

# 加速器束流动力学期刊论文导读 (2021 年 6 月)

受“京师物理”公众号启发，我们几个同好便萌生将加速器领域的代表性期刊 Physical Review Accelerators and Beams (PRAB) 里的论文进行导读。主要 (但不限于) 导读材料选自 PRAB 近期上线的期刊，与部分美国物理学会 (American Physical Society, APS) 旗下的其它期刊或过去 PRST-AB、Elsevier 的核物理与技术 Nuclear Instruments and Methods (NIM) 期刊等可能涉及加速器方面的论文。与超快电子衍射成像动力学相关的论文则不在此限。

预期论文导读将于每个月初收集后发布，在 [http://faculty.hust.edu.cn/jcytsai/zh\\_CN/article/2191806/content/1551.htm#article](http://faculty.hust.edu.cn/jcytsai/zh_CN/article/2191806/content/1551.htm#article) 可以找到过去的导读文档。限于成员水平，导读仍许多地方有待改进 (正)。任何关于导读内容的指正、建议、意见都欢迎提出、交流，我们期待从交流讨论中激发的可能研究课题。

本期 (2021 年 6 月) 导读成员<sup>1</sup>负责结果统计如下表

成员姓名	导读列表	联系方式
蔡承颖	[1]、[3]、[6]、[7]、[8]、[10]	jcytsai@hust.edu.cn
秦伟伦	[??]	qinweilun1991@gmail.com
宋怡方	[2]、[5]	yifangsong@hust.edu.cn
雷健	[4]、[9]	aaron_lei@hust.edu.cn

---

<sup>1</sup>宋怡方、雷健为电磁所樊宽军教授研究生。

## 目录

1	能量回收直线加速器中考虑空间电荷效应的束流匹配 [NIMA 948] Beam matching with space charge in energy recovery linacs	3
2	激光加速得到低发散角的 1 kHz、15 MeV 的近似单能电子束 [PRX 11-02] Laser-Accelerated, Low-Divergence 15-MeV Quasimonoenergetic Electron Bunches at 1 kHz	5
3	短电子束团的偏轴波荡器相干辐射 [PRSTAB 3-03] Coherent off-axis undulator radiation from short electron bunches	8
4	基于空间电荷效应的低能束团压缩腔设计 [PRSTAB 18-01] Design of low energy bunch compressors with space charge effects	12
5	使用激光尾场加速得到的啁啾电子束捕捉单晶硅的结构动力学过程 Capturing Structural Dynamics in Crystalline Silicon Using Chirped Elec- trons from a Laser Wakefield Accelerator	15
6	利用焦散线方法理解束流群聚动力学与纵向粒子束团尖峰形成过程 [PRAB 19-10] Caustic-based approach to understanding bunching dynamics and current spike formation in particle bunches	18
7	激光驱动电子储存环 Laser-driven electron storage rings	24
8	基于激光尾场加速器的 27-nm 自由电子激光 [Nature 595] Free-electron lasing at 27 nanometres based on a laser wakefield accelerator	26
9	电子束与烟气相互作用机制模拟分析	30
10	从有限长束团的尾场势计算点电荷的尾场 [PRST-AB 16-02] Point-charge wakefield calculations from finite length bunch wake potentials	33

## 1 能量回收直线加速器中考虑空间电荷效应的束流匹配 [NIMA 948]

### Beam matching with space charge in energy recovery linacs

#### 1.1 基本信息

- 分类：束流动力学
- 作者：A. Khan, O. Boine-Frankenheim, F. Hug, C. Stoll (主要机构：Technical University of Darmstadt, 德国)
- 类型：理论、数值模拟
- 链接：<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168900219312616?via%3Dihub>

#### 1.2 摘要

这篇论文讨论在能量回收直线加速器 (energy recovery linac, ERL) 中考虑空间电荷效应的束流匹配问题。在 ERL 中，特别是在低能量情况下，考虑空间电荷效应时的束团特性与射频 (RF) 加速结构匹配是维持束团品质的关键。这篇论文考虑在 RF 加速结构上游时，束团在空间电荷效应下经过色散传输段，束团包络与色散如何匹配。研究发现，考虑空间电荷效应时的色散函数扮演对修正纵向动量压缩 (momentum compaction,  $R_{56}$ ) 一个重要角色，无论是对等时性 (isochronous) 或非等时性 (non-isochronous) 的传输段。这篇论文利用简单的束矩阵 (beam matrix) 方法分析空间电荷动力学，并与粒子跟踪模拟程序 ELEGANT 比较。作为一个例子，选择电子能量 5 MeV，注入的 180°、约 7.5 m 的传输段可以作为弯转，也可以作为压缩段。

#### 1.3 贡献或创新点

- 创新点：这篇论文的创新点在于利用求解考虑空间电荷效应下的包络方程，包含横向与纵向包络方程 [分别为该论文的 Eqs. (11) 与 Eq. (21)]。通过求解得到的束团  $\sigma_{x,y}, \sigma_{z,\delta}$  等，反推几个传输过程中的重要参量，如色散函数  $D$  (相较于不考虑空间电荷效应的  $D_0$ )、纵向动量压缩  $R_{56}$  等 [Eqs. (8,9,18)]。于是，追踪个别粒子的粒子跟踪程序可以改写为束矩阵跟踪程序。

类似的思维在稍早的论文 [1] 中有更细致的理论分析，其分析原则上允许六维相空间中在线性光学传输中的任意耦合。

- 贡献：这篇论文给出了对一个基于 MESA 的实际磁聚焦结构进行优化，特别是对束团包络的优化。

#### 1.4 其它

根据这篇论文 Eqs. (1-4) 的论述可知，当束团动量分布的中心恰好对上 lattice design 的动量时，即使包含空间电荷效应，描述束团中心 (centroid) 运动的色散函数  $D$  与电流无关。

这篇论文将过去传统意义上“传输矩阵元素应独立于束团特性”的框架进行推广，因此，解读该论文结果时应留意是否违背此一前提。

#### 参考文献

- [1] C.-Y. Tsai, K. Fan, G. Feng, J. Wu, G. Zhou, and Y. H. Wu, Low-energy high- brightness electron beam dynamics based on slice beam matrix method, Nucl. Instru. Methods A 937, 1-20 (2019), <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168900219306679>

## 2 激光加速得到低发散角的 1 kHz、15 MeV 的近似单能电子束 [PRX 11-02]

### Laser-Accelerated, Low-Divergence 15-MeV Quasimonoenergetic Electron Bunches at 1 kHz

#### 2.1 基本信息

- 分类: 新型加速方法
- 作者: F. Salehi, M. Le, L. Railing, M. Kolesik, and H. M. Milchberg (主要机构: University of Maryland)
- 类型: 实验
- 链接: <https://journals.aps.org/prx/abstract/10.1103/PhysRevX.11.021055>

#### 2.2 摘要

这篇论文展示了在 1 kHz 重复频率下通过激光尾场加速得到了 15 MeV 的近似单能电子束, 电荷量为 2.5 pC, 束核散角小于 7 mrad。加速过程通过将 5 fs、能量小于 2.7 mJ 的激光入射到一层接近临界密度的薄氢气射流上实现的。束流的发散角很低主要归功于束流对于激光载波包络相位滑移 (laser carrier-envelope phase slip) 的低敏感性, 这是通过对气体射流 (gas jet) 位置的控制和激光偏振两种方式实现:

1. 在气体射流等离子体密度下降斜坡上向尾场注入电子;
2. 使用圆偏振驱动脉冲。这些结果表明, 使用几个周期 (few-cycle) 的驱动脉冲的激光等离子体加速器可以在不需要载波包络相位稳定的情况下产生高品质的电子束。

#### 2.3 贡献或创新点

- 创新点: 经过多年发展, 激光尾场加速已经获得了百 MeV 到 GeV 量级的电子束, 但这类激光加速的重复频率通常在 10 Hz 以下。这篇论文的工作致力于通过激光尾场加速产生 MeV 量级、kHz 重频的高品质电子束。本文通过让椭圆偏振的激光光纤中传播逐渐演化为圆偏振 (circular polarized, CP) 的驱动激光, 并使用圆偏振驱动激光获得了相比利用线性偏振 (linear polarized, LP) 驱动激光更高品质的电子束。

- 贡献：这篇论文主要验证了使用激光尾场加速产生 MeV 量级、kHz 重频的高品质电子束的可行性，比较并分析在这一应用中，使用 CP 驱动激光相比于 LP 驱动激光在束流单色性和约束束流散角等方面具有明显优势。此外，还对激光照射气体射流的最佳位置进行了分析和比较，并得到了在该方案下不需要载波包络相位稳定即可产生高品质的电子束的结论。

## 2.4 部分结果

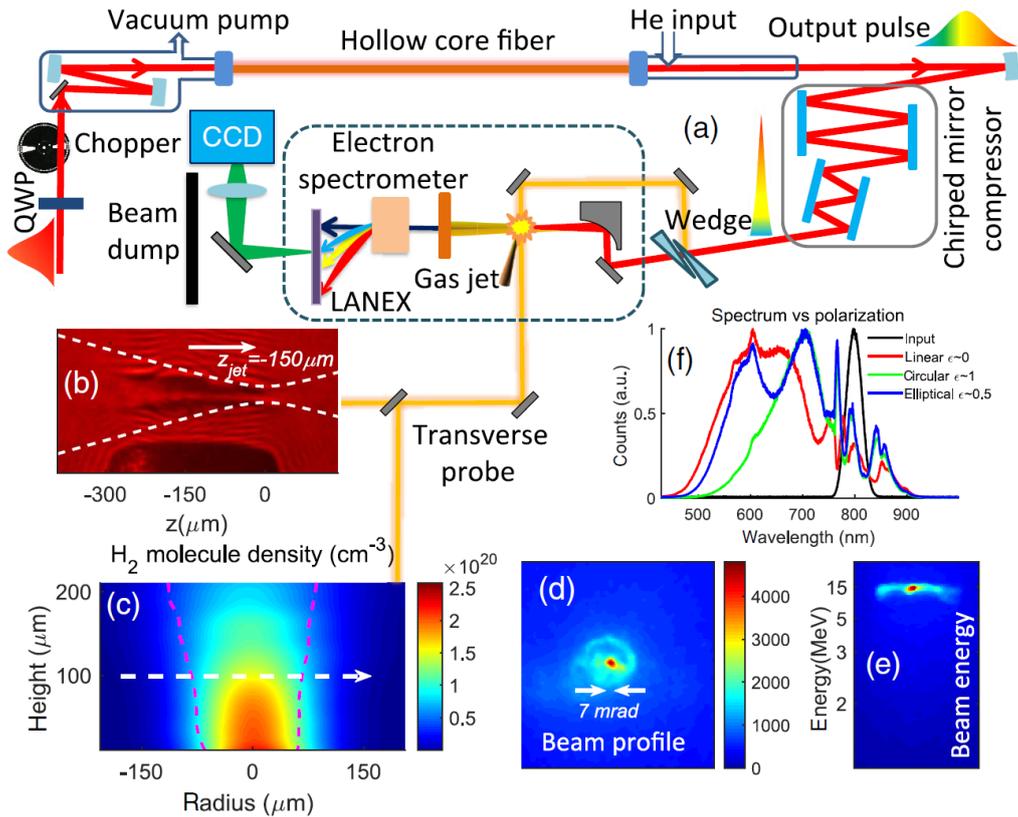


图 1: 实验装置布局。(a) 利用空心光纤 (HCF) 和啁啾镜压缩器产生的短周期激光脉冲驱动近临界密度的氢射流靶的电子加速。从主驱动脉冲中分离出来的探测脉冲用于 (b) 探测激光射流相互作用和 (c) 射流密度的干涉测量。白色箭头表示驱动光束的传播方向，白色虚线 [(b)] 表示激光束的  $4e^{-2}$  高斯强度包络，红色虚线 [(c)] 表示 FWHM 密度轮廓。(d), (e) 为样品电子束的剖面图和在 LANEX 屏幕上成像的能谱。(f) 为不同极化下 HCF 输出的光谱 (输入能量 6 mJ)。

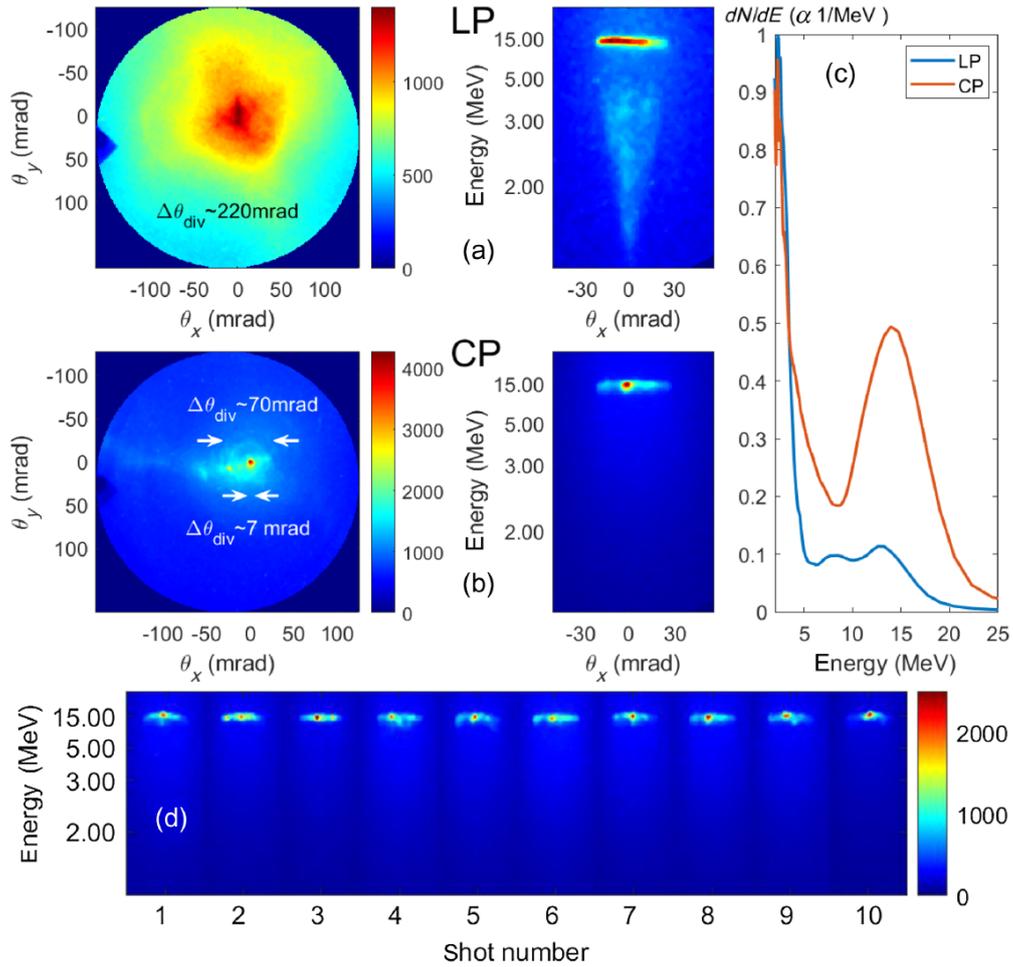


图 2: 实验条件: 2.7 mJ、5 fs 的 LP 或 CP 驱动脉冲。(a) LP 驱动产生的电子束剖面图 (左) 和相应的能谱图 (右)。(b) CP 驱动产生的电子束剖面图 (左) 和相应的能谱图 (右)。(c) LP 和 CP 驱动的电子束能谱分布对比。(d) 0.5 Hz 下连续 10 发由 CP 驱动的电子束能量。

### 3 短电子束团的偏轴波荡器相干辐射 [PRSTAB 3-03]

#### Coherent off-axis undulator radiation from short electron bunches

##### 3.1 基本信息

- 分类：同步辐射与自由电子激光
- 作者：C. P. Neuman, W. S. Graves, and P. G. O'Shea (主要机构：Duke University)
- 类型：理论、数值模拟
- 链接：<https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.3.030701>

##### 3.2 摘要

这篇论文着重讨论偏轴波荡器相干辐射的特性，特别是当束团长度短于所关心的辐射波长时。这个片论文证明偏轴波荡器相干辐射可以用来量测相对电子束团长度<sup>2</sup>。这篇论文还计算了几种不同束团分布形式，如平顶 (top-hat) 与高斯分布，与不同观测角度情况下的辐射特性。

##### 3.3 贡献或创新点

- 创新点：这篇论文分析的波荡器为有限长度波荡器，因此，并不是所有辐射能量都贡献到共振波长中，共振关系由下式描述

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_w}{2\gamma^2} [(1 + a_w^2) \cos \theta + 2\gamma^2 (1 - \cos \theta)] \approx \frac{\lambda_w}{2\gamma^2} (1 + a_w^2 + \gamma^2 \theta^2)$$

其中， $\theta$  为电子沿着波荡器轴心的前进方向与观测位置所形成的角度 (polar angle)。这篇论文给出的表示式为精确表示，在当  $\theta \ll 1$  ( $\theta < 5^\circ$ ) 时，为熟知的波荡器共振关系。推导见论文的 Section II.B。下图为对应的辐射位置  $e^-$  与观察位置  $P$  的空间关系图。

作为另一个创新点，这篇论文定义了一个“广义”群聚因子，不仅包含了偏轴情况，也考虑电子束团横向分布 [见以下  $f(\omega)$  形式]。

- 贡献：这篇论文针对理论分析的计算与直接通过 Lienard-Wiechert 场对每个电子计算辐射场 [Eq. (3)] 的 SRW 程序结果对比，得到一致结果。这些结果可以被应

<sup>2</sup>与之对比的是以通过偏转腔零相位 (zero-phase crossing) 技巧的绝对电子束团长度测量方案。

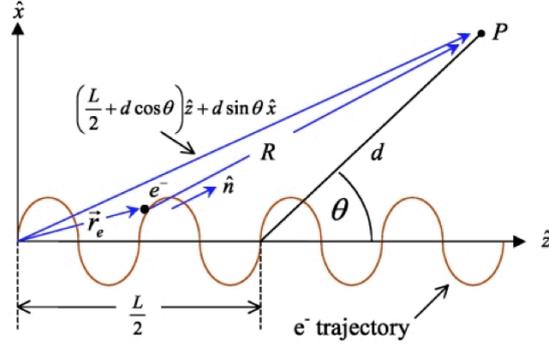


FIG. 2. (Color) Geometry for energy calculations.  $P$  is the point of observation,  $\vec{r}_e$  is the instantaneous position of the electron,  $R$  and  $\hat{n}$  are the distance and direction, respectively, from the electron to the point of observation, and  $d$  is the distance from the center of the undulator to the point of observation.

用于电子束团 (相对) 长度量测。

这篇论文 Section II.D 中, 按束团中多个电子辐射场叠加, 得到总辐射能量与群聚因子 (bunch form factor) 的关系如下

$$W_{N_e \text{ electrons}}(\omega) = W_{1 \text{ electron}} [N_e + N_e (N_e - 1) f(\omega)]$$

其中

$$f(\omega) = \left| \iint dy dz S_y(y) S_z(z) e^{-i(\omega/c)y \sin \theta + i(\omega/c)z \cos \theta} \right|^2$$

对于高斯分布与平顶 (top hat) 分布, 其  $S_{y,z}$  与  $f(\omega)$  分别在该论文的 Eqs. (11,12) 给出。注意到, 可能在一些其它文献会看到类似于以下形式的表示式

$$\left. \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \right|_{N_e \text{ electrons}} = \left. \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \right|_{1 \text{ electron}} [N_e + N_e (N_e - 1) f(\omega)]$$

适用于整个  $f(\omega)$  谱, 或

$$\left. \frac{dW(\omega)}{d\Omega} \right|_{N_e \text{ electrons}} = \left. \frac{dW(\omega)}{d\Omega} \right|_{1 \text{ electron}} [N_e + N_e (N_e - 1) f(\omega)]$$

其中, 此式需给定一特定频率。

### 3.4 其它

注意在论文 Section II.C 中, 从辐射能量角谱延伸至辐射能量角谱与频谱 (辐射“双谱”double spectrum) 的过程,

$$\frac{dW}{d\Omega} \equiv \int_0^\infty \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} d\omega = \int_0^\infty 2|\tilde{A}(\omega)|^2 d\omega$$

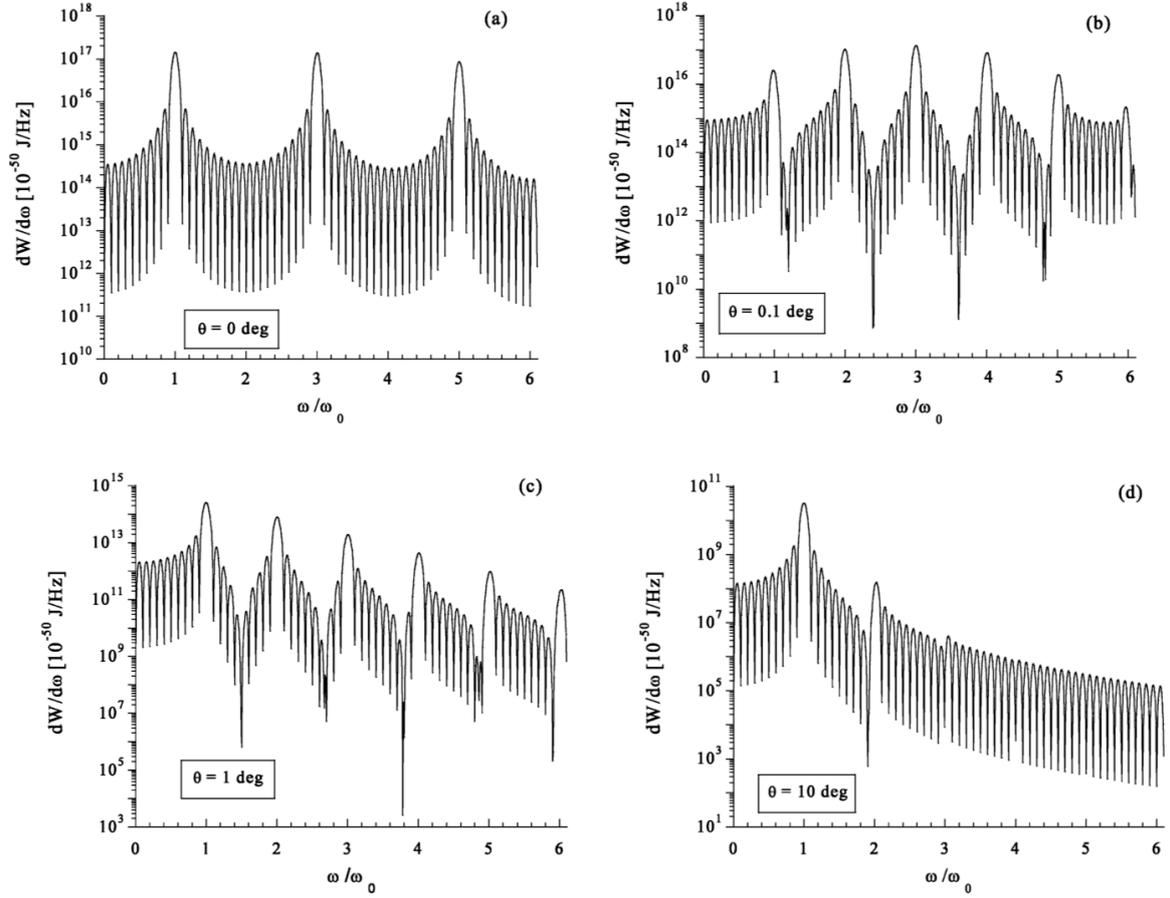


FIG. 4. Spectra for different observation angles.  $\lambda_w = 4$  cm,  $N_w = 10$ ,  $a_w = 1$ ,  $\gamma = 400$ . (a)  $\theta = 0^\circ$ , (b)  $\theta = 0.1^\circ$ , (c)  $\theta = 1^\circ$ , and (d)  $\theta = 10^\circ$ .

图 3: 注意到这些图对  $\Omega$  中的  $\phi$  积分, 但还没有对  $\theta$  积分, 因此, 也许写为  $\left. \frac{d^2W}{d\omega d\theta} \right|_\theta$  更合适。

其中，积分内用了  $\frac{d^2I}{d\omega d\Omega}$  而不是  $\frac{d^2W}{d\omega d\Omega}$  (注意积分范围)，背后意义值得琢磨。

另外，这篇论文提到一个效应，称为 near-field effect，具体而言，指的是当电子经过波荡器时， $\hat{n}$  与  $R$  皆改变的情况。这个效应与 Lienard-Wiechert 场中的第一项 velocity field 有时也被称为 near-field 的意义不同，需留意。

## 4 基于空间电荷效应的低能束团压缩腔设计 [PRSTAB 18-01]

### Design of low energy bunch compressors with space charge effects

#### 4.1 基本信息

- 分类: 低能多粒子动力学
- 作者: A. He, F. Willeke, L. H. Yu, L. Yang, T. Shaftan, G. Wang, Y. Li, and Y. Hidaka and J. Qiang (主要机构: BNL)
- 类型: 数值模拟、设计
- 链接: <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.18.014201>

#### 4.2 摘要

这篇论文研究空间电荷效应主宰的低能量 (文中使用的能量范围 5~22 MeV) 电子束团动力学。在这篇论文中, 设计了一个压缩腔来完成对没有加速结构或者短加速结构电子束团的压缩和聚焦。利用空间电荷效应导致的啁啾 (chirp, 通常情况下由 RF 腔产生), 最终通过设计压缩腔参数, 使束团达到目标压缩 (压缩后束团纵向束长约 150 fs, 横向束斑约 30  $\mu\text{m}$ ) 适用于与电子束切片相关的应用 (electron beam slicing project)。

#### 4.3 贡献或创新点

在空间电荷效应主宰的情况下, 处理这类动力学问题的两个可能难点:

1. 通常定义的 Courant-Snyder  $\beta$  函数和色散函数是基于粒子的能量是固定这一前提, 而对于低能且空间电荷效应主宰的情况下, 此一前提不再成立, 这些参数需要重新定义。
  2. 电子束团可能会在色散段迅速膨胀。此外, 通常压缩腔拥有负的  $R_{56}$  来压缩头部低能尾部高能电子束团, 而纵向空间电荷力使得头部粒子能量增加而尾部粒子能量减少, 因此需要设计正的  $R_{56}$  来压缩。
- 贡献: 束线的整体结构设计步骤:
    1. 将电子枪部分 (gun section) 与压缩腔部分 (compressor section) 分开设计, 将从电子枪出来的束团分布保存作为压缩腔设计部分的初始分布。

2. 压缩腔部分的设计，先是得到没有空间电荷效应的纯光学设计，随后慢慢增加束团的电荷量 (即增加空间电荷效应强度) 反复模拟，并且每次通过调整四极铁的强度使得束团行为与纯光学情况大致相同，直到空间电荷效应达到预期强度。
3. 将电子枪部分与压缩腔部分结合在一起，使用遗传算法优化参数 (有 20 多种参数需要优化，包括激光脉冲长度、相对于 RF 枪的激光相位、螺线管强度、四极铁强度、二极铁强度等)。

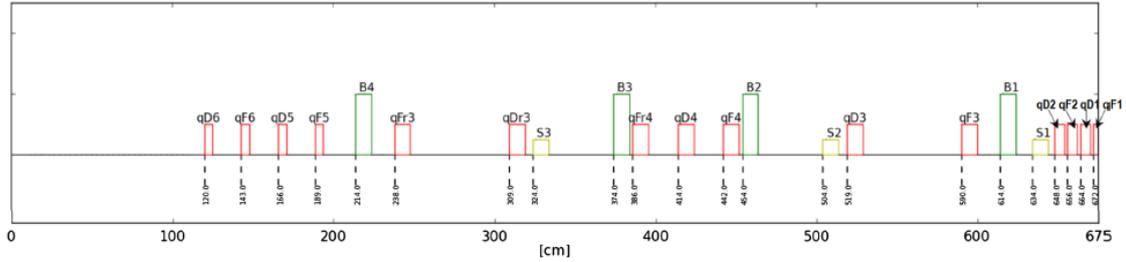


FIG. 4. The lattice configuration of the positive  $R_{56}$  compressor. The green columns indicate the four dipole magnets, the red columns indicate the quadrupole magnets, and the yellow ones indicate the sextupole magnets. The 0 point corresponds to the starting point of the photocathode rf gun.

- 创新点:

1. 为了解决能量改变的问题，文中定义了一个虚拟的粒子，即所谓束团的参考粒子，其坐标是所有束团粒子的六维相空间的平均值，用来重新定义  $\beta$  函数和色散函数。
2. 为了避免束团传输过程膨胀，将电子枪部分与压缩部分分开模拟，模拟压缩部分时逐渐增加空间电荷效应的强度。
3. 这篇论文最后还将情况拓展到空间电荷效应和相干同步辐射同时存在的情况。

#### 4.4 其它

在低能情况下漂移段也会贡献色散  $R_{56} = -\frac{L}{\gamma^2}$ 。

#### 4.5 想法

这篇论文对空间电荷效应引起的 chirp 的处理方式是，通过模拟得到 chirp 的数值，并且只保留线性的部分，其余束团部分被刮掉。这篇论文模拟和结果分析占较大比重，或许可以进行理论分析来指导参数的优化与束线的设计。

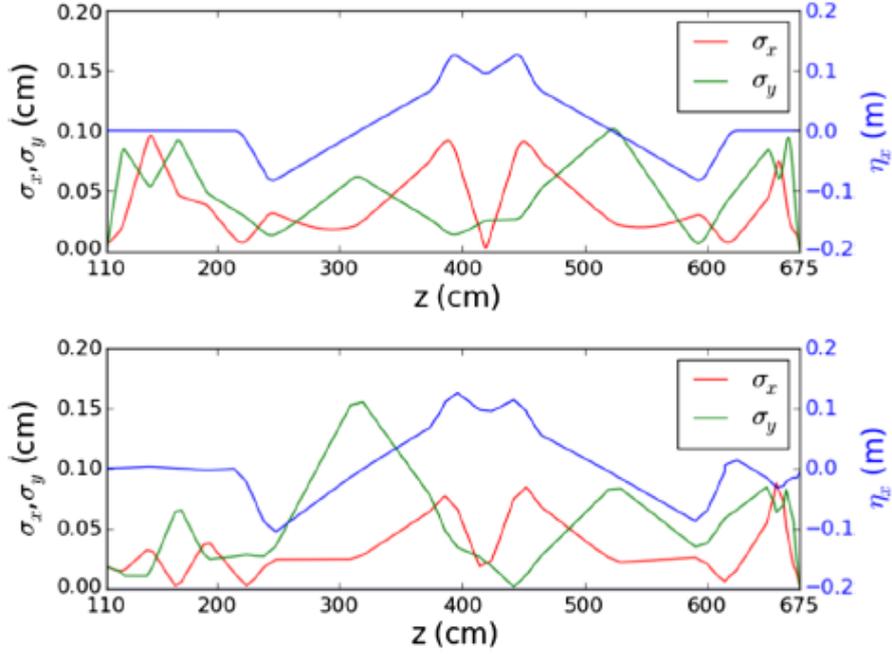


FIG. 5. The rms beam size and dispersion function from the first matching quadrupole magnet to the last focusing quadrupole magnet without space charge effects from OPTIM (top plot) and with space charge effects from PARMELA (bottom plot). To calculate the redefined dispersion (the detailed discussion about the redefined dispersion can be found in Sec. IV A) in the bottom plot, we select those particles whose energy deviation upstream of the first matching quadrupole magnet (i.e.,  $qD6$ ) at 110 cm is in the range 0.7%–0.8%. To calculate the redefined beta functions (actually, it is the beam size in the plot) in the bottom plot, we select those particles whose emittance upstream of the first matching quadrupole magnet (i.e.,  $qD6$ ) at 110 cm is smaller than 0.1 mm mrad.

## 5 使用激光尾场加速得到的啁啾电子束捕捉单晶硅的结构动力学过程

### Capturing Structural Dynamics in Crystalline Silicon Using Chirped Electrons from a Laser Wakefield Accelerator

#### 5.1 基本信息

- 分类: 新型加速方法
- 作者: Z.-H. He *et al.* (主要机构: University of Michigan)
- 类型: 实验
- 链接: <https://www.nature.com/articles/srep36224>

#### 5.2 摘要

激光尾场加速的最新进展引领了新一代电子和 X 射线源的出现, 对超快科学产生巨大的推进。这篇论文演示了使用激光尾场加速电子束对超快激光脉冲泵浦的单晶硅纳米膜 (single-crystal silicon nano-membranes) 的结构动力学进行时间分辨电子衍射测量。在这篇论文的概念验证研究中, 作者在皮秒时间尺度上解析了硅的晶格动力学, 并通过静态磁场偏转衍射后的电子束来获得随时间变化的衍射效率。作者还讨论了通过减少泵浦和探针的抖动将该方案的时间分辨率提升到飞秒量级的可能性。

#### 5.3 贡献或创新点

- 创新点: 首次将激光尾场加速方案应用于超快电子衍射实验, 通过如下图的实验装置产生了 100 keV、数 fC、10-20% 相对能散的电子束。由于能散大, 预期电子束长度在 80 ps 左右, 因此作者在样品后使用静磁场偏转电子束, 使其纵向时间分布转变为横向位置分布, 通过对单发衍射获得了数 ps 的分辨率。
- 贡献: 作者通过实验验证了基于激光尾场加速的超快电子衍射的可行性, 并且针对激光尾场加速方案得到的电子束能散过大、束长较长的情况, 提出了使用样品后静磁场偏转的方案, 成功解析了单晶硅 (220) 衍射样斑的衰减过程, 并使用基于直流、低能量电子的 UED (30-100 keV) 进行了对比实验。在论文最后, 作者分析了该装置各误差对时间分辨率的影响, 由于静磁场结构的能量分辨率仅为 1.6 keV, 因此该偏转结构本身无法分辨 6 ps 时间范围内的电子束, 这也将整个装置的时间分辨率限制在了数 ps 量级。

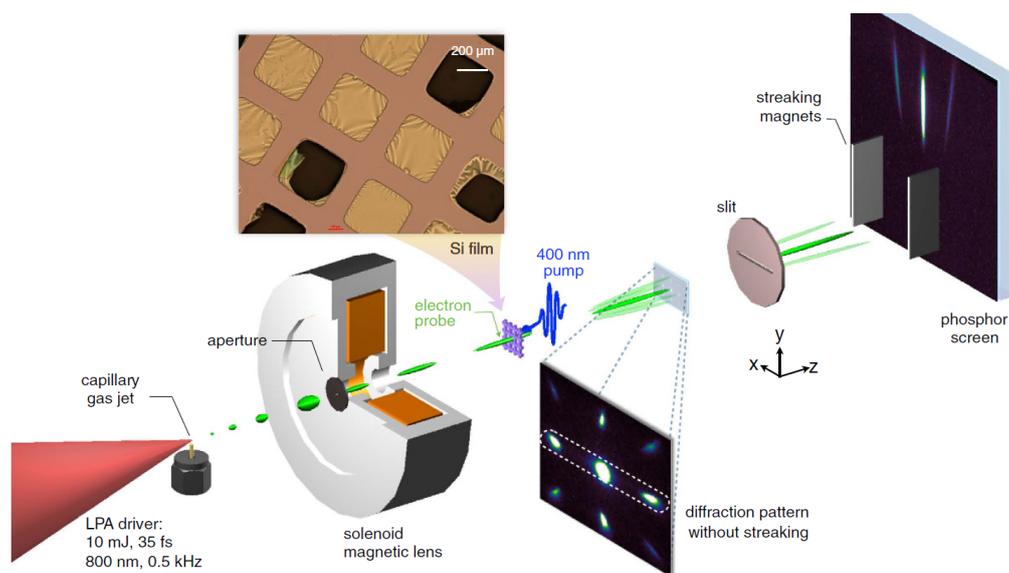


图 4: 实验装置示意图。使用 15 mJ 的钛宝石激光系统产生电子探针和样品的泵浦脉冲。大约 10 mJ、800 nm 激光脉冲被聚焦到了一个 100  $\mu\text{m}$  的氩气射流中以产生电子束。光束的剩余部分倍频至 400 nm, 并以 1-2  $\text{mJ}/\text{cm}^2$  的通量送至样品进行激发。在进入螺线管磁透镜之前, 电子束经过 280  $\mu\text{m}$  孔径的 aperture。30 nm 厚的单晶硅样品放置在距离电子源 13.5 cm 处。衍射后的电子通过水平狭缝后被一对二极磁铁在空间上分散到探测器屏幕上。

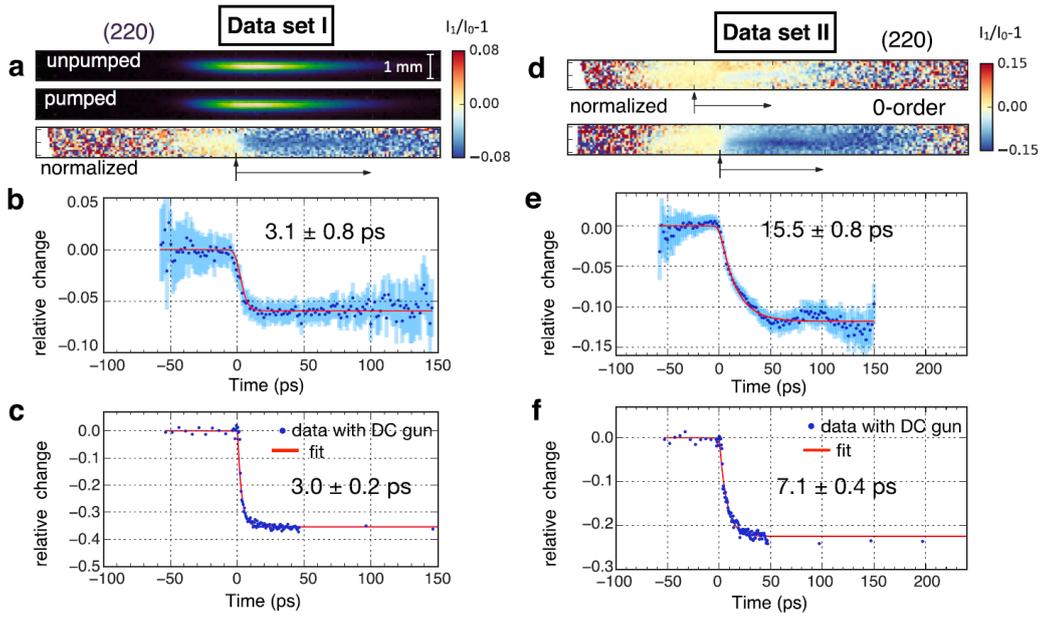


图 5: 由单晶硅 (220) 级样斑和 0 级样斑得到的时间分辨的偏转信号。(a) (220) 衍射峰未泵浦的原始数据 ( $I_0$ , 上层), (220) 衍射峰泵浦状态下的原始数据 ( $I_1$ , 中层); 底层为衍射峰的相对变化  $I_1/I_0 - 1$  的原始数据; (b) (220) 衍射峰沿  $x$  方向积分后的相对变化; (c) 由同样条件下 DC UED 得到的 (220) 衍射峰的相对变化; (d-f) 为将单晶硅偏转一个小角度后得到的实验数据。(d) 表明在该情况下 0 级衍射峰的相对变化较大; (e) 0 级衍射峰的相对变化; (f) 由同样条件下 DC UED 得到的 0 级衍射峰的相对变化。

## 6 利用焦散线方法理解束流群聚动力学与纵向粒子束团尖峰形成过程 [PRAB 19-10]

### Caustic-based approach to understanding bunching dynamics and current spike formation in particle bunches

#### 6.1 基本信息

- 分类：束流动力学
- 作者：T. K. Charles, D. M. Paganin, and R. T. Dowd (主要机构：Australian Synchrotron)
- 类型：理论、数值模拟
- 链接：<https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevAccelBeams.19.104402>

#### 6.2 摘要

如下图 (a) 所示在咖啡杯中可以观察到的亮点形成的包络，又称为光学焦散线，其形成的机理在自然界具有一般性，一般情况的数学描述见于突变理论 (catastrophe theory)。在加速器应用中也有类似的现象，如束流调制 (modulation)、束流尖峰 (spike)、尖角 (horn) 等，时常见于自由电子激光、直线对撞机、用于产生太赫兹辐射的微束团串、微束团不稳定性 (microbunching instability, MBI) 等。

这篇论文利用焦散线方法分析产生以上描述的纵向束流现象，不同于以往将之归因于非线性或高阶效应的解释。在某些特定条件下，束团内临近的局部电子轨迹形成锋线，从而导致束流尖峰。锋线 (caustic line) 或锋面 (caustic surface) 表征电子密度局部极大值。这篇论文推导形成这些峰值的必要条件，同时给出发生的位置，并利用粒子跟踪模拟程序 ELEGANT 验证这些现象。还讨论了这个工作的可能应用，如利用焦散线方法在纵向束流分布或相空间整形 (current profile shaping) 或在束团压缩器设计中如何避免形成束流尖峰或尖角。

#### 6.3 贡献或创新点

- 贡献：几个电子轨迹要产生这篇论文介绍的锋线从而导致束流尖峰，必须经过色散 (dispersive) 段，在  $(s, z)$  平面分析，其中， $s$  是 global position along the accelerator,  $z$  是 local longitudinal position with respect to the bunch center。下图 (FIG. 3) 表

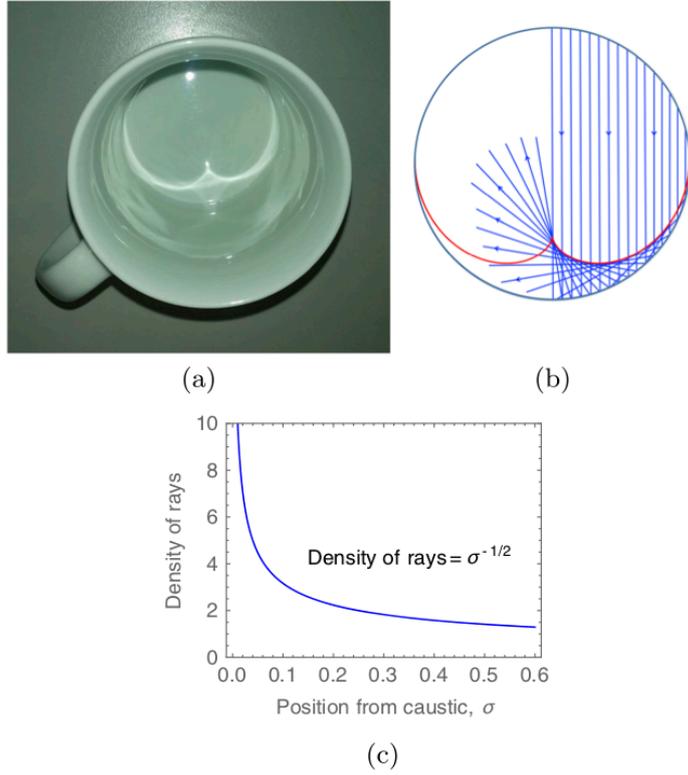
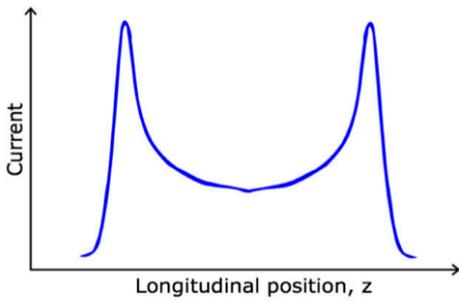
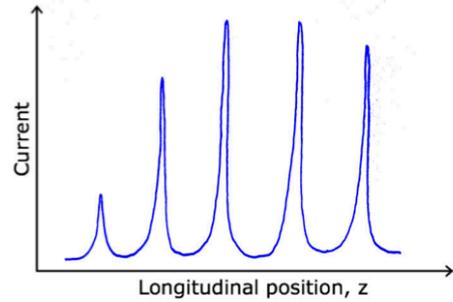


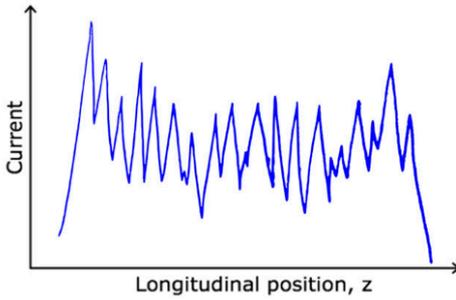
FIG. 1. Optical caustics, which are analogous to electron-trajectory caustics found in accelerator physics. (a) image of caustic lines appearing in a coffee cup. (b) illustration of light rays forming the caustic (red line), and (c) intensity of the rays in the vicinity of the caustic.



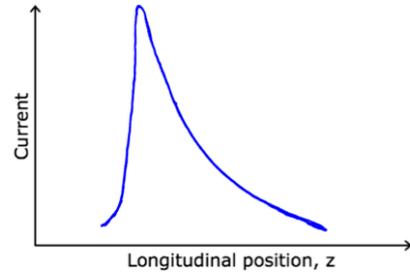
(a) Current horns present in strong bunch compression (for an example see Fig. 7.7 in [6]).



(c) Ballistic bunching produced with dielectric-lined waveguides for trains of microbunches for THz radiation generation (for an example Fig. 6 in [27]).



(b) Microbunching instability induced by CSR in bunch compression (for examples see Fig. 3 in [12] and Fig. 3 in [26]).



(d) Generation of linearly-ramped current profiles for plasma wakefield accelerator applications (for examples see Fig. 5a in [21] and Fig. 4 in [25]).

图 6: 该论文描述的几种基于焦散线的不同现象导致的纵向束流分布形态。

示一类在 4-dipole chicane 中的电子轨迹锋线导致的束流尖峰，又称 two-fold cusp。在 4-dipole chicane 中有  $T_{566} = -3/2R_{56}$ ,  $U_{5666} = 2R_{56}$ 。

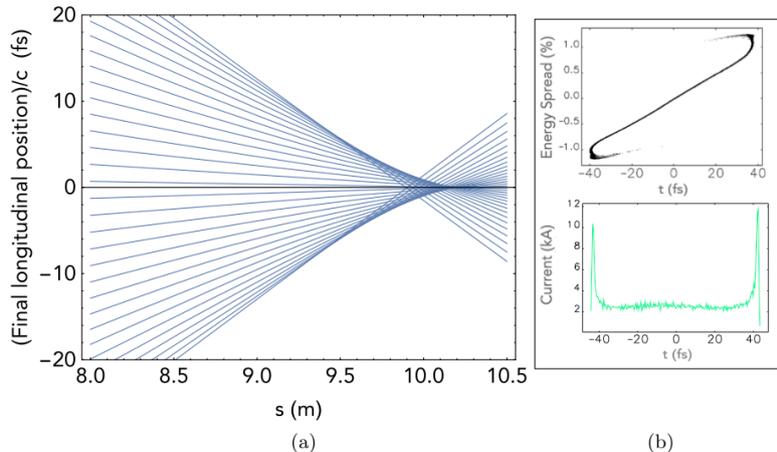


FIG. 3. Electron trajectories through a chicane in  $s$ - $z$  plane, showing how the electron trajectories overlap in a caustic at the extreme values of  $z$  (i.e., at the head and the tail of the bunch). (b) Typical phase space distribution and corresponding current profile seen at the end of a strong bunch compressor [equivalent to  $s = 9.5$  m in (a)].

这篇论文考虑 bunch compressor chicane 与 dogleg 两种情况，仅考虑能量差  $\delta$  导致的纵向束内位置改变，即，忽略了  $R_{51}, R_{52}$  等的影响。光学传输矩阵  $R_{56}, T_{566}, U_{5666}$  由磁聚焦结构决定，束团中  $\delta$  与  $z$  的关系  $h_1, h_2, h_3$  则为束团经过 RF 加速结构时与集体效应引致。

下图演示三种不同  $R_{56}, T_{566}, U_{5666}$  设定情况下的结果<sup>3</sup>。从上排可以看到焦散线（即包络线，红线）与最下排的电流分布情况有很好的对应。

应用这篇论文的分析至纵向束流整形，先得到压缩因子沿着束团内部坐标的关系，有

$$C(z) = \frac{s_{bc}}{\left[ R_{56} \frac{d\delta(z)}{dz} + T_{566} \frac{d\delta^2(z)}{dz} + U_{5666} \frac{d\delta^3(z)}{dz} \right] s + s_{bc}}$$

这篇论文在 Section V.A 先重现 double horn 分布，然后在 Section V.B 将分析推广到纵向束流整形，形成一线性倾斜 (linearly ramped) 的电流分布。得到线性倾斜电流分布可能通过 overcompression 或 undercompression，前者可以避免<sup>4</sup>出现尖峰。

- 创新点：这篇论文利用焦散线分析方法，将几种加速器中常见的束流尖峰形态纳入一个统一框架，分析形成不同尖峰形态的条件与（束团内）位置。另外，将分析方

<sup>3</sup>束线基于 Australian XFEL 设计。

<sup>4</sup>该论文的用词为 much less likely to form in an overcompressed bunch。

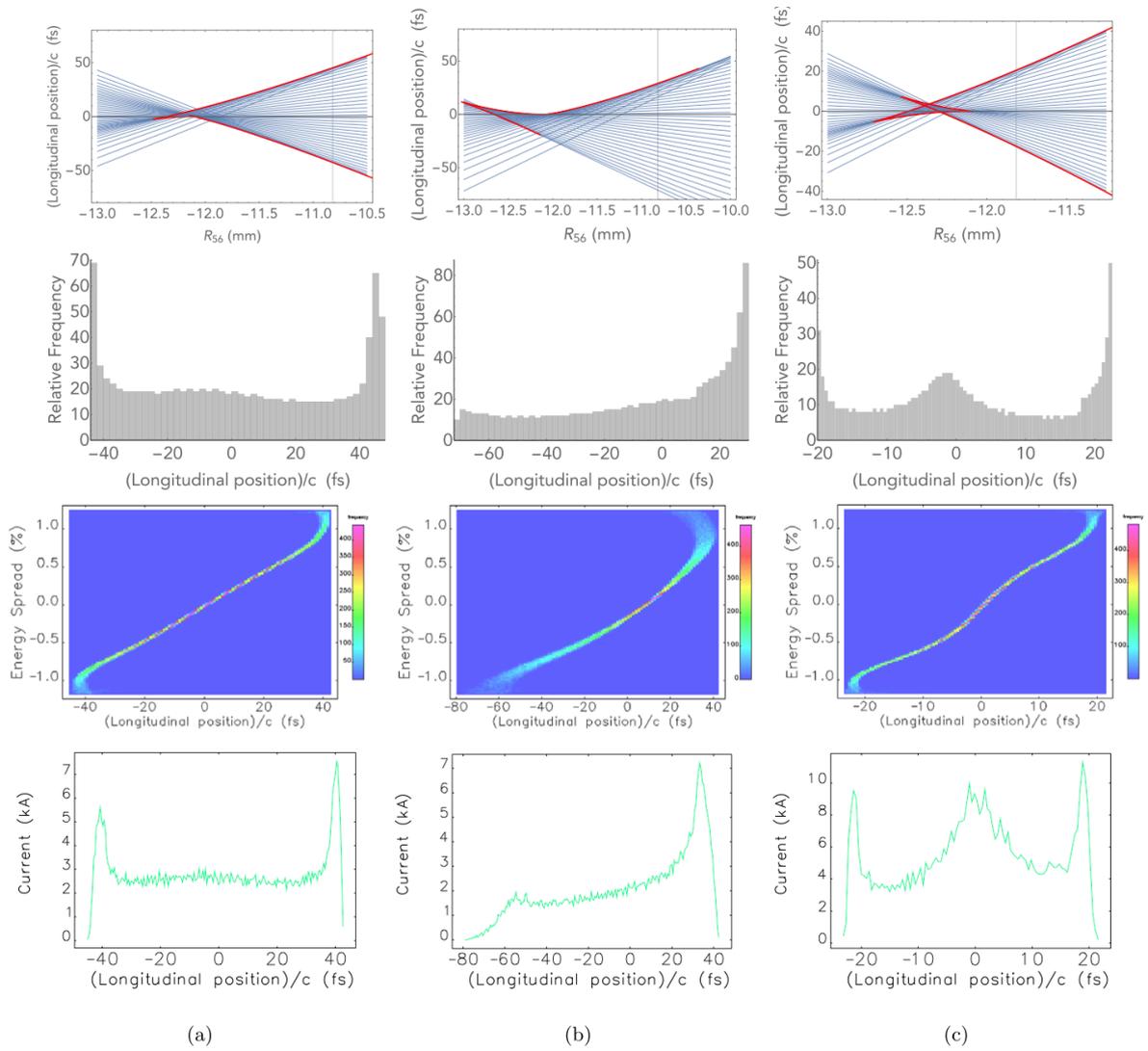


FIG. 7. Electron trajectories caustics seen forming in 3 scenarios differentiated by the different values of the  $R_{56}$ ,  $T_{566}$ , and  $U_{5666}$  encountered. Column (a) shows the double-horned current structure produced at the end of a dispersive region where  $R_{56} = -10.78$  mm,  $T_{566} = 16.35$  mm and  $U_{5666} = -11.38$  mm. Column (b) shows a single-horn current profile produced with  $R_{56} = -10.82$  mm,  $T_{566} = -41.07$  mm and  $U_{5666} = 0.40$  m, and column (c) shows a current profile produced with  $R_{56} = -11.76$  mm,  $T_{566} = 16.10$  mm and  $U_{5666} = 2.60$  m. The top row shows trajectories (blue, thin) with the caustic expressions [Eq. (8)] (red, thick). The second row of images shows histograms of electron density, calculated at the value of  $R_{56}$  indicated by the gray vertical line in the top row of images. The third and fourth rows of images were created using ELEGANT, showing the phase space distribution and current profiles, respectively, where the head of the bunch is on the left-hand side of these figures.

图 7: 此处分析 (最上排) 基于五次多项式拟合, 因此这里的 caustic 为 butterfly 形式。

法进一步应用到束流整形。结论提到，形成束流尖峰未必仅由三阶效应导致，即，在没有三阶效应而有更高阶效应的情况下，也可能导致束流尖峰，决定于  $\delta(z)$  的形式。这些束流整形能够应用到等离子体尾场加速、抑制相干同步辐射效应或微束团不稳定性、增进自由电子激光效能等。论文 Section VI 提到一种基于焦散线分析的可能潜在应用，即，应用于束团测量，特别是对于束团内部微扰成分的测量。

## 6.4 其它

焦散线方法必须包含至少至三阶单粒子动力学，这篇论文分析采以下标准形式

$$X_i(1) = \sum_{j=1}^6 R_{ij} X_j(0) + \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^6 T_{ijk} X_j(0) X_k(0) + \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^6 \sum_{\ell=1}^6 U_{ijkl} X_j(0) X_k(0) X_\ell(0)$$

其中， $X = (x, x', y, y', z, \delta)$ 。细节可参考 [1] 与 [2]。

仅用 caustic 一词或许不够精确，形成 caustic 的种类繁多，还有 fold, cusp, swallowtail, elliptic umbilic, hyperbolic umbilic, parabolic umbilic, and butterfly 等，各有其特征。

给定  $\delta(z)$  的分布函数，或许可以应用这篇论文的思路，将分析应用到束团压缩或束流整形。

## 参考文献

- [1] K. L. Brown, A First and Second Order Matrix Theory for the Design of Beam Transport Systems and Charged Particle Spectrometers, SLAC Report No. 75, 1982. <https://cds.cern.ch/record/283218/files/SLAC-75.pdf>
- [2] D. C. Carey, K. L. Brown, and F. Rothacker, Third order transport: A Computer program for designing charged particle beam transport systems, Report No. SLAC-R-95-462, 1995. <https://inspirehep.net/files/9ed6f6c8384d6393f613da250a8b56e8>

## 7 激光驱动电子储存环

### Laser-driven electron storage rings

#### 7.1 基本信息

- 分类：同步辐射与自由电子激光
- 作者：S. Khan (主要机构：TU Dortmund University, 德国)
- 类型：综述
- 链接：<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1596/1/012025>

#### 7.2 摘要

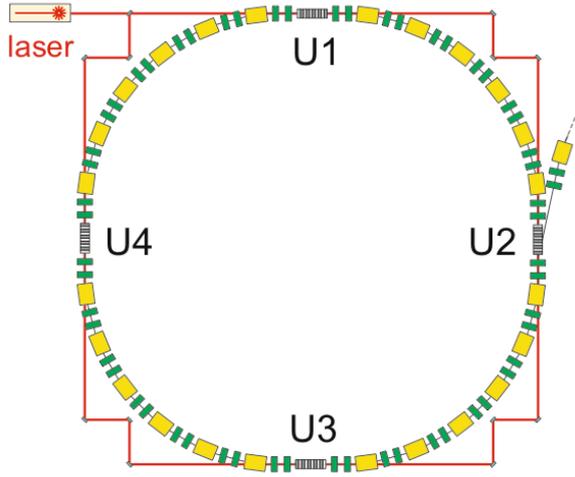
前沿加速器设计概念通常针对直线加速方案。相比之下，储存环在重复频率、稳定性和效率方面则更具优势。传统电子储存环每圈的辐射能量损耗由波长大约为 1 米的射频谐振腔补充，其中，这个长度尺度对应到相邻相空间势阱间隔，又称 bucket，最终形成束团长度大约 1 cm 或几个 10 ps ( $10^{-12}$  sec) 的长度尺度。作为一个创新的替代方案，纵向聚焦可以通过在波荡器中与电子束团并行前进的激光场提供。以目前成熟、可得的 CO<sub>2</sub> 连续 (continuous wave, CW) 激光，bucket spacing 可以达到 10.6  $\mu\text{m}$ ，束团纵向尺度约在飞秒量级。这篇论文讨论利用激光驱动的电子储存环产生稳态飞秒束团的契机与局限。

#### 7.3 贡献或创新点

- 贡献：这篇论文综述了利用激光取代传统射频 (RF) 谐振腔的电子储存环加速器的可行性。与激光-等离子体-尾场加速器提高加速梯度为了降低成本<sup>5</sup>或加速器整体尺寸 (footprint) 的目的不同，激光驱动的电子储存环目的不在于减小装置尺寸，也不是提高加速梯度，而是形成一种创新的束团串结构，其束团间隔为激光波长，因此比起传统储存环短了五个数量级<sup>6</sup>。这种束团串结构能够产生相干辐射，作为非常高重频、具有时间分辨的 pump-probe 实验。一种可能的激光驱动电子储存环方案如下图所示。

<sup>5</sup>这里的成本主要是直线加速器中加速结构的成本。

<sup>6</sup>传统储存环的 RF 波长约为 0.6 m (对应 500 MHz)，CO<sub>2</sub> 激光波长则可为 10.6  $\mu\text{m}$ 。其他类型的激光或可能更短。



**Figure 4.** Sketch of an electron storage ring driven by a laser beam (red) in a ring cavity interacting with the electrons in four undulators. The dipole and quadrupole magnets (yellow and green, respectively) are shown for illustration and do not represent an actual lattice. Other elements like higher-order magnets, additional RF cavities, diagnostics, and injection elements are not shown.

## 7.4 其它

这篇论文介绍到要实现激光驱动电子储存环，一个先决条件是环必须是接近等时性的 (isochronous)，其动量压缩因子  $\alpha_c$  一般要求  $10^{-6}$  量级或更小。设计一个接近等时性的储存环不是显而易见的，即，并不是让整个环的  $\alpha_c$  愈小愈好，许多挑战与设计概念将需要重新分析，如需要考虑环上电子发射光子的瞬态能量改变与局部动量压缩因子 (partial momentum compaction factor) 引致的纵向电子位置改变。另外，许多基于传统储存环  $\alpha_c$  较大的各种集体效应的分析也需要重新审视。

关于近等时储存环的经典论文，可以参考 [1, 2, 3]。

## 参考文献

- [1] D.A.G. Deacon D.A.G. and J.M.J. Madey, Isochronous storage-ring laser: A possible solution to the electron heating problem of recirculating free-electron lasers, Phys. Rev. Lett. 44, 449 (1980). <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.44.449>
- [2] D.A.G. Deacon, Basic theory of the isochronous storage ring, Phys. Rep. 76, 349 (1981). <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/037015738190137X>
- [3] C. Pellegrini and D. Robin, Quasi-isochronous storage ring, Nucl. Instrum. Methods A 301, 27 (1991). <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0168900291907348>

## 8 基于激光尾场加速器的 27-nm 自由电子激光 [Nature 595]

### Free-electron lasing at 27 nanometres based on a laser wake-field accelerator

#### 8.1 基本信息

- 分类：同步辐射与自由电子激光
- 作者：Wentao Wang, Ke Feng, Lintong Ke, Changhai Yu, Yi Xu, Rong Qi, Yu Chen, Zhiyong Qin, Zhijun Zhang, Ming Fang, Jiaqi Liu, Kangnan Jiang, Hao Wang, Cheng Wang, Xiaojun Yang, Fenxiang Wu, Yuxin Leng, Jiansheng Liu, Ruxin Li, Zhizhan Xu (主要机构：中国科学院上海光学精密机械研究所)
- 类型：实验
- 链接：<https://www.nature.com/articles/s41586-021-03678-x>

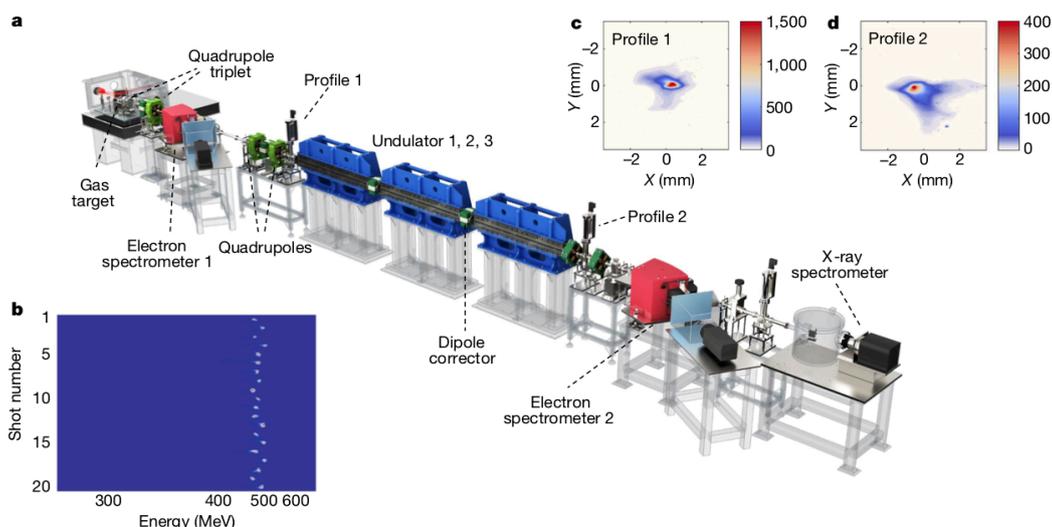
#### 8.2 摘要

X 射线自由电子激光是当前研究原子级别结构生物学、化学与其它学科不可或缺的科研工具。目前已有许多 X 射线自由电子激光器投入运行。但是，造价高、对目前射频技术的高度要求同时刺激了开展对紧凑型、较低成本的 X 射线自由电子激光器的兴趣。激光尾场加速器 (laser wakefield accelerator, LWFA) 能够提供相较于传统射频加速器约三个数量级<sup>7</sup>的加速梯度，因此被视为开展紧凑型 X 射线自由电子激光器的一种选择。以这类加速器为电子驱动源实现 X 射线自由电子激光器的一个挑战在于其产生的电子品质相对较差。这篇论文利用从激光尾场加速器产生的电子束，从实验上得到了经历指数增益 (exponential-gain) 过程的波荡器辐射。产生的波荡器辐射的中心波长约为 27 nm，单发光子数可达到  $10^{10}$ ，对应光子辐射脉冲能量约 150 nJ。在波荡器装置的第三段 (也是最后一段，见下图)，最大增益约为 100，证实了波荡器辐射指数增益过程。

#### 8.3 贡献或创新点

- 贡献：以激光-等离子体驱动尾场的加速器为电子驱动源实现 X 射线自由电子激光器的挑战在于注入 (injection) 与传输过程 (guiding, transport and focus)。基于激光尾场加速器产生的电子束经历的加速长度一般在 mm 至几个 cm 距离。与传统射频加速长度相比，大约短了  $10^3$  倍。能量一般在 GeV 量级，能散约为 1%，电荷

<sup>7</sup>一般射频加速梯度约为 100 MV/m。基于激光-等离子体加速梯度约为 100 GV/m。



**Fig. 1 | Schematic layout of LWFA-based free electron laser experiment.** **a**, Undulator beamline with a total length of approximately 12 m from the gas target for the LWFA to the X-ray spectrometer. **b**, Typical spectra of electron

beams from the LWFA for 20 consecutive shots. **c, d**, Measured transverse profiles of the electron beam at the entrance (**c**) and exit (**d**) of the undulators. The scale bars are normalized.

量约为 10 pC。这类加速器产生的电子束的潜在应用除了短波长自由电子激光器，还有康普顿散射光子源，或甚至正负电子对撞机等。这篇论文报告的实验结果基于自发辐射自我放大原理 (self-amplified spontaneous emission, SASE)，光放大过程由电子束团的粒子噪声 (shot noise) 开始。要能产生 FEL 过程，要求电子束能散小于上述 1% 一个数量级，即 0.1%，因此，电子束团自激光尾场加速器产生后至波荡器前，经历的传输过程是一大挑战，如，中间利用了特殊设计的等离子体元件、纵向色散的束团压缩器、横向梯度波荡器等。

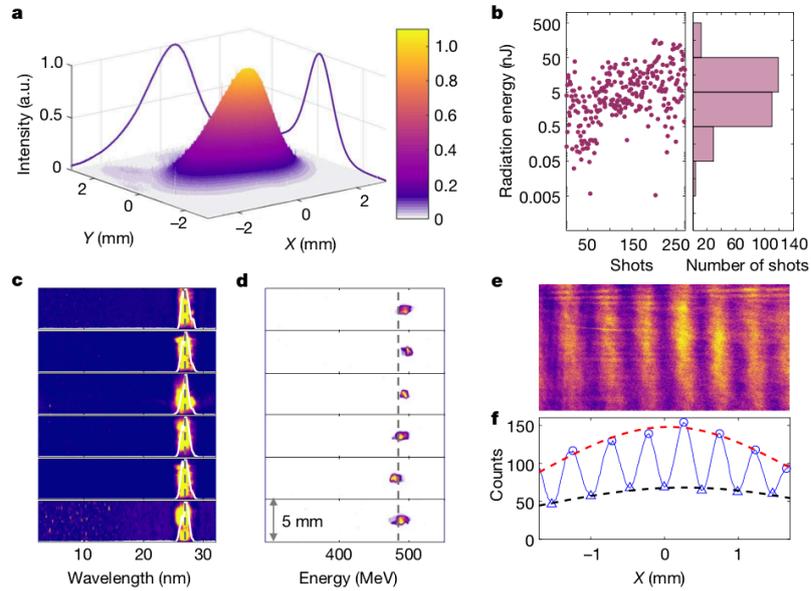
论文中简单回顾其它实验中心 (SOLEIL/Laboratoire d'Optique Appliquee 的合作项目 COXINEL，德国汉堡大学与 DESY 合作项目 LAOLA，LBNL 的 BELLA 中心等) 在激光尾场加速器驱动自由电子激光目前的进展，发现其实验进展都在自发辐射阶段，尚未经历指数增益过程。

上图所示为这篇论文中介绍的实验示意图。产生驱动尾场的激光系统为 200 TW、重频 1~5 Hz、聚焦后强度约为  $3.8 \times 10^{18} \text{ Wcm}^{-2}$  ( $a_0 = 1.3$ )，轰击在气体靶以产生电子。轰击后刚产生的电子能量为 490 MeV，能散 0.5%，电荷约 30 pC，rms 散角约为 0.2 mrad。经过 quadrupole triplet，再经过一对电磁四极铁 (electromagnetic quadrupole) 使电子束维持足够小的横向尺寸。

波荡器系统包含三个 1.5-m 波荡器，周期 25 mm，横行间隙 10 mm， $K_0 = 1.41$ 。共振波长为 27.3 nm，FEL 参数 (或称 Pierce 参数) 为  $\rho \approx 5 \times 10^{-3}$ 。一维功率增益长度  $L_{G_0} \approx 0.23 \text{ m}$ 。达饱和需要约 18 至 20 倍的增益长度，因此实验设置的总

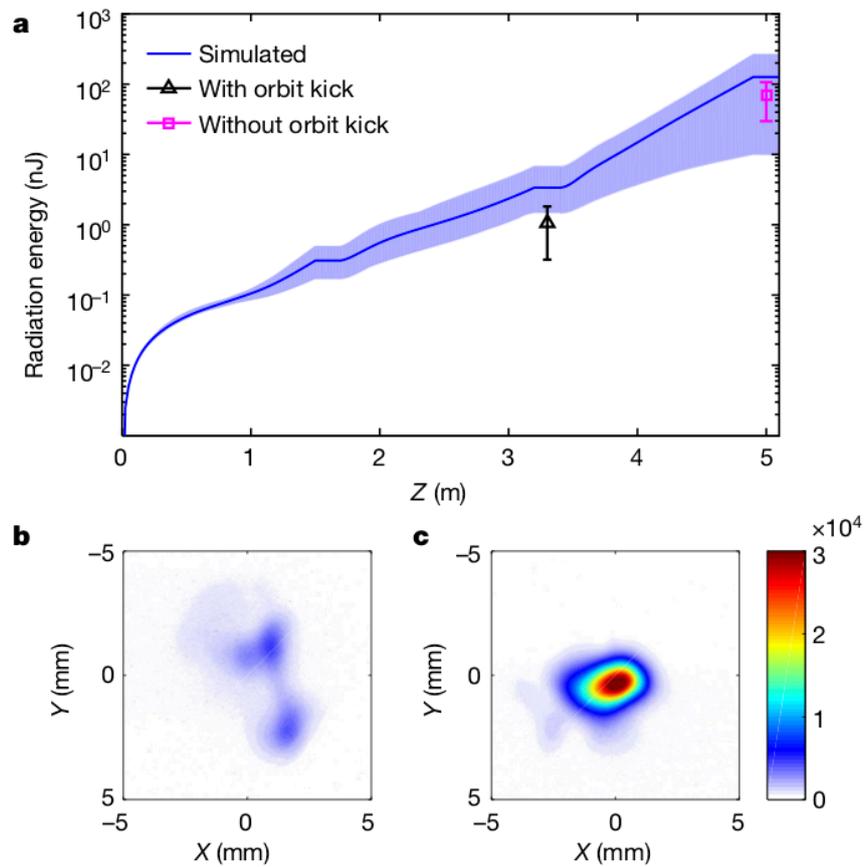
波荡器长度为 4.5 m。

在波荡器出口处辐射场的测量结果如下图总结



**Fig. 2 | Measurement of undulator radiation.** **a**, Measured transverse radiation pattern of a typical pulse on the X-ray CCD camera located 12 m downstream from the gas target. The scale bar is normalized. **b**, Shot-to-shot radiation energy over 270 pulses. **c**, **d**, Measured radiation spectra (**c**) and the

corresponding electron-beam energy spectra (**d**) detected by the second spectrometer located at the exit of the undulator. **e**, **f**, Image (**e**) and count profile (**f**) of the interference pattern generated when radiation propagates through two 10- $\mu\text{m}$  slits with a slit separation of 40  $\mu\text{m}$ .



**Fig. 3 | Undulator radiation measurement at 27 nm.** **a**, Measured radiation energy with (black) and without (magenta) the orbit kick and the simulated energy along the undulator. Error bars represent the r.m.s. statistical uncertainty in the measured energy averaged over 20 shots. **b**, **c**, Corresponding transverse-beam patterns of the radiation measured with (**b**) and without (**c**) the orbit kick. The scale bar is normalized.

## 9 电子束与烟气相互作用机制模拟分析

### 9.1 基本信息

- 分类: 物质与粒子束交互作用
- 作者: 冯光耀, 裴元吉和王相綦 (主要机构: 中国科学技术大学国家同步辐射实验室).
- 类型: 数值模拟、理论
- 链接: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/detail.aspx?dbcode=CJFD&dbname=CJFD2006&filename=QJGY200610030&v=k%25mmd2BNoxuBZ%25mmd2FQhRm0THIWhHj7A%25mmd2B2KGUF2rvbx%25mmd2FfnnQxZ7wbzQh8XoA%25mmd2FImPBIWwHJF4f>

### 9.2 摘要

这篇论文通过理论和蒙特卡罗模拟计算, 得到了到达阳极不同能量 (300 keV~3 MeV) 电子穿过不同材料、不同厚度金属箔窗后能量损失情况, 确定选用钛箔作为束流输出窗。同时对电子束在烟气中透射深度以及作用区域范围等进行了模拟计算。

### 9.3 贡献或创新点

- 贡献: 这篇论文涉及电子束与金属箔和烟气的作用。能量较低的情况下, 电子束通过物质时的能量损失主要消耗在是原子激发和电离上, 粒子的电离能力由粒子通过物质单位路程上的电离损失  $dE/dx$  衡量。其表达式由 Bohr-Bethe-Bloch 给出, 在通常情况下, 电子能量远大于轨道电子的结合能, 速度  $v$  大于电子的轨道速度, 靶电子可看作静止的, 其质量为  $m_e$ , 电荷为  $-e$ 。  $Z$  表示靶物质的原子序数,  $N$  为单位体积内靶原子数:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{2\pi e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 m_e v^2} N Z \left[ \ln \frac{m_e v^2 W}{2J^2(Z)(1-\beta)^2} + (1-\beta^2 - (2\sqrt{1-\beta^2})) \ln 2 + \frac{1}{8}(1-\sqrt{1-\beta^2})^2 \right]$$

其中,  $J(Z)$  与靶物质材料有关,  $\beta$  为电子相对论速度,  $W$  为电子动能,  $\epsilon_0$  为真空中介电常数。下图是电子束与石墨、铝、钛和铍四种物质相互作用过程中不同能量与单位长度能量损失的关系图。

利用 EGS4 软件编制 Mortron 程序模拟不同能量电子束穿过钛箔窗后能量损失情况, 从最终结果可以得出结论, 电子束初始能量越高, 透射后的束流能散越小, 相

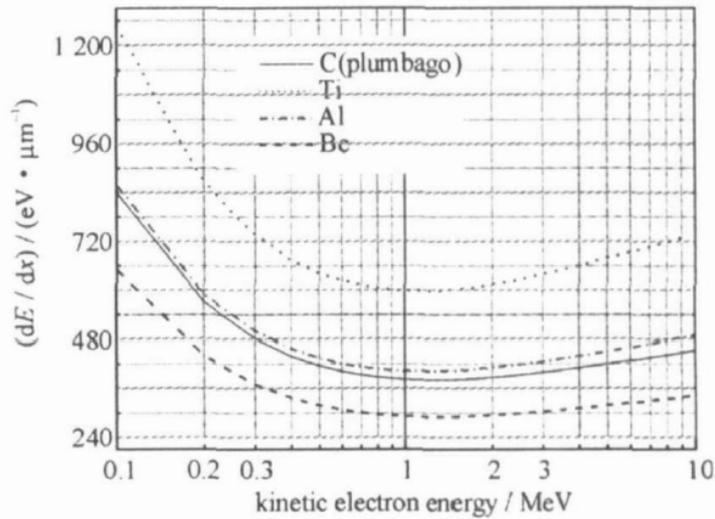


Fig. 1 Electron energy vs energy loss in different material

图 1 不同能量电子与单位长度能量损失关系

对能量损失越低。将模拟结果与只考虑电离损失的理论计算对比, 模拟结果能量损失偏高, 这是因为电子、光子簇射过程模拟过程中除了考虑激发电离过程外, 还考虑了韧致辐射及其它类型的辐射、带电粒子与原子核的相互作用、光电效应、康普顿散射以及电子对效应等。

电子束与烟气的的作用: 当电子束的能量小于 1 MeV 时, 电子束在物质中的穿透深度为 [1]

$$\lambda_{gas} = 6.7 \times 10^{-11} W^{5/3} / \rho$$

式中:  $\lambda_{gas}$  表示电子在物质中的穿透深度 (cm);  $W$  表示电子的动能 (eV);  $\rho$  表示物质的密度 ( $\text{g}/\text{cm}^3$ )。

下图是理论和利用 EGS4 软件编制 Mortron 程序模拟电子束在密度为  $1.200\text{kg}/\text{m}^3$  烟气中透射深度

从图中可以看到, 由于模拟计算过程中考虑了多种物理反应过程, 入射电子能量在 300 keV 以上时, 模拟计算透射深度均低于理论计算结果。

## 参考文献

- [1] B. Bogdanovitch *et al.*, Formation of bremsstrahlung flow with small divergence at linac output for planet surface sounding with interplanetary space stations, ParticleAcceleratorConference 1291-1293 (1999). <https://accelconf.web.cern.ch/p99/PAPERS/TUA91.PDF>

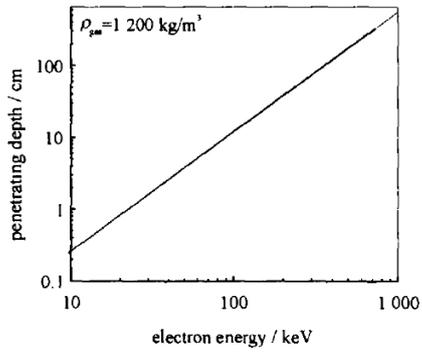


Fig. 5 Penetrating depth in flue gas(theory)

图 5 不同能量电子对应烟气中透射深度理论计算

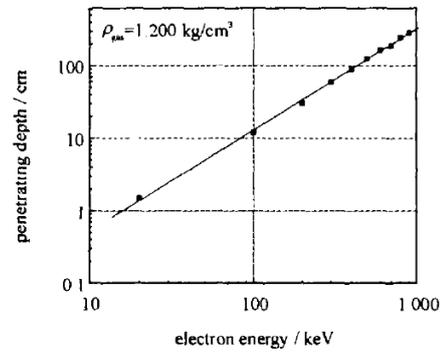


Fig. 6 Penetratingdepth in flue gas(simulation)

图 6 不同能量电子对应烟气中透射深度模拟计算

## 10 从有限长束团的尾场势计算点电荷的尾场 [PRST-AB 16-02]

### Point-charge wakefield calculations from finite length bunch wake potentials

#### 10.1 基本信息

- 分类：尾场、阻抗计算
- 作者：Boris Podobedov (BNL) and Gennady Stupakov (SLAC)
- 类型：理论、数值模拟
- 链接：<https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.16.024401>

#### 10.2 摘要

这篇论文为计算点电荷 (point-charge) 尾场势，特别是非平滑几何结构产生的尾场，或极短束团尾场势 (short-bunch wake potential) 提供一种创新方法。这种计算方法借助于已经获得的较长束团的尾场势，这些可通过解析方法或是时域数值计算得到。从另一个视角看，这篇论文提供的方法可以有效降低对极短束团或点电荷情况下尾场计算资源的要求<sup>8</sup>。论文后半部给出基于这种创新方法得到关于几种不同结构的尾场计算结果，包含 collimator 结构、谐振腔结构、线性渐变几何结构、平滑 (非线性) 渐变几何结构，还有基于 NSLS-II 设计的高次谐振腔结构的尾场计算。

#### 10.3 贡献或创新点

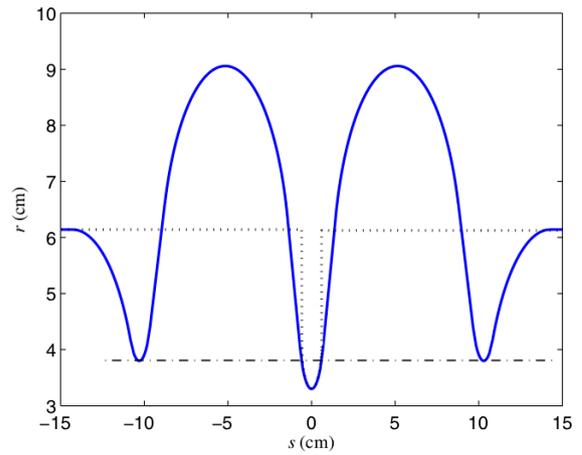
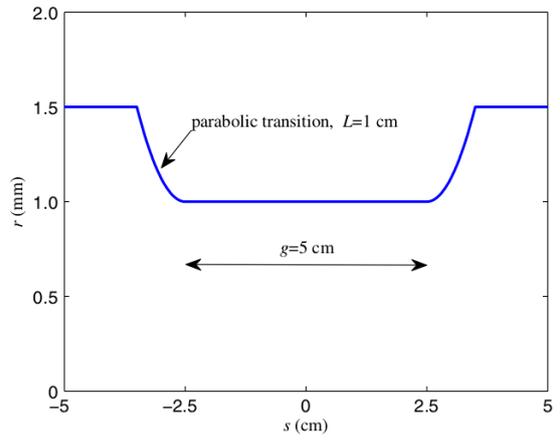
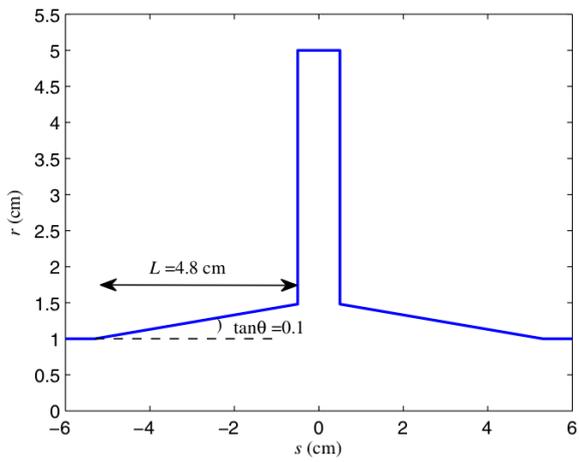
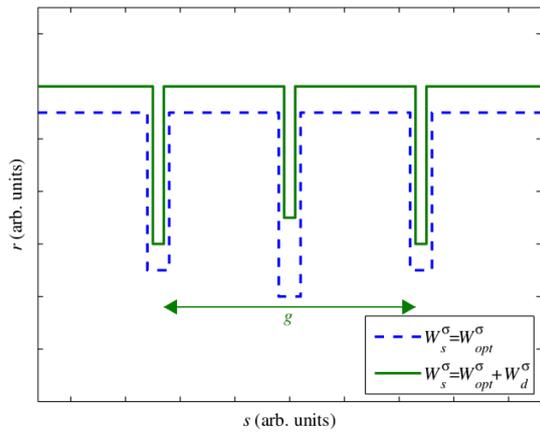
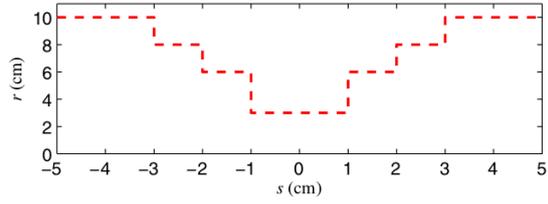
- 贡献：对于极短束长的尾场或阻抗计算，考虑固定的单位结构长度，对计算时间的需求大致与纵向网格尺寸  $\Delta z$  (mesh size) 的三次方 (对 2-D 结构) 或五次方 (对 3-D 结构) 成反比。尽管计算能力在过去二十年有了明显进展，对近代加速器尾场或阻抗计算的追求则是追过了计算机进展的速度。近代加速器对高亮度粒子束的要求，使得束团长度更短，在加速器尺寸维持或变得更大的情况下，计算要求日益增加。
- 创新点：按这篇论文 Section II 的描述，求解极短束团尾场势的思路可以条列如下

1. 从外部<sup>9</sup>方式得到较长束团的尾场势。这里的较长束团不是没有限制，由上限

---

<sup>8</sup>一般数值计算很难得到真正意义上的点电荷尾场函数。如果能获得点电荷尾场函数或格林函数，也许是解析或数值形式，那么在集体不稳定性分析就能推广到一般束团分布，具有一定重要性。

<sup>9</sup>这里的“外部”指的是独立于这篇论文获得尾场的方法，可能通过解析、逆傅立叶变换或是数值仿真得到。



$\lambda_g$  限制。 $\lambda_g$  的估算可以单纯由几何结构获得 (Section II.B)。简言之，这个步骤假设  $W^\sigma(z \leq \lambda_g)$  是给定的。

2. 对已知的不同结构下，找到极短束团渐进表示式  $W_s^\sigma(z)$ 。对于 collimator 结构 (step-in 或是 step-out)，有 Eq. (1)；对于谐振腔结构，有 Eq. (14)；对平滑 (非线性) 渐变几何结构，有 Eq. (21)。
3. 定义  $D^\sigma(z) = W^\sigma(z) - W_s^\sigma(z)$ 。注意到， $W^\sigma(z)$  目前是由外部方式得到，且对应于较长束团的情况。我们的目标是求解点电荷或极短束团尾场。
4. 在较长范围内，如  $z > 3\sigma_0$ ，其中  $\sigma_0$  为 rms 束长，要求  $D^\delta(z) = D^\sigma(z)$ 。在  $z \leq 3\sigma_0$  范围内，对  $D^\sigma(z)$  进行数值拟合，按  $D^\delta(z) \approx (\alpha + \beta z)H(z) \approx D^\sigma(z)$  方式或 Eq. (5) [稍微复杂些，假设束团为高斯分布] 进行，其中， $H(z)$  为 Heaviside step function。至此得到拟合系数  $\alpha$  与  $\beta$ 。
5. 至此，可以得到点电荷或极短束长尾场函数为

$$W^\delta(z) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} W_s^\sigma(z) + D^\delta(z)$$

★ 简单总结如下

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{外部得到 } W^\sigma(z) \\ \text{解析公式 } W_s^\sigma(z) \end{array} \right\} \Rightarrow D^\sigma(z) \Rightarrow D^\delta(z) \Rightarrow W^\delta(z)$$

## 10.4 其它

这篇论文虽然较长束团的尾场势是从 ECHO 程序<sup>10</sup>获得，但是获得短束团尾场的方法与使用的程序无关。

这篇论文对于加速器中产生的几何尾场的物理图像描述非常清楚，见 Section II.B，值得参考。在这篇论文中，求解点电荷或极短束团尾场势的思路是物理思维，非数学技巧。

---

<sup>10</sup><https://echo4d.de/>