一化电流,  $I_b = \eta \gamma \sigma_\delta^2 I_A \left( \frac{I_n}{\sigma_z} \right)$  为束电流,  $I_A = ec/r_e = 17045$  A 为 Alfvén current。束密度分布函数  $\Psi(q, p; \theta)$  满足的 VFP 函数为:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} - \{H, \Psi\}_{PB} = 2\beta \frac{\partial}{\partial p} \left( p\Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial p} \right).$$

为考虑由 bunch distribution 引起的 PWD，引入了 Haissinski 分布以作为上述 VFP 方程的静态解，并假设该分部附近的小扰动以获得线性化的 Vlasov 方程 (LV 方程):

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta} + \left( \frac{\partial \Psi_1}{\partial \phi} - \frac{\partial H_1}{\partial \phi} \frac{d\Psi_0}{dH_0} \right) \frac{\omega(J)}{\omega_s} = 0.$$

其中， $J, \phi$  为作用-角度变量，由  $q, p$  的正则变换得到。

- 这篇文章的另一个创新点为，使用傅里叶展开将上述的 LV 方程简化为了积分方程 [2]，以及对积分方程的处理方式。积分方程如下：

$$\left( \frac{\Omega}{\omega(J)} - l \right) R_l(J) = W(H_0) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dJ' G_{l,m}(J, J') R_m(J'),$$

其中，kernel 在通过引入阻抗  $Z(\omega)$  后，以及利用周期性条件和阻抗的性质可以写为：

$$G_{l,m}(K, K') = \frac{-l I_n c}{\sigma_z} \text{Im} \left[ 2 \int_0^{\infty} d\omega \frac{Z(\omega)}{\omega} \times h_l \left( \frac{\omega \sigma_z}{c}, K \right) h_m^* \left( \frac{\omega \sigma_z}{c}, K' \right) \right].$$

该文章利用正交多项式展开 (orthogonal polynomial expansion) 的方法，使用了拉盖尔多项式，并利用多项式的正交条件，将积分方程转换为无限个线性方程组：

$$\frac{\Omega}{\omega_s} a_\alpha^l = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{\infty} M_{l,m}^{\alpha,\beta} a_\beta^m.$$

很明显，矩阵  $M$  的特征值给了我们  $\frac{\Omega}{\omega_s}$ ，最终问题变为求解本征方程。注意，矩阵  $M$  包含两部分，有描述 PWD 产生的非相干 tune shift 导致的相同方位角模 (azimuthal mode) 和径向模 (radial modes) 直接耦合的  $O$ ，以及另一个矩阵  $N$ 。

- 贡献：这篇文章应用新方法研究了 SLC 阻尼环的纵向失稳；其发现了三种不同方法的良好一致性：拉盖尔多项式 (即本文章提出的方法)、离散化 (Oide 和 Yokoya 提出的方法 [1])、VFP 方程的数值模拟。该文章的结果也与阈值的已知结果一致。此外，在阈值以上约两倍时，线性理论产生了主导的 sextupole 模式，这在测量中观察到，但在 VFP 的模拟中没有观察到。这意味着，线性理论为 SLC 阻尼环的纵向动力学提供了更多的见解。相关结果如下图 Fig. 4。

该文章利用该方法计算的另一个例子是，自由空间中 CSR 引起的纵向不稳定性阈值，在该例子中，Vlasov 理论可以用维度参数  $\xi = I_n \rho / \sigma_z^{4/3}$  来表征。这种不稳定性是由高斯模型预测的两个径向模式而非方位角模式的耦合引起的。径向模式的

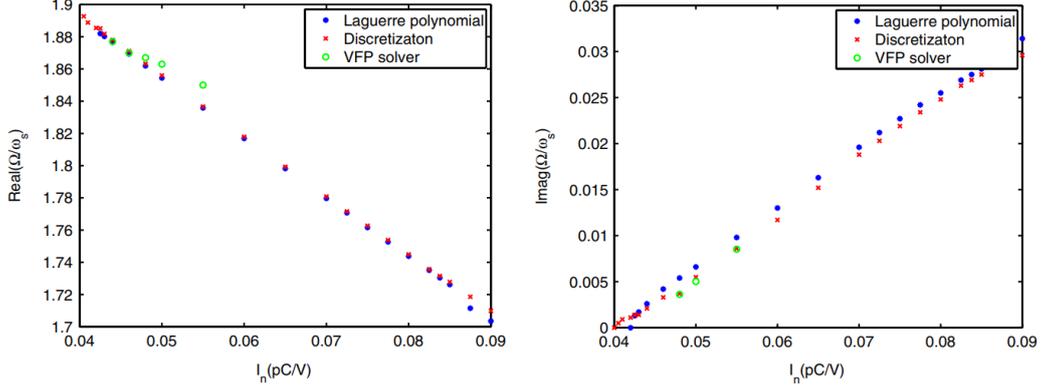


FIG. 4. Tune shift (left) and growth rate (right) of the most unstable mode in the SLC damping ring.

耦合产生比方位角模式耦合慢得多的增长率，因此使得实验上更难观察到。计算的阈值  $\xi^{\text{th}} = 0.50$  与 VFP 模拟结果非常一致。但是，离散化方法给出的阈值要低得多，这受限于计算机的算力。相关结果如下图 Fig. 6。

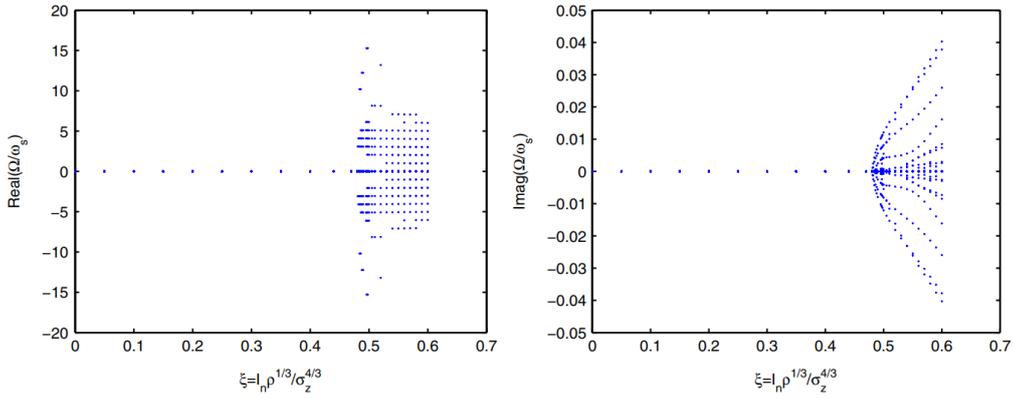


FIG. 6. Real parts (left) and imaginary parts (right) of all unstable modes driven by CSR in free space. Each dot represents an unstable mode.

## 10.4 其它

在许多情况下，由于数值噪声或非相干谱，阈值的计算总是存在不确定性。尽管我们在线性理论上有所改进，但微波不稳定性的全面完整的理论仍在探索中。

## 参考文献

- [1] K. Oide and K. Yokoya, Longitudinal single-bunch instability in electron storage rings, KEK Report No. 90-10, 1990. <https://cds.cern.ch/record/208816/files/kek-preprint-90-10.pdf>

- [2] F. Sacherer, A longitudinal stability criterion for bunched beams, IEEE Trans. Nucl. Sci. 20, 825 (1973) <https://cds.cern.ch/record/322639/files/cer-000245868.pdf>; F. Sacherer, Bunch lengthening and microwave instability, IEEE Trans. Nucl. Sci. 24, 1393 (1977) <https://cds.cern.ch/record/322527/files/CM-P00059342.pdf>

## 11 电子存储环中微波不稳定性的阈值研究 [PRST-AB 13]

### Threshold studies of the microwave instability in electron storage rings

#### 11.1 基本信息

- 分类: 相干同步辐射 (CSR)、微波不稳定性 (Microwave instability)
- 作者: K.L.F. Bane, Y. Cai, and G. Stupakov (主要机构: SLAC)
- 类型: 理论、模拟
- 链接: <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.13.104402>

#### 11.2 摘要

这篇文章使用 Vlasov-Fokker-Planck(VFP) 方程和线性化 Vlasov 方程研究了两种阻抗模型下的微波不稳定性阈值, 阻抗模型分别为:

1.  $Q = 1$  宽带谐振器
2. 屏蔽相干同步辐射 (shielded CSR)

通过这两种方法得到的结果非常一致。另外, 还表明仅需要两个无量纲参数, 即屏蔽参数  $\Pi$  和强度参数  $S_{csr}$ , 就可描述屏蔽 CSR 情况下的系统。这篇文章还进一步表明存在与 CSR 相关的强不稳定性, 并且不稳定性的阈值可以较好近似地由  $(S_{csr})_{th} = 0.5 + 0.12\Pi$  给出。

除此之外, 这篇文章还在  $\Pi = 0.7$  附近发现了另一个具有较低阈值  $(S_{csr})_{th} \approx 0.2$  的不稳定性。这种不稳定性具有两个弱不稳定性的特征, 其阈值与阻尼时间密切相关,  $(S_{csr})_{th} \sim \tau_p^{-1/2}$ , 并且阈值处的 tune spread 范围很小。

#### 11.3 贡献或创新点

- 创新点: 分别通过 VFP 和线性 Vlasov 方程分析了两种阻抗模型下的微波不稳定性, 一个是描述储存环阻抗的  $Q = 1$  谐振器模型, 另一个是屏蔽 CSR 的阻抗模型。这篇文章不仅比较了两种代码的结果, 还改变了与纵向同步辐射阻尼时间相关的阻尼参数  $\beta = 1/\omega_s\tau_d$  以分析不稳定性的类型。

- 贡献:

- VFP 和线性 Vlasov 方程分别应用于两种阻抗模型的结果一致，特别是，对于屏蔽 CSR 来说，仅需要两个无量纲的参数，即屏蔽参数  $\Pi$  和强度参数  $S_{CSR}$ ，来描述系统。模拟的结果表明，CSR 存在一种不稳定性并且对同步辐射阻尼时间  $\tau_d$  并不敏感，这意味着该不稳定性是一种强不稳定性，相关结果见下图。

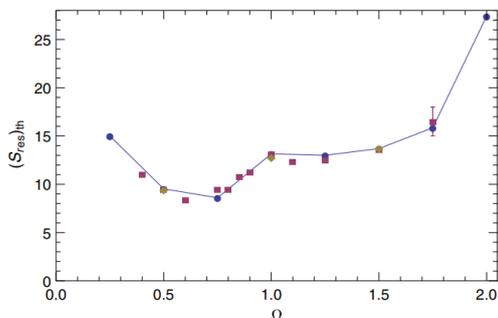


FIG. 1. For the  $Q = 1$  resonator wake, threshold value of  $S_{res}$  vs parameter  $\Omega$ . Symbols give results of the VFP solver (blue circles), the LV code (red squares), and the VFP solver with twice the damping parameter:  $\beta = 2.5 \times 10^{-3}$  (olive diamonds).

(a)  $Q = 1$  resonator

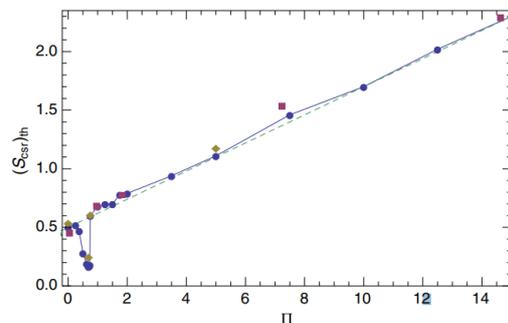


FIG. 3. For the CSR wake, threshold value of  $S_{CSR}$  vs shielding parameter,  $\Pi = \rho^{1/2} \sigma_{z0} / h^{3/2}$ . Symbols give results of the VFP solver (blue circles), the LV code (red squares), and the VFP solver with twice stronger radiation damping (olive diamonds).

(b) CSR wake

不稳定性的阈值可以较好近似地由  $(S_{CSR})_{th} = 0.5 + 0.12\Pi$  给出，对于  $\Pi \lesssim 2$ ，屏蔽效应对稳定束团的作用很小，而对于较大的  $\Pi$  来说，屏蔽效应能有效稳定束团。

- 除此之外，对于屏蔽 CSR，在约位于  $\Pi = 0.7$  处还存在一个弱不稳定性，此时阈值下降为  $(S_{CSR})_{th} \approx 0.2$ 。已经通过 VFP 方程模拟证明这种不稳定性的阈值对同步辐射阻尼时间  $\tau_d$  敏感，并且阈值处的 tune spread 很小，这些都表明这种不稳定性是弱不稳定性。模拟的结果还表现出，弱不稳定性与强不稳定性之间还存在一段稳定区域。模拟的结果见下图。

## 11.4 其它

需要注意的是，从线性 Vlasov 方程的结果中无法识别出屏蔽 CSR 情况中的弱不稳定性。该原因主要在于，LV 方程中不包含阻尼项，无法体现弱不稳定性对阻尼时间的敏感性。

## 参考文献

- [1] K. Oide, A mechanism of longitudinal single-bunch instability in storage rings, Part. Accel., 1994, 51(KEK-Preprint-94-138): 43-52. <https://cds.cern.ch/record/>

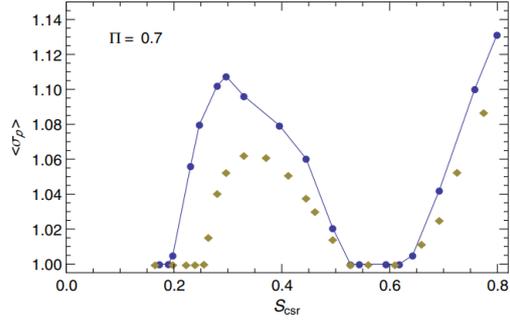


FIG. 5. For shielded CSR with  $\Pi = 0.7$ , the value of  $\sigma_p$ , averaged over 400 synchrotron periods,  $\langle \sigma_p \rangle$ , as given by the VFP simulations. The case of nominal damping  $\beta = 1.25 \times 10^{-3}$  is given by blue circles (connected by straight lines), the case of  $\beta = 2.5 \times 10^{-3}$  by olive diamonds.

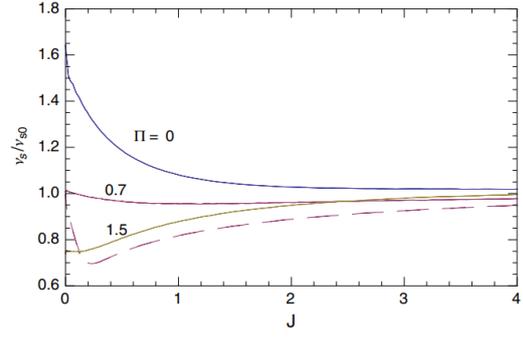


FIG. 7. Shielded CSR: incoherent tune at threshold due to the distorted potential well, as a function of action,  $J$ , for cases  $\Pi = 0, 0.7$ , and  $1.5$ . The dashed curve is explained in the text below.

276015/files/p43.pdf

## 12 单模相干同步辐射不稳定性 [PRST-AB 6]

### Single-mode coherent synchrotron radiation instability

#### 12.1 基本信息

- 分类: 相干同步辐射 (CSR)、微波不稳定性 (Microwave instability)
- 作者: S.Heifets and G.Stupakov (主要机构: SLAC)
- 类型: 理论
- 链接: <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.6.064401>

#### 12.2 摘要

这篇文章研究了单同步模 (single synchronous mode) 驱动下的 CSR 不稳定性, 导出了束波相互作用 (beam-wave interaction) 的方程组, 并证明了其与一维自由电子激光理论的相似性。在线性近似下, 获得了不稳定性的增长率, 并讨论了向连续谱情况的过渡。还研究了单模不稳定性的非线性演化, 包括同步辐射阻尼和量子扩散 (quantum diffusion)。

#### 12.3 贡献或创新点

- 创新点: 该论文作者先前工作 [1] 中已经研究了由 CSR 驱动的微波稳定性, 但该结果是在忽略屏蔽效应的情况下获得的。实际应用中, 在不稳定性的阈值束团电流处, 不稳定性可能发生在屏蔽效应附近。这篇文章考虑最低同步模式, 即  $k_0 = \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{R}{a}}$  所对应的模式, 通过对线性 Vlasov 方程进行傅里叶变换获得了该单模的色散方程。

$$1 = \sum_n \frac{\lambda}{q - q(n, \omega + qc) + i\epsilon} \int d\delta \frac{\partial f_0 / \partial \delta}{\omega + \eta c q \delta},$$

其中, 无限小的量  $\epsilon > 0$  考虑了因果关系 (causality),  $q$  为第  $n$  个模式的波数,  $\lambda = \frac{r_e c^2}{\gamma v_g} (1 - \beta_g) \chi$  并且  $\chi$  为 loss factor。并且在  $|\Delta\Omega| \gg |\eta\omega_0\delta_0|$  条件 (cold beam approximation) 下获得了对应的增长率。

随后, 这篇文章讨论了从离散模式到连续谱的过渡。对完美导体金属管壁的环形波导中, 同步模式的频谱由离散模组成, 真空波导中谱线的宽度是无限薄的。束

团对这些模式的激发可以被认为是这些无限细线的加宽，因此它们可以通过一定的宽度来表征  $\Delta\omega_{\text{mode}}$  模式。当该宽度变得可比或超过模式之间的距离时  $\Delta\omega$ ，那么谱线就可以被认为是连续的。除此之外，这里还假设了辐射频率低于截止频率，并通过同步辐射功率谱获得了模式之间的间隔：

$$\Delta\omega \sim ck_0 \left( \frac{ck_0}{\omega} \right)^{2/3}.$$

而  $\Delta\omega_{\text{mode}}$  则可以通过  $\Delta qc = (q - q_0)c$  进行估计，约为  $\Delta\omega_{\text{mode}} \sim c\mu/(1 - \beta_g)$ 。所以，为使得辐射谱之间交叠，需满足：

$$\Lambda (\eta\delta_0)^2 \left( \frac{k}{k_0} \right)^{2/3} (ka)^2 \gtrsim 1,$$

也给出了在连续谱情况 cold beam approximation 下的增长率。

$$\left( \frac{\Gamma_{\text{inst}}}{c} \right)_{\text{cont}} = \Lambda^{1/2} \left( \frac{\eta\delta_0}{a} \right) \left( \frac{k}{k_0} \right)^{2/3}$$

这篇文章还讨论了当不稳定模式的振幅变大时的非线性情况，此时使用了完整的 Vlasov 方程。处理该方程时，假设了不稳定性的演变由波数为  $q_w$  的单模控制，并且  $q_w$  任意但接近于  $q_0$ 。最终可以得到与一维自由电子激光理论相似的方程，即该论文中的 Eqs.(29)–(31)。

最后，这篇文章还利用 Vlasov-Fokker-Planck 方程考虑了同步辐射阻尼以及量子扩散带来的影响，并对比了数值结果与解析结果。

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} + p \frac{\partial F}{\partial \zeta} + [A(\tau)e^{i\zeta} + \text{c.c.}] \frac{\partial F}{\partial p} = \Gamma \frac{\partial}{\partial p} \left( \Delta^2 \frac{\partial F}{\partial p} + pF \right),$$

其中  $\Gamma, \Delta$  为无量纲变量，并且通过量子涨落与同步辐射阻尼  $\gamma_{\text{SR}}$  以及量子扩散  $\gamma_{\text{SR}}$  进行关联。

$$\Gamma = \frac{\gamma_{\text{SR}}}{\mu}, \quad \Delta = \frac{\eta\omega_0\delta_{\text{SR}}}{\mu}.$$

- 贡献：这篇文章研究了环形波导中束团与单同步模式自洽相互作用的稳定性，给出了相互作用方程，获得了不稳定性的增长率，并将结果与具有连续谱的 CSR 不稳定性模型进行了比较。这篇文章还表明，当共振重叠时，连续谱的 CSR 不稳定性在极限中遵循单模模型，并获得了从一种状态过渡到另一种状态的条件。

然后，这篇文章导出了非线性情况的相互作用方程，假设相互作用由单个同步模式主导。对于相对较小的时间间隔，可以用方程组来描述相互作用，该方程组在适当缩放后具有不依赖于系统参数的通用形式。并注意到，该方程组类似于一维自由电子激光理论，并导致相同的束动力学。

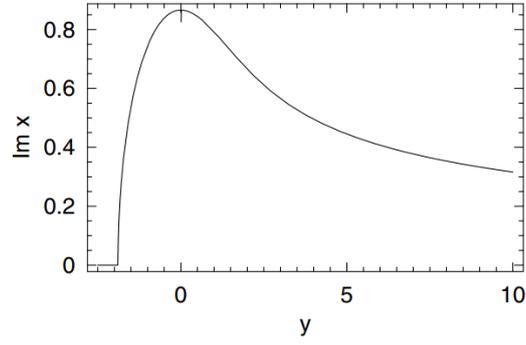


FIG. 1. Dimensionless growth rate  $\text{Im} x$  as a function of the dimensional detuning  $y$ . The maximum of  $\text{Im} x$  is reached at  $y = 0$  and approaches zero at  $y = -1.89$ ;  $\text{Im} x = 0$  for  $y < -1.89$ .

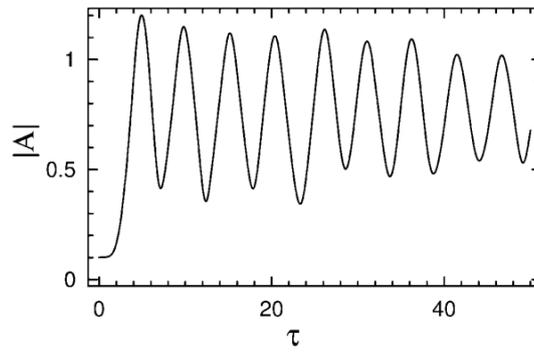


FIG. 2. The dependence of the amplitude  $|A|$  versus  $\tau$  in the nonlinear regime of the instability. After  $\tau \approx 1$ , the exponential growth of the linear regime changes to oscillations with the average amplitude  $|A| \approx 1$  and the frequency of the oscillations  $\approx 1$ .

对于储存环，人们对集体不稳定性的长期演变感兴趣，所以同步加速器辐射阻尼效应和量子扩散的影响变得重要。这篇文章使用 Vlasov-Fokker-Planck 方程来描述这些效应，在数值和分析上都表明，从长期来看，不稳定性没有饱和：模式的振幅尽管速度很慢但保持增长。这篇文章的近似解析解描述了这种渐近行为，并显示出与数值近似的良好一致性。相关结果见下图。

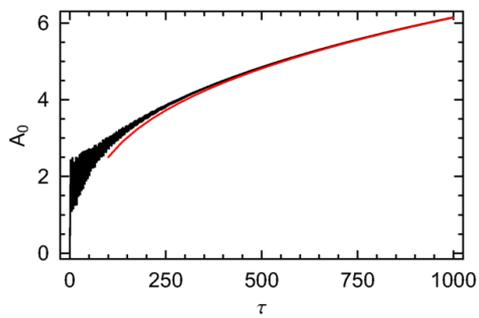


FIG. 3. (Color) The absolute value of the amplitude  $|A(\tau)|$  as a function of  $\tau$ . Black curve: result of simulation; red curve: analytical solution of Eq. (42).

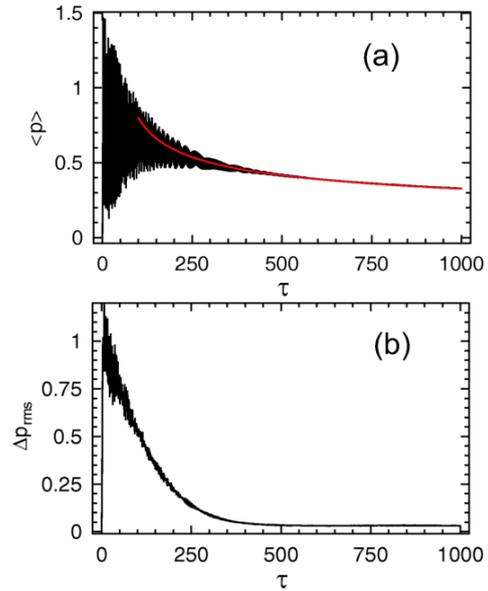


FIG. 4. (Color) Numerical simulation of the nonlinear regime of the instability: (a) the average momentum  $\langle p \rangle$ ; (b) the rms momentum spread  $\Delta p_{rms}$ . The red line shows the result of the analytical model.

## 参考文献

- [1] G. Stupakov and S. Heifets, Beam instability and microbunching due to coherent synchrotron radiation. *Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams*, 2002, 5(5): 054402. <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.5.054402>

## 13 聚束束团的单模相干同步辐射不稳定性 [PRST-AB 6]

### Single-mode coherent synchrotron radiation instability of a bunched beam

#### 13.1 基本信息

- 分类: 相干同步辐射 (CSR)、微波不稳定性 (Microwave instability)
- 作者: S.Heifets (SLAC)
- 类型: 理论
- 链接: <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.6.080701>

#### 13.2 摘要

相干同步辐射 (coherent synchrotron radiation, CSR) 不稳定性可由传输管道中激发的单模在屏蔽阈值处驱动。对于等离子体、自由电子激光理论和微波不稳定性中出现的其他单模主导问题, 此类问题可能具有普遍意义。如果稳定状态存在, 但需要研究非线性不稳定状态, 则该问题可能具有实际意义。分析和数值研究的结果以 coasting beam 近似和聚束束团 (bunched beam) 的形式给出。

#### 13.3 贡献或创新点

- 创新点: 这篇文章首先导出了描述束动力学和束团与激发电磁波相互作用的基本方程。推导该基本方程时忽略了射频场的非线性, 并假设非线性主要由束波相互作用  $V(z, t)$  主导。此处使用的无量纲变量以及相关符号如下:

$$\zeta = q_w z, \quad P = -\frac{\eta\omega_w}{\mu}\delta, \quad V(\zeta, \tau_B) = \frac{\eta\omega_W}{\mu^2}V_B(z, t),$$

$$\kappa = \left(\frac{\omega_w}{\mu}\right)(1 - \beta_g), \quad \Delta = \frac{\eta\omega_w\delta_0}{\mu}, \quad \Gamma = \frac{\gamma_{SR}}{\mu}, \quad \Omega = \frac{\omega_s}{\mu},$$

其中,  $\tau = \mu t$ ,  $\mu$  取决于束团的峰值密度,  $\omega_w$  为激发电磁波的频率, 电势  $U$  由  $dU/d\zeta = V$  定义。归一化分布函数  $F(\zeta, P, \tau)$  满足 Fokker-Planck 方程, 并且具有稳态解 (steady-state solution)。在线性近似下该 Fokker-Planck 方程简化为 Vlasov 方程, 考虑短波长微扰, 即  $\Omega/\Delta = 1/(q_w\sigma_b) \ll 1$ , 获得色散方程:

$$\nu^2[\nu + (q-1)\kappa] = -\frac{\lambda^3 q}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Omega}{\Delta}.$$

上述色散方程在  $1 \gg |q-1|\kappa \gg |\nu|/\kappa$  给出  $\nu^2 = -\frac{1}{(q-1)\kappa}$ ，即增长率在  $q = 1$  附近处达到最大。换句话说， $q = 1$  的模主导了不稳定性。 $q = 1$  时有  $\nu^3 = -\frac{\lambda^3\Omega}{\Delta\sqrt{2\pi}} = -1$ 。上述结果也表明，虽然存在稳态解，但它是不稳定的。

这篇文章还考虑线性理论所预测初始快速增长之后的非线性情况，分别分析了较短时间以及较长时间内的非线性行为。从已得到的线性理论结论出发，单模的束波相互作用可以写为  $V(\zeta, \tau) = aq_0 \sin(q_0\zeta - \nu\tau)$ ，其中波矢  $q_0 \simeq 1$ ，振幅  $a$  随时间指数增长。这篇文章假设在非线性情况下， $V(\zeta, \tau)$  保持不变具有相同形式，其中模式频率  $\nu(\tau)$  以及振幅  $a(\tau)$  都是实数，但它们都可能随着时间缓慢变化。在该假设下重写 Fokker-Planck 方程后发现，其描述了在如下电势中的粒子运动：

$$U(\zeta, \tau) = \frac{\Omega^2\zeta^2}{2} + a[1 - \cos(q_0\zeta - \nu\tau)],$$

并且该电势在  $\zeta + \frac{q_0 a}{\Omega^2} \sin(q_0\zeta - \nu\tau) = 0$  定义的点处具有最小值，即电势是一系列微势阱。参考下图 Fig. 2。

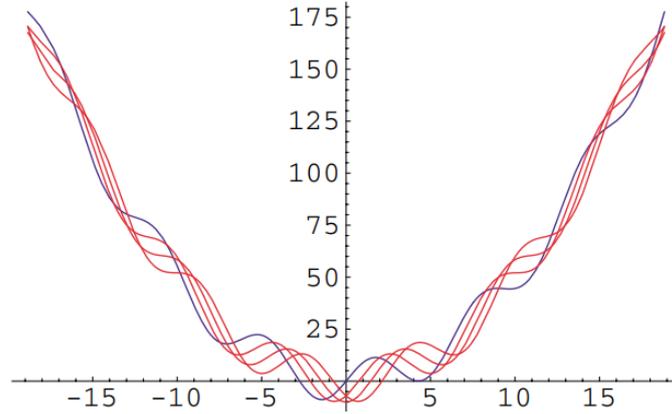


FIG. 2. (Color) The total potential  $U_{\text{tot}} = \zeta^2/2 + a \sin(\zeta - \nu\tau)$  for  $\nu\tau = (0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4)$  and  $a = 10$ . A particle trapped in the local minimum remains trapped and moves with the minimum until it reaches large  $\zeta \simeq a$ .

在较短时间内，粒子被较好的囚禁于微势阱中，而随着时间增大，粒子的同步振荡将快于和大于相互作用势振幅  $a$  的增长，此时粒子将脱离微势阱（对应  $\tau_{\text{dr}}$ ）。这些脱离微势阱的粒子并不是等间距的且具有较大能量扩散且它们与电磁波的相互作用会被朗道阻尼抑制，于是波的增长主要是源于其与被囚禁粒子的相互作用。对此情况，这篇文章通过将每个微势阱中的粒子考虑为一个微粒子给出了对应的增长率结果，即  $a(\tau) = [6(\Omega\tau)^2]^{1/3}$ ， $\nu = \frac{2}{a}$ 。不难看出，相较于 coasting beam，该情况的增长率更快。在较长时间内的结果由后续的数值模拟给出。

- 贡献：这篇文章研究了在接近屏蔽阈值的储存环中由相对较长的束团产生的微波 CSR 所影响的束动力学，并且该束动力学可以由 beam pipe 中激发的单个电磁波

模式控制。线性理论预测了强烈的不稳定性以及电磁波的产生，其振幅呈指数增长，其中增长速度大于同步频率，并试图了解这种增长是否会达到饱和状态。

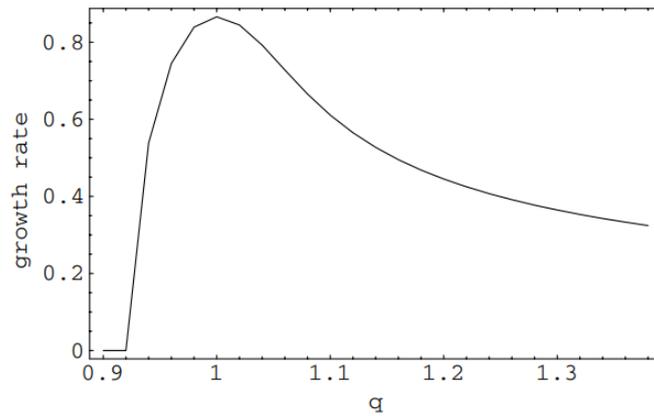


FIG. 1. The growth rate  $\text{Im}[\nu]$  as a function of the detuning for  $\kappa = 25$ .

这篇文章还表明，在非线性状态下，纵向同步运动实质上影响了不稳定性。在时间间隔  $\tau < \simeq 1$  处线性状态的初始指数增长之后，在时间间隔小于和大于漂移时间  $\tau_{\text{dr}}$  的情况下，束动力学有显著不同。在第一个间隔中，粒子被快速增长的波捕获，导致形成一系列微聚束。一些相关的数值结果如下图 Fig. 4 与 Fig. 6。

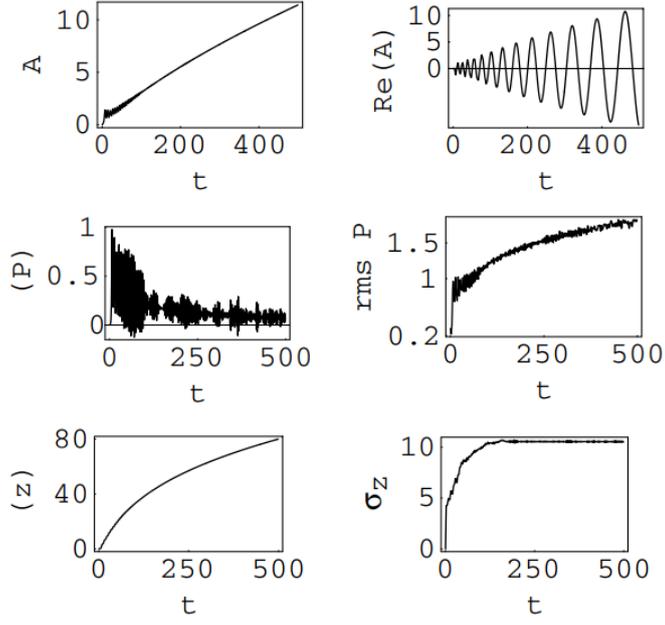


FIG. 4. Results of the tracking of 1000 particles with zero damping and detuning. Parameters:  $A(0) = 1.0E - 6$ ,  $\Delta = 0.3$ ,  $\Omega = 0.05$ . Upper row: time dependence of  $A(\tau)$  (left panel) and  $\text{Re}A(\tau)$  (right panel). Middle row: variation of the average momentum and the momentum rms with time. Bottom row: time dependence of the bunch centroid and the rms bunch length.

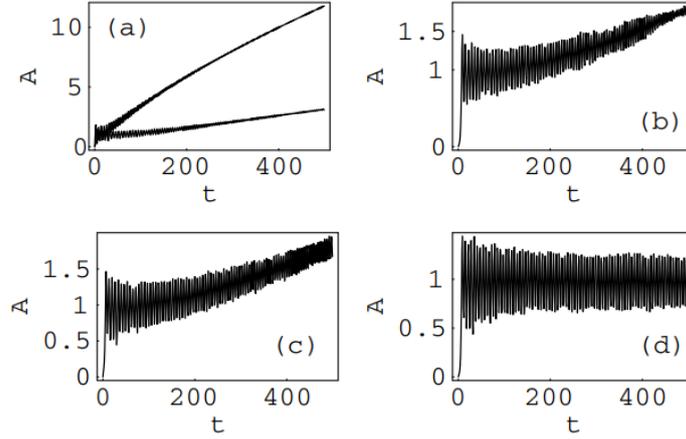


FIG. 6. Dependence of the growth rate on parameters. (a)  $\Delta = 0.03$ ,  $\Gamma = 0$ , and  $\Omega = 0.05$  (upper curve) and  $\Omega = 0.01$  (lower curve). Equation (54) predicts at  $\tau = 500$ ,  $|A| = 15.5$ , and  $|A| = 5.3$ , respectively. (b)  $\Omega = 0.005$ ,  $\Delta = 0.3$ , and  $\Gamma = 0$ . (c)  $\Omega = 0.005$ ,  $\Delta = 0.03$ , and  $\Gamma = 0$ . (d)  $\Delta = 0.03$ ,  $\Omega = 5E - 4$ , and the damping is on,  $\Gamma = 0.01$ .

对于  $\tau > \tau_{dr}$ ，大多数粒子被拉到射频电势的边缘然后被释放，并开始具有大振幅的同步振荡。因为被捕获的粒子仅在射频势阱的一个边缘不对称地释放，所以激发了束团质心的强烈振荡。释放的粒子在束密度中不形成规则的图案。束流分布的调制仅在相平面的外围可见，并且产生的波  $V$  的振幅减小。然而，残余振幅足够大，足以补偿同步辐射阻尼并支持束中的大能量扩散。

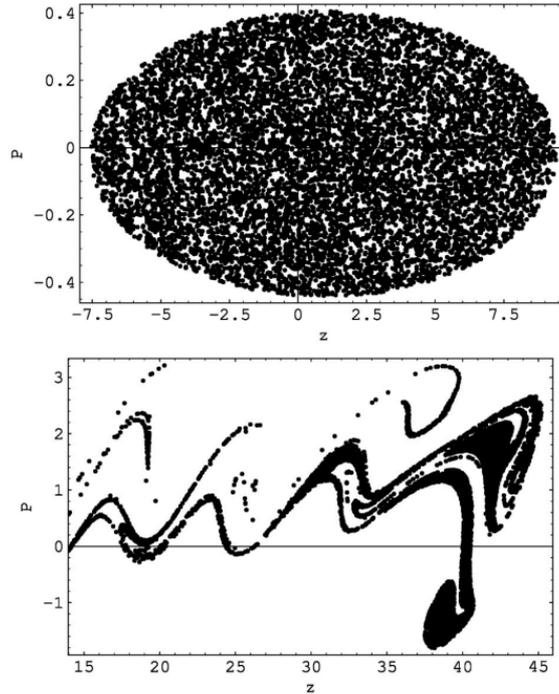
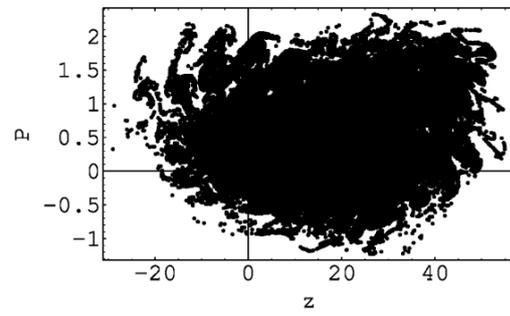
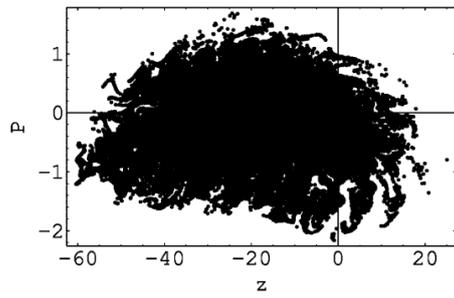
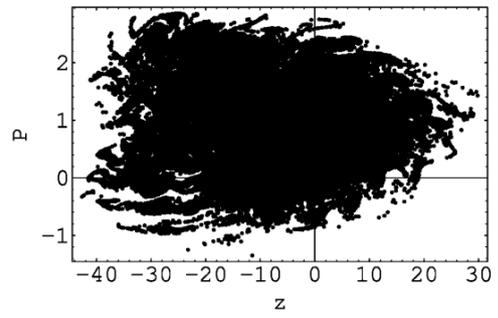
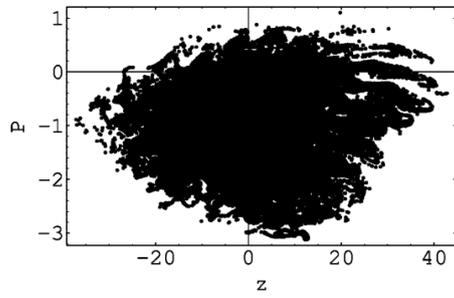


FIG. 8. The distribution of particles in the phase plane: initial,  $\tau = 0$ , (top panel) and at  $\tau = 31.5$ .

## 参考文献

- [1] Stupakov G, Heifets S. Beam instability and microbunching due to coherent synchrotron radiation. *Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams*, 2002, 5(5): 054402. <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.5.054402>
- [2] Heifets S, Stupakov G. Single-mode coherent synchrotron radiation instability. *Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams*, 2003, 6(6): 064401. <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.6.064401>



## 14 电子储存环中相干同步辐射爆涨的动力学模型 [PRL 89] Bursts of Coherent Synchrotron Radiation in Electron Storage Rings: A Dynamical Model

### 14.1 基本信息

- 分类: 相干同步辐射 (CSR)、微波不稳定性 (Microwave instability)
- 作者: M.Venturini and R.Warnock (SLAC)
- 类型: 理论
- 链接: <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.89.224802>

### 14.2 摘要

至今已经在多个光源设施的电子储存环上报道了相干同步辐射 (CSR) 的证据 [1, 2]。观测到的主要特征是:

1. 与标称束长 (nominal bunch length) 相比, 辐射的波长较短;
2. 相干信号表现出远短于辐射阻尼时间的重复爆涨 (recurrent bursts) 的显示持续时间, 但信号间隔的量级相当于阻尼时间的很大一部分。

这篇文章提出了一个纵向束动力学模型再现了上述这些特征。

### 14.3 贡献或创新点

- 创新点: 这篇文章提出了一个模型, 其中仅考虑了唯一一个来自于 CSR 的集体效应。该模型成功地解释了实验观测的主要方面: 存在用于检测 CSR 的电流阈值、相干辐射光谱峰值处的波长, 以及以短循环 (重复) 脉冲为特征的信号的时间结构, 其特征是信号间隔的时间相当于阻尼时间的很大一部分。该模型有望实现有用的应用, 例如, 在对考虑动量压缩中的非线性项进行修改之后, 该模型应有助于设计稳定 CSR 的专用源。这篇文章介绍的方法和结果将有助于分析许多其他先进的加速器或光源项目, 这些项目通常涉及来自具有极低发射度的短而强束团的有害相干辐射。

这篇文章所提出的模型基于线性 RF 聚焦的一维纵向运动标准图像, 同时还考虑了辐射阻尼以及由光子非相干辐射导致的量子涨落。在此基础上, 基于相空间分

布函数的 Vlasov-Fokker-Planck(VFP) 方程，对 CSR 和粒子动力学的非线性相互作用进行了自洽的解释。这里还假设了动量压缩因子  $\alpha \gg \frac{1}{\gamma^2}$  并且  $\gamma \gg 1$ ， $\gamma$  为洛伦兹因子

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + p \frac{\partial f}{\partial q} - [q + I_c F(q, f, \tau)] \frac{\partial f}{\partial p} = \frac{2}{\omega_s t_d} \frac{\partial}{\partial p} \left( p f + \frac{\partial f}{\partial p} \right)$$

其中， $f(q, p, \tau)$  为相空间分布函数； $q = z/\sigma_z, p = -\Delta E/\sigma_E$  为无量纲相空间变量； $\tau = \omega_s t$ ； $-I_c F(q, f, \tau)$  为由 CSR 导致的集体力。上式的左侧描述了复杂的短期动力学，等式的右侧描述了非相干辐射的长期影响，即由阻尼和量子涨落带来的扩散，其中  $t_d$  为阻尼时间。另外，这篇文章所计算的集体力基于平行板 CSR 模型，即假设真空室由无限个间隔为  $h$  的平行板表示并且完全导电。除此之外，这篇文章还忽略了粒子进入和离开弯道时的瞬态效应。

这篇文章在  $t_i \rightarrow t_i + \delta t$  对 VFP 方程进行积分时，假设束团是刚性的 (rigid)，换句话说在该时间步长期间  $\delta t$ ，束团都具有与当前时间相同的形式，并由此计算 CSR 力。这篇文章还将 VFP 方程线性化为普通 Vlasov 方程进行了分析，以获得对不稳定性的一些见解。值得注意的是，这里在不稳定性足够快的假设下，忽略了与 RF 聚焦有关的项。

- 贡献：这篇文章给出了所提出模型的数值的数值结果，简要如下。在零时刻，微结构束团中的振幅非常小，这给出了波长低于屏蔽截止波长的小傅立叶分量。在电流阈值以上，这些傅里叶分量呈指数增长，因为同步辐射的阻抗在截止波长以下非常大，所以会有一个相应的辐射暴涨，但它的持续时间受到相空间分布快速平滑 (quick smoothing) 的限制。自洽多粒子动力学的内在非线性阻止了持续的指数增长，这也有助于通过快速生成相对较大的傅立叶模式频谱来平滑相空间。在一两个同步加速器周期内，微结构几乎消失，总束长增加，相干辐射暴涨结束。接下来，来自非相干辐射的辐射阻尼和扩散逐渐减少束长和能散，在比阻尼时间略短的时间后恢复不稳定和另一次暴涨的条件。

#### 14.4 其它

尽管这篇文章中对 VFP 方程的线性化分析本质上与 S. Heifets 和 G. Stupakov 在文献 [3] 中的处理方法相同，但这里使用的阻抗是相对于自由空间的平行板模型 [详见文章中的 Eq.(2)]。因此，只有当计算出的不稳定性波长低于屏蔽截止波长时，该结果才有意义。

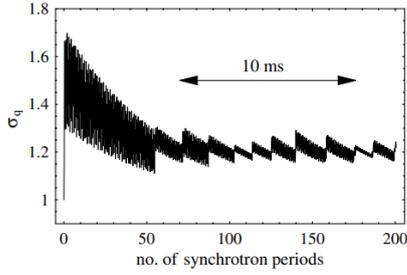


FIG. 2. Bunch length vs time,  $I_c = 12.5$  pC/V.

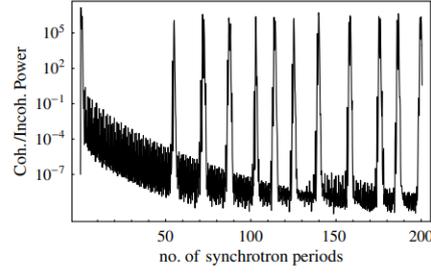


FIG. 3. Coherent over incoherent power,  $I_c = 12.53$  C/V.

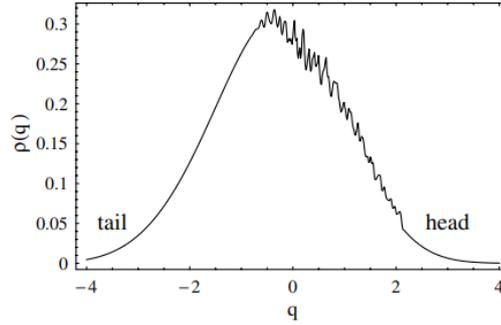


FIG. 4. Bunch density with “microbunching,”  $I_c = 12.5$  pC/V.

## 参考文献

- [1] Andersson A., Johnson M.S., Nelander B., Coherent synchrotron radiation in the far-infrared from a 1 mm electron bunch, *Optical Engineering*, 2000, 39(12): 3099-3105. <https://www.spiedigitallibrary.org/journals/Optical-Engineering/volume-39/issue-12/0000/Coherent-synchrotron-radiation-in-the-far-infrared-from-a-1/10.1117/1.1327498.short?SS0=1>
- [2] Arp U., Fraser G.T., Walker A.R.H. et al., Spontaneous coherent microwave emission and the sawtooth instability in a compact storage ring. *Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams*, 2001, 4(5): 054401. <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.4.054401>
- [3] Stupakov G., Heifets S., Beam instability and microbunching due to coherent synchrotron radiation, *Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams*, 2002, 5(5): 054402. <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.5.054402>

## 15 储存环中的微聚束不稳定性: 相空间结构与太赫兹相干同步辐射射频光谱之间的联系 [PRST-AB 17]

**Microbunching instability in storage rings: Link between phase-space structure and terahertz coherent synchrotron radiation radio-frequency spectra**

### 15.1 基本信息

- 分类: 相干同步辐射 (CSR)、微波不稳定性 (Microwave instability)
- 作者: E.Roussel, C.Evain, C.Szwaj, and S.Bielawski (主要机构: Universite des Sciences et Technologies de Lille, 里尔一大, 法国)
- 类型: 理论
- 链接: <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.17.010701>

### 15.2 摘要

当在储存环中的电子束的电子数量超过阈值时, 电子束会自发地形成微结构, 对这些微结构及其演变的实验观察是间接获得的。在实践中, 大多数信息是从太赫兹相干辐射 (THz CSR) 中获得的, 这主要因为毫米范围内的微结构辐射出 THz CSR。在这篇文章中表明, 由于与数值模拟相关的简单分析公式, 人们可以从 THz CSR 信号中的频率分量在微聚束不稳定性期间获得关于电子束纵向相空间结构的信息。这篇文章所提出的公式还允许将一些实验信息联系在一起, 特别是束长和 THz CSR 频谱。

### 15.3 贡献或创新点

- 创新点: 这篇文章表明, 在储存环中, 电子束辐射出的相干太赫兹信号中, 射频 (rf) 域中频率分量的存在提供了关于微聚束不稳定性期间电子束的 2D 相空间结构的精确信息。在几个储存环 (BESSY-II [1]、MLS [2]、SOLEIL [3]、ANKA [4] 和 DIAMOND [5]) 中都观察到了这种频率分量  $f_m$  ( $m$  表示微观结构)。这是一种对束团中微结构 (甚至更小结构) 存在的方便诊断方法, 并且可以用于精确观察微聚束不稳定性的阈值。

这篇文献的另一个重要的创新点在于，不仅给出了相空间中的角度与 THz 信号的频率调制  $f_m$  之间的联系，还给出了束长、THz CSR 频谱和  $f_m$  之间的联系。假设周期  $T_m = 1/f_m$  为旋转相空间两个分支 (branches) 之间的角度  $\phi$  所需的时间，并且由于同步电子的角速度为  $\omega_s = 2\pi f_s$ ，这意味着有：

$$\phi = \frac{2\pi f_s}{f_m}$$

除此之外，通过下图 Figs. 3-4，还可以粗略的给出束长、THz CSR 频谱和  $f_m$  之间的联系，即  $\phi \simeq \lambda_{\text{CSR peak}} / \sigma_z \Rightarrow f_m \lambda_{\text{CSR peak}} \simeq 2\pi f_s \sigma_z$ 。

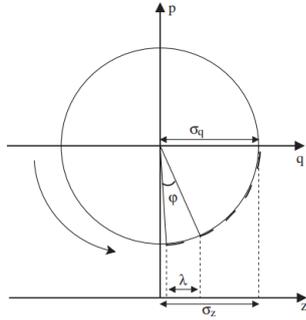


FIG. 3. Schematic representation of an electron-bunch phase space with a modulation located at a distance  $\sigma_q$  from the bunch center. The distance  $\lambda$  is associated to the projection on the horizontal axis (in unit of meters) of the arclength corresponding to one modulation period of the phase space. The distance  $\lambda$  is generally associated to a coherent emission, and thus can be measured experimentally.

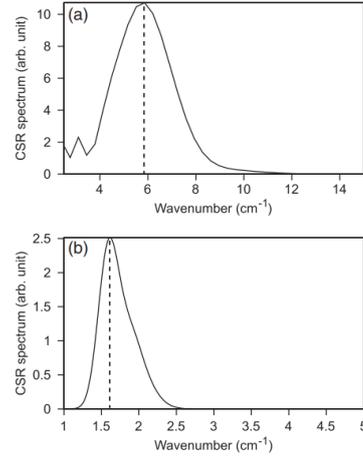
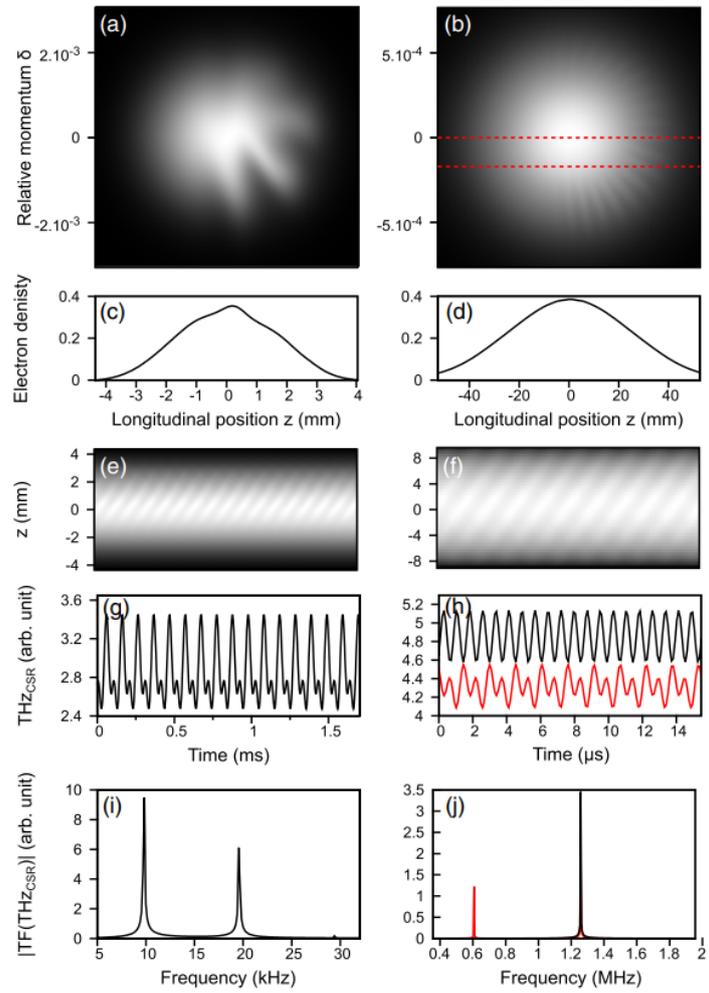


FIG. 4. Average THz CSR spectrum ( $P_{\text{CSR}}(\nu, \tau)$ ) in the case of (a) SOLEIL and (b) UVSOR-II. Vertical lines indicate  $\lambda_{\text{CSR peak}}$  (same parameters as in Fig. 1).

- 贡献：这篇文章使用了两个特殊例子来验证工作的有效性，即 SOLEIL 以及 UVSOR-II。THz 信号在射频域中的调制源于二维纵向相空间中微观结构的演变。如下图 Fig. 1 所示，相空间中微观结构的存在引起纵向分布  $\rho(z, t)$  的调制，随着时间推移，这种调制会沿着纵向坐标漂移，这是因为相空间分布会随着时间推移而旋转。这种旋转的行为加上连续出现在相空间底部的微观结构，最终导致 THz CSR 信号的调制。

这篇文章还表明，太赫兹信号中的频率分量  $f_m$  与形成电子束分布图案的分支 (branches) 间的角度直接相关。该角度在文章中通过一个简单的公式计算获得  $\phi = \frac{2\pi f_s}{f_m}$ ，并且将相关的结果与通过使用 CSR 尾场对 VFP 方程进行数值积分获得的相空间分布进行了比较。此外，由所推导出的简单公式，可以以相当高的精度将有关束长、THz CSR 频谱和  $f_m$  的信息联系起来，即  $f_m \lambda_{\text{CSR peak}} \simeq 2\pi f_s \sigma_z$ 。这使得可以在不知道  $f_m$  值的情况下，从实验或模拟中估计  $f_m$ 。



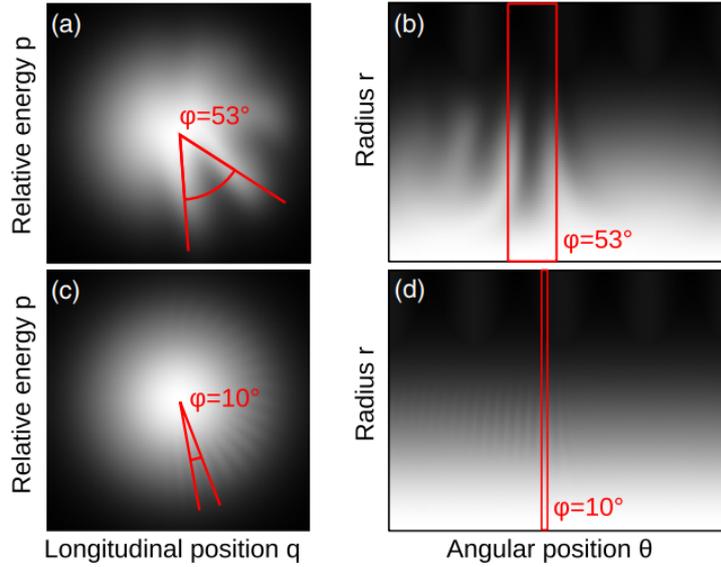


FIG. 2 (color online). Angle  $\varphi$  calculated from the Eq. (6) (in red) superposed to the numerical phase space (in grey scale). (a) and (b) SOLEIL case and (c) and (d) UVSOR II case. (a) and (c) Cartesian  $(q, p)$  coordinates and (b) and (d) polar  $(r, \theta)$  coordinates (same parameters as Fig. 1).

## 15.4 其它

注意，这篇文献在计算 CSR 尾场时所做的简化，即这里只考虑了两个间隔为  $2h$  的无限导电平行板之间的环形轨道中循环电子的辐射，并以此简化模型给出了对应的电场  $E_{wf}$ 。

## 参考文献

- [1] P. Kuske, in Proceedings of the 23rd Particle Accelerator Conference, Vancouver, Canada, 2009 (IEEE, Piscataway, NJ, 2009), p. 4682. <https://inspirehep.net/literature/1379445>
- [2] J. Feikes, M. von Hartrott, M. Ries, P. Schmid, G. Wüstefeld, A. Hoehl, R. Klein, R. Müller, and G. Ulm, Phys. Rev. ST Accel. Beams 14, 030705 (2011). <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.14.030705>
- [3] C. Evain, J. Barros, A. Loulergue, M. A. Tordeux, R. Nagaoka, M. Labat, L. Cassinari, G. Creff, L. Manceron, J. B. Brubach, P. Roy, and M. E. Couprie, Europhys. Lett. 98, 40006 (2012) <https://iopscience.iop.org/article/10.1209/0295-5075/98/40006/meta>

- [4] V. Judin, N. Hiller, A. Hofmann, E. Huttel, B. Kehrer, M. Klein, S. Marsching, C. Meuter, A.-S. Mueller, M. Nasse, M. Schuh, M. Schwarz, N. Smale, and M. Streichert, in Proceedings of the 3rd International Particle Accelerator Conference, New Orleans, Louisiana, USA, 2012 (IEEE, Piscataway, NJ, 2012), p.1623.<https://accelconf.web.cern.ch/ipac2012/papers/tuppp010.pdf>
- [5] R. Bartolini, G. Cinque, I. Martin, G. Rehm, and C. Thomas, in Proceedings of the 2nd International Particle Accelerator Conference, San Sebastián, Spain (EPS-AG, Spain, 2011), p. 3050 <https://inspirehep.net/literature/1182854>