高频电磁场–电磁波

蔡承颖[1]

华中科技大学电气与电子工程学院

---

[1] jcytsai@hust.edu.cn

几点说明

时变电磁场题型变化不大，一般有

1. **证明题**：列写麦克斯韦方程组，通过题目给定的假设，根据目标，推导各种简化形式的波方程或补全证明过程
   - 解波方程的一贯思路：先解波动因子 $\dot{Z} \propto e^{\mp z}$，再解波形因子 $\dot{\mathcal{E}}, \dot{\mathcal{H}}$。记住：$\Gamma^2 = K_c^2 - \omega^2 \mu \epsilon_c$，其中，$\epsilon_c = \epsilon - j\frac{\gamma}{\omega}$
   - 横纵向拆解：横向场 $\dot{\mathcal{E}}_\perp, \dot{\mathcal{H}}_\perp$ 用纵向场 $\dot{\mathcal{E}}_z, \dot{\mathcal{H}}_z$ 表示
   - 传播常数 $\Gamma = \alpha + j\beta$ 在不同媒质下的化简
2. **计算题**：一些基本公式或基本定义要掌握/记，时谐定义按照课程教科书定义
   - 时谐相量定义、波速 v、波长 λ、频率 f 或 (角) 频率 ω、相位常数 β、传播常数 $\Gamma = \alpha + j\beta$
   - 各种形态 (TM,TE,TEM) 波阻抗 Z 定义
   - $\Rightarrow$ 电磁波在分界面的反射 r、透射 t 系数定义
   - 趋肤深度 d 定义
   - 波导截止条件定义，知道波导如何工作
   - 天线辐射输出功率公式

必备 (背) 公式

- 色散关系 $\Gamma^2(\omega) = K_c^2 - \omega^2\mu\epsilon_c$，其中，$\Gamma(\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega)$
- 复介电系数 $\epsilon_c = \epsilon\left(1 - j\frac{\gamma}{\omega\epsilon}\right) = \epsilon - j\frac{\gamma}{\omega}$
- 趋肤深度 d 或衰减率 $\alpha = \frac{1}{d} = \sqrt{\pi f\mu\gamma}$
- 波阻抗

$$Z(\omega) \equiv \frac{\dot{E}_{\perp,\text{总}}}{\dot{H}_{\perp,\text{总}}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}} = \eta & \text{TEM} \\ \frac{\Gamma}{j\omega\epsilon_c} = \eta\sqrt{1 - \frac{f_c^2}{f^2}} & \text{TM} \\ \frac{j\omega\mu}{\Gamma} = \frac{\eta}{\sqrt{1-\frac{f_c^2}{f^2}}} & \text{TE} \end{cases}$$

  其中，$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{K_c}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}}$
- 波从媒质 1 打到媒质 2，分界面反射系数 r、透射系数 t

$$r(\omega) = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}}, \quad t(\omega) = \frac{2Z_{02}}{Z_{02} + Z_{01}}$$

- 矩形波导截止波数

$$K_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad \begin{cases} \text{TM:} & m, n \in \mathbb{N} \\ \text{TE:} & m, n \in \mathbb{N}\ \text{或其中之一为}0 \end{cases}$$

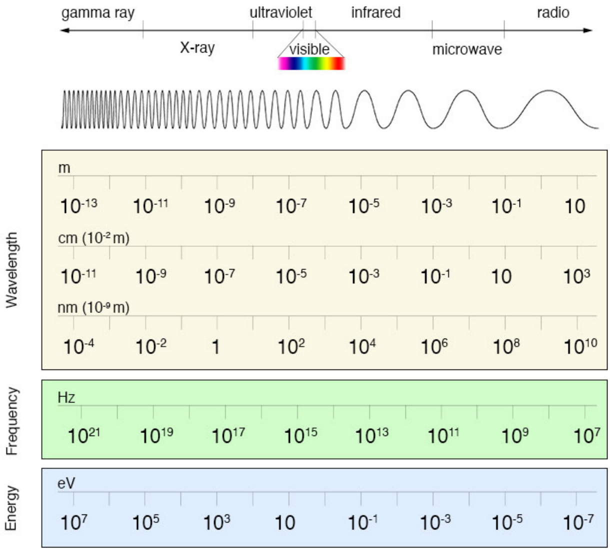
- 对 TEM，恒有 $K_c \equiv 0$ (中空、单一导体无法传播 TEM 波)
- 相速 $v_p \equiv \frac{\omega}{\beta}$、群速 $v_g \equiv \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\beta}$

篇章架构

除了定性介绍媒质特性外，时间所限，这一章将分三次课介绍：

- Part I: 波动、波形、波速、色散 $\Rightarrow$ §9.2、§9.4
- Part II: 平面电磁波、反射、透射 $\Rightarrow$ §9.3
- Part III: 波导、传输线、辐射 $\Rightarrow$ §9.5、§9.6

电磁波/电磁辐射频谱



gamma ray
ultraviolet
infrared
radio
X-ray
visible
microwave
Wavelength
m
10^{-13} 10^{-11} 10^{-9} 10^{-7} 10^{-5} 10^{-3} 10^{-1} 10
cm (10^{-2} m)
10^{-11} 10^{-9} 10^{-7} 10^{-5} 10^{-3} 10^{-1} 10 10^{3}
nm (10^{-9} m)
10^{-4} 10^{-2} 1 10^{2} 10^{4} 10^{6} 10^{8} 10^{10}
Frequency
Hz
10^{21} 10^{19} 10^{17} 10^{15} 10^{13} 10^{11} 10^{9} 10^{7}
Energy
eV
10^{7} 10^{5} 10^{3} 10 10^{-1} 10^{-3} 10^{-5} 10^{-7}

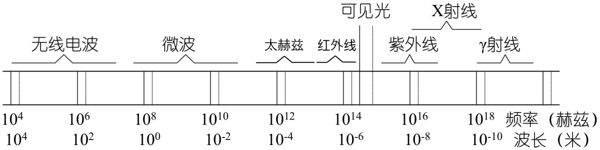
波与频率

大部分时候，研究波在不同媒质中的行为时，波速与波长随媒质而变，但波的频率不变[2]。频率 f 是单位时间内波振动或重复的次数，SI 单位为 Hz。周期是频率的倒数 $T = 1/f$，SI 单位为 sec。角频率定义为 $\omega = 2\pi f$，SI 单位为 rad/sec。

在同一媒质中，电磁波传播速率是

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

不随参照系而变。波速、波长、频率恒有 $\boxed{v = f\lambda}$ 关系。



[2]注意，此处所说的不变，与相对论中涉及不同参照系的不变量不是一回事。

媒质在时变电磁场作用时概念的推广

媒质在外加电磁场作用下，有传导、极化、磁化。

- 传导: 自由电荷定向运动 $\Rightarrow$ 电导率 γ
- 极化: 束缚电荷形成电偶极子 $\Rightarrow$ 介电常数 ϵ
- 磁化: 分子环流形成磁偶极子 $\Rightarrow$ 磁导率 μ

在时变电磁场中，形成以上过程需要有限时间 $\Rightarrow \gamma, \epsilon, \mu$ 有频率的依存关系。恒定电流场的热效应，在时变电磁场中，极化或磁化也有相应的损耗 $\Rightarrow \gamma, \epsilon, \mu$ 一般为复数。这些媒质在时变电磁场的频率特性也相应地反映在电磁波的传播特性上 $\Rightarrow$ 色散关系 (dispersion relation)。

媒质电导率一般在时变电磁场频率低于微波频段时仍可看作常数，频率更高的频段 (如，太赫兹、红外光) 就不再是常数。

媒质电磁特性的一般分析方法涉及量子力学，尽管经典电磁场理论有直观的优势。

一种沿固定方向传播的电磁波

讨论将分为两个方面

- $\boxed{\text{波动问题}}$: 研究电磁波沿传播方向的行波、驻波以及与负载的匹配等传播方式问题 (包含了传输线理论)
- $\boxed{\text{波形问题}}$: 研究电磁波在垂直传播方向的横截面内的分布规律，也就是场结构或场模式

讨论将先从纵向波动问题开始，接着横向波形问题。

分析将从时谐相量表示的波动方程 [Helmholtz 方程] 开始

$$\begin{cases} \nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + \omega^2 \mu \epsilon_c \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{0} \\ \nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + \omega^2 \mu \epsilon_c \dot{\mathbf{H}} = \mathbf{0} \end{cases}$$

$\boxed{\text{提醒：以下介绍的是一种分析电磁波问题的系统方法。}}$

波动因子 $\dot{Z}(z) \Rightarrow$ 波怎么动、怎么沿传播方向演化

利用以下方式将 z 的依存关系与 (x, y) 解耦[3]

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}}(x, y, z) &= \dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(x, y)\dot{Z}(z) \\ &= \left[\dot{\mathcal{E}}_x(x, y)\mathbf{e}_x + \dot{\mathcal{E}}_y(x, y)\mathbf{e}_y + \dot{\mathcal{E}}_z(x, y)\mathbf{e}_z\right]\dot{Z}(z) \\ &= \dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_\perp(x, y)\dot{Z}(z) + \dot{\mathcal{E}}_z(x, y)\dot{Z}(z)\mathbf{e}_z\end{aligned}$$

$$\nabla^2 = \nabla_\perp^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad [\nabla_\perp\text{可以是直角坐标或圆柱坐标}]$$

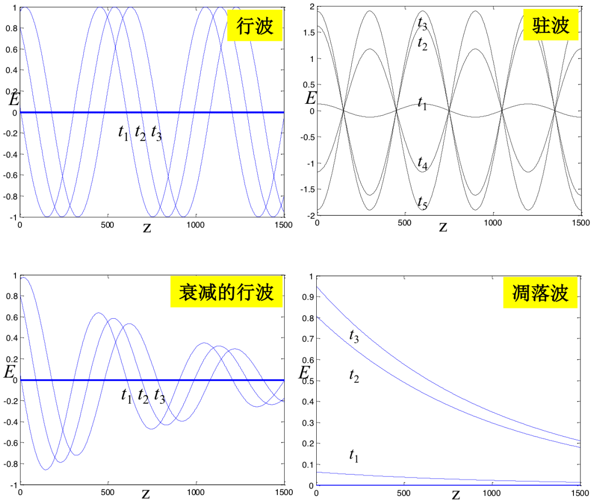
波动因子遵循

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\dot{Z}(z) - \Gamma^2\dot{Z}(z) = 0 \Rightarrow \dot{Z}(z) = A^+e^{-\Gamma z} + A^-e^{\Gamma z}$$

其中，复传播常数 $\boxed{\Gamma = \alpha + j\beta}$，$\alpha$ 称为衰减常数 (attenuation constant)，β 为相位常数或波数 (wavenumber)。

[3] 只有“函数关系”解耦，横向与纵向“方向”还没解耦

波动的传播特性 (图 9-4-3)



波形因子 $\dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}, \dot{\boldsymbol{\mathcal{H}}} \Rightarrow$ 波长什么样、横向、纵向

将波动因子 $\dot{Z}(z)$ 代人 Helmholtz 方程，可得矢量波形因子所遵循的方程

$$\nabla_\perp^2 \dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(x, y) + \left(\omega^2 \mu \epsilon_c + \Gamma^2\right) \dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(x, y) = \mathbf{0}$$

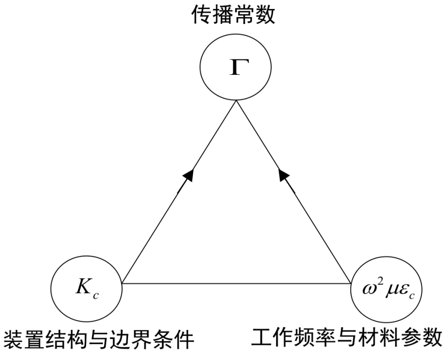
注意，$\dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(x, y)$ 有三个方向，ϵ_c 为复介电系数。此处定义一个重要参数，称截止波数 K_c (cutoff wavenumber)
$\boxed{K_c^2 = \omega^2 \mu \epsilon_c + \Gamma^2}$。
以上方程可以拆解成横向与纵向，有

$$\nabla_\perp^2 \begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_\perp(x, y) \\ \dot{\mathcal{E}}_z(x, y) \end{Bmatrix} + K_c^2 \begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_\perp(x, y) \\ \dot{\mathcal{E}}_z(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

对磁场而言，也有以上结果

$$\nabla_\perp^2 \begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_\perp(x,y) \\ \dot{\mathcal{H}}_z(x,y) \end{Bmatrix} + K_c^2 \begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_\perp(x,y) \\ \dot{\mathcal{H}}_z(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

上面介绍了复传播常数 Γ 与截止波数 K_c，还有电磁波频率等，到底谁决定谁？以下图例表示三个参数之间关系



波形因子的横向解可用纵向解表示

不失一般性，假设电磁场往 $+z$ 定向传播，欲解[4]

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{E}}(x,y,z;\omega) = \dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(x,y;\omega)\,e^{-\Gamma z} \\ \dot{\mathbf{H}}(x,y,z;\omega) = \dot{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(x,y;\omega)\,e^{-\Gamma z} \end{cases}$$

其中，$\dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}, \dot{\boldsymbol{\mathcal{H}}}$ 包含横向 $\dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_\perp, \dot{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_\perp$ 与纵向 $\dot{\mathcal{E}}_z, \dot{\mathcal{H}}_z$ 分量。以下定理表明只要知道纵向分量，横向分量可以与之关联。

时谐场 $=$ 波形因子 $\times$ 波动因子，其中，

波动因子 $e^{\mp\Gamma z}$ 已坐标解耦 (x,y) 与 z

波形因子将分量解耦 $\dot{\mathcal{E}}_{x,y}, \dot{\mathcal{H}}_{x,y}$ 与 $\dot{\mathcal{E}}_z, \dot{\mathcal{H}}_z$

[4] 此处写上 ω，强调该量属频域物理量。

定理：$\dot{\mathcal{E}}_\perp, \dot{\mathcal{H}}_\perp$ 的 $\dot{\mathcal{E}}_z, \dot{\mathcal{H}}_z$ 表示 (直角坐标)

已知 $\dot{\mathcal{E}}_z, \dot{\mathcal{H}}_z$ **不全为** 0，通过法拉第电磁感应定律 ($\nabla\times\dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\dot{\mathbf{H}}$) 与全电流定律 ($\nabla\times\dot{\mathbf{H}} = j\omega\epsilon_c\dot{\mathbf{E}}$)，有

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{E}}_x(x,y;\omega) = \dfrac{-1}{K_c^2}\left(j\omega\mu\dfrac{\partial\dot{\mathcal{H}}_z}{\partial y} + \Gamma\dfrac{\partial\dot{\mathcal{E}}_z}{\partial x}\right) \\ \dot{\mathcal{E}}_y(x,y;\omega) = \dfrac{1}{K_c^2}\left(j\omega\mu\dfrac{\partial\dot{\mathcal{H}}_z}{\partial x} - \Gamma\dfrac{\partial\dot{\mathcal{E}}_z}{\partial y}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{H}}_x(x,y;\omega) = \dfrac{1}{K_c^2}\left(j\omega\epsilon_c\dfrac{\partial\dot{\mathcal{E}}_z}{\partial y} + \Gamma\dfrac{\partial\dot{\mathcal{H}}_z}{\partial x}\right) \\ \dot{\mathcal{H}}_y(x,y;\omega) = \dfrac{-1}{K_c^2}\left(j\omega\epsilon_c\dfrac{\partial\dot{\mathcal{E}}_z}{\partial x} - \Gamma\dfrac{\partial\dot{\mathcal{H}}_z}{\partial y}\right) \end{cases}$$

★ 推导见 §9.2.2，表 9-2-1 整理了以上结果。不妨尝试导出圆柱坐标下的结果与独立于坐标系的一般形式。

返回波导边界条件、返回波导 TM 模

在直角坐标系下，写成矩阵形式，有

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathcal{E}}_x \\ \dot{\mathcal{E}}_y \\ \dot{\mathcal{H}}_x \\ \dot{\mathcal{H}}_y\end{bmatrix} = \frac{-1}{K_c^2}\begin{pmatrix}\Gamma & 0 & 0 & j\omega\mu \\ 0 & \Gamma & -j\omega\mu & 0 \\ 0 & -j\omega\epsilon_c & \Gamma & 0 \\ j\omega\epsilon_c & 0 & 0 & \Gamma\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial\dot{\mathcal{E}}_z}{\partial x} \\ \frac{\partial\dot{\mathcal{E}}_z}{\partial y} \\ \frac{\partial\dot{\mathcal{H}}_z}{\partial x} \\ \frac{\partial\dot{\mathcal{H}}_z}{\partial y}\end{bmatrix}$$

如果尝试导出在圆柱坐标下的结果并写成矩阵形式，会发现变换矩阵形式不变。

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathcal{E}}_\rho \\ \dot{\mathcal{E}}_\phi \\ \dot{\mathcal{H}}_\rho \\ \dot{\mathcal{H}}_\phi\end{bmatrix} = \frac{-1}{K_c^2}\begin{pmatrix}\Gamma & 0 & 0 & j\omega\mu \\ 0 & \Gamma & -j\omega\mu & 0 \\ 0 & -j\omega\epsilon_c & \Gamma & 0 \\ j\omega\epsilon_c & 0 & 0 & \Gamma\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial\dot{\mathcal{E}}_z}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial\dot{\mathcal{E}}_z}{\partial \phi} \\ \frac{\partial\dot{\mathcal{H}}_z}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial\dot{\mathcal{H}}_z}{\partial \phi}\end{bmatrix}$$

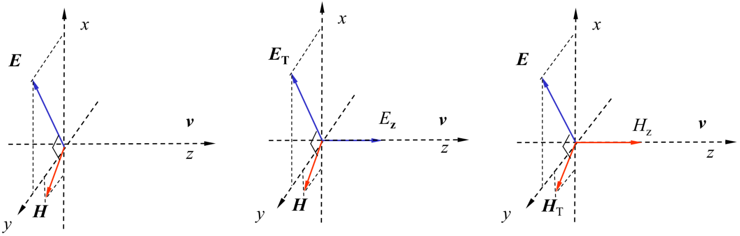
事实上，对于任意正交坐标系，变换矩阵形式同上。

波形：电磁波定向传播的几个类型

定义：电磁波为横波，可分 TM, TE, TEM 波

根据边界条件与传播方向 (假设 z)，有

- 横磁波 (TM): $E_z \neq 0, H_z = 0$
- 横电波 (TE): $E_z = 0, H_z \neq 0$
- 横电磁波 (TEM): $E_z = 0, H_z = 0$



(a) TEM (b) TM (c) TE

Case 1: TM ($E_z \neq 0, H_z = 0$)

先求解

$$\nabla_\perp^2 \dot{\mathcal{E}}_z(x,y) + K_c^2 \dot{\mathcal{E}}_z(x,y) = 0$$

然后利用定理，得 $\dot{\mathcal{E}}_x, \dot{\mathcal{E}}_y, \dot{\mathcal{H}}_x, \dot{\mathcal{H}}_y$，写成矢量形式，有

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_\perp = -\dfrac{\Gamma}{K_c^2}\nabla_\perp \dot{\mathcal{E}}_z = -\dfrac{\Gamma}{j\omega\epsilon_c}\mathbf{e}_z \times \dot{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_\perp \\ \dot{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_\perp = -\dfrac{j\omega\epsilon_c}{K_c^2}\mathbf{e}_z \times \nabla_\perp \dot{\mathcal{E}}_z = \dfrac{j\omega\epsilon_c}{\Gamma}\mathbf{e}_z \times \dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_\perp \end{cases}$$

方向构成右手定则。定义 TM 波形的复阻抗为

定义：TM 波阻抗 (TM wave impedance)

$$Z_{\mathrm{TM}}(\omega) \equiv \frac{\mathbf{e}_z \times \dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_\perp}{\dot{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_\perp} = \frac{\dot{\mathcal{E}}_x}{\dot{\mathcal{H}}_y} = \frac{\Gamma}{j\omega\epsilon_c} \quad \text{[SI 单位: } \Omega]$$

Case 2: TE ($E_z = 0, H_z \neq 0$)

先求解

$$\nabla_\perp^2 \dot{\mathcal{H}}_z(x,y) + K_c^2 \dot{\mathcal{H}}_z(x,y) = 0$$

然后利用定理，得 $\dot{\mathcal{E}}_x, \dot{\mathcal{E}}_y, \dot{\mathcal{H}}_x, \dot{\mathcal{H}}_y$，写成矢量形式，有

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_\perp = -\dfrac{\Gamma}{K_c^2}\nabla_\perp \dot{\mathcal{H}}_z = \dfrac{\Gamma}{j\omega\mu}\mathbf{e}_z \times \dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_\perp \\ \dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_\perp = \dfrac{j\omega\mu}{K_c^2}\mathbf{e}_z \times \nabla_\perp \dot{\mathcal{H}}_z = -\dfrac{j\omega\mu}{\Gamma}\mathbf{e}_z \times \dot{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_\perp \end{cases}$$

方向构成右手定则。定义 TE 波形的复阻抗为

定义：TE 波阻抗 (TE wave impedance)

$$Z_{\mathrm{TE}}(\omega) \equiv \frac{\dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_\perp}{\dot{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_\perp \times \mathbf{e}_z} = \frac{\dot{\mathcal{E}}_x}{\dot{\mathcal{H}}_y} = \frac{j\omega\mu}{\Gamma} \quad [\text{SI 单位: } \Omega]$$

Case 3: TEM $E_z = 0, H_z = 0$

前述定理不适用。对于非零解 (nontrivial solution)，由定理知 $K_c = 0$。回到 $\dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_\perp$ 或 $\dot{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_\perp$ 的方程求解

$$\nabla_\perp^2 \begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_\perp(x, y) \\ \dot{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_\perp(x, y) \end{Bmatrix} = \mathbf{0}$$

知道其中一种场的解，则通过法拉第定律或全电流定律可求另一种场

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \dfrac{\Gamma}{j\omega\mu} \mathbf{e}_z \times \dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}} \\ \dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = -\dfrac{\Gamma}{j\omega\epsilon_c} \mathbf{e}_z \times \dot{\boldsymbol{\mathcal{H}}} \end{cases}$$

定义：TEM 波阻抗 (TEM wave impedance)

$$Z_{\text{TEM}}(\omega) \equiv \frac{\mathbf{e}_z \times \dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}}{\dot{\boldsymbol{\mathcal{H}}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}} \overset{\gamma=0}{=} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \equiv \eta \quad [\text{SI 单位: } \Omega]$$

关于以上三种波形的一些重要性质整理如下:

- $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 方向即传播常数方向 $\mathbf{\Gamma} = \Gamma \mathbf{e}_z$ (也是波印亭矢量方向)
- 对 TEM 波，在真空 (自由空间) 中，有[5] $\eta \approx 120\pi \approx 377\ \Omega$
- 在 TE 与 TM 波中，要求 $K_c^2 = \omega^2 \mu \epsilon_c + \Gamma^2$，即，存在截止频率 ω_c (截止 $\Leftrightarrow \Gamma = 0$)

$$\omega_c = \frac{K_c}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

- 若电磁波低于截止频率，则无法在媒质中传播

[5] $\mu_0/4\pi = 10^{-7}, 1/4\pi\epsilon_0 \approx 9 \times 10^9$

- 对于 TEM 波，有

$$\nabla_{\perp}^{2}\begin{Bmatrix}\dot{\mathcal{E}}_{\perp}(x,y)\\ \dot{\mathcal{H}}_{\perp}(x,y)\end{Bmatrix}=\mathbf{0}\Rightarrow\nabla_{\perp}^{2}\begin{Bmatrix}\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\\ \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{r})\end{Bmatrix}=\mathbf{0}$$

  且由法拉第感应定律与全电流定律 (pp.280-281) 有

$$\nabla_{\perp}\times\begin{Bmatrix}\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\\ \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{r})\end{Bmatrix}=\mathbf{0}.$$

  知，在“横向”截面内，TEM 波的电磁场分布满足二维拉普拉斯方程，且为无旋场，与静态场分布类似[6,7]，又称横向似静场
- TEM 波是传输线理论的基础，TE/TM 波是波导理论的基础

[6]因此，许多所学的解题技巧可以套用在 TEM 横向波形分布上。

[7]但不全一样，TEM 波有波动因子 $e^{\pm\Gamma z}$，静态场则无。

- 中空、单一导体无法传播 TEM 波 (空导体如何产生静电场?)

证明

TEM 波的解 $\dot{\mathbf{E}} = \dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_\perp e^{-\Gamma z}$ 满足 $\nabla_\perp \times \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$ 与 $\nabla_\perp \cdot \dot{\mathbf{E}} = 0$，形同静电场。中空、单一导体中若无净电荷，则静电场为 $\mathbf{0}$，也就无法传播 TEM 波。 □

- TEM 波无截止频率，TE 波阻抗还可以写成 $Z_{\text{TE}} = \frac{\eta}{\sqrt{1-\frac{f_c^2}{f^2}}}$，类似地，TM 波有 $Z_{\text{TM}} = \eta\sqrt{1-\frac{f_c^2}{f^2}}$，其中，称 $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ 为本质阻抗 (intrinsic impedance)

电磁波中的各种波速

电磁波带有相位、波包 (电磁波含多个频率时)、能流等信息，各别传播速度未必相同。

定义：相速、群速、能速

- 相速 (phase velocity): 具有频率 ω 的波的等相位面运动速度 $\Rightarrow v_p(\omega) \equiv \frac{\omega}{\beta(\omega)}$
- 群速 (group velocity): 具有多个频率形成的波包运动速度 $\Rightarrow$ 在某一特定频率 ω_0 下 (如，中心频率)，$v_g(\omega_0) \equiv \left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\beta(\omega)}\right|_{\omega_0} = \left(\left.\frac{\mathrm{d}\beta(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega_0}\right)^{-1}$
- 能速 (energy velocity): 具有频率 ω 的波，在一个周期内，具有能量体密度
$w_{\text{EM,ave}} = w_{\text{e,ave}} + w_{\text{m,ave}}$ 的电磁场通过单位截面功率 S_{ave}[SI 单位: J/m^2-sec] 的比值
$\Rightarrow v_e(\omega) \equiv \frac{S_{\text{ave}}}{w_{\text{EM,ave}}}$

定义：色散物质、正常/反常色散

对于不同频率的电磁波会有不同相速的媒质，称为色散物质 (dispersive medium)，即 β 为 ω 的函数

- $\frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\omega} < 0$ 或 $\frac{\mathrm{dRe}\ \epsilon}{\mathrm{d}\omega} > 0$ 称正常 (normal) 色散
- $\frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\omega} > 0$ 或 $\frac{\mathrm{dRe}\ \epsilon}{\mathrm{d}\omega} < 0$ 称反常 (anomalous) 色散

性质：各种波速的性质

1. 群速与相速可以互相关联，有

$$v_g = \frac{v_p}{1 - \frac{\omega}{v_p}\frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\omega}}$$

2. 电磁波通过色散物质，一般 $v_p \neq v_g$，有 $v_p > c, v_g < c, v_p v_g = c^2$

性质：各种波速的性质 (续)

3. 若电磁波通过无色散物质，则 $v_e = v_g = v_p$
   若电磁波通过正常色散物质，则 $v_e = v_g < v_p$
   若电磁波通过反常色散物质，则 $v_e \neq v_g > v_p$

以上讨论了几种典型的波形类型，结束本节前，我们说明一下，除了常见的 TEM、TE、TM 波，还有混合 (hybrid) 形式，称 HEM 波，其中 $E_z \neq 0, H_z \neq 0$。这种波形一般出现在需要 TE 与 TM 波同时存在才能满足边界条件的材料或结构中。

TEM、TE、TM 波的波动因子

前面讨论了波动因子，还介绍了四种波动特性，有行波、驻波、衰减行波、凋落波。以下针对常见的几种波形，讨论它们的波动特性。

§9.4 TEM 在同一媒质对向传播、不同媒质分界面行为

§9.5 TE/TM 在波导、传输线行为

均匀平面电磁波 (uniform plane wave)

是一种最简单的、无界空间、定向传播的时变电磁波，属TEM 波[8]。这个理想模型提供了一个对于部分真实情况的近似。

定义：等相位面、等振幅面、均匀平面波

- 等相位面 (equi-phase surface)：在同一时刻 t，相位相同的点构成的面。
- 等振幅面 (equi-amplitude surface)：在同一时刻 t，振幅相同的点构成的面。
- 平面波：等相位面为平面，如 $\mathbf{E}(r)\sin(\omega t-\beta z)$；球面波：等相位面为球面，如 $\mathbf{E}(r)\sin(\omega t-\beta r)$。
- 均匀平面波：等相位面为平面，且等相位面上各点的场强都相等，即等相位面和等振幅面相重合的平面波，如 $e^{-\alpha z}\sin(\omega t-\beta z)$。但 $e^{-\alpha x}\sin(\omega t-\beta z)$ 是非均匀平面波。

[8]均匀平面电磁波 $\Rightarrow$ TEM 波，但反向未必成立。

对均匀平面电磁波，在理想介质中，有

定理

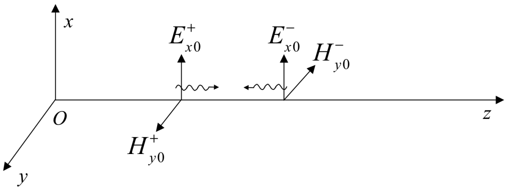
均匀平面电磁波的电场能量密度与磁场能量密度相等。这里的能量密度可以是平均能量密度，也可以是瞬时能量密度，即 $w_e = w_m$，其中

$$w_e = \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}, \quad w_m = \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}$$
$$w_e = w_m, \quad w_{\mathsf{EM}} = w_e + w_m = \epsilon|\mathbf{E}|^2 = \mu|\mathbf{H}|^2$$

注意，这里的 $(E, B) = |\mathbf{E}, \mathbf{B}|$ 为方均根 (rms) 振幅。峰值振幅为 $\sqrt{2}(E, B)$。

证明

均匀平面电磁波为 TEM 波，在理想介质中，波阻抗为 $Z = \sqrt{\mu/\epsilon}$。参考教科书式 (9-3-32)。 $\square$



均匀平面 (TEM) 电磁波的通解形式为

$$\begin{cases} \dot{E}_x = \mathcal{E}_{x0}^+ e^{-\Gamma z} + \mathcal{E}_{x0}^- e^{\Gamma z} \\ \dot{H}_y = \dfrac{1}{Z_{\text{TEM}}} \left(\mathcal{E}_{x0}^+ e^{-\Gamma z} - \mathcal{E}_{x0}^- e^{\Gamma z}\right) \end{cases}$$

其中，$\Gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon_c} = \alpha + j\beta$ $(K_c = 0)$[9]。注意，ϵ_c 为复数。
其中，$Z_{\text{TEM}} = |Z_{\text{TEM}}|\, e^{j\psi}$。瞬时表示式有

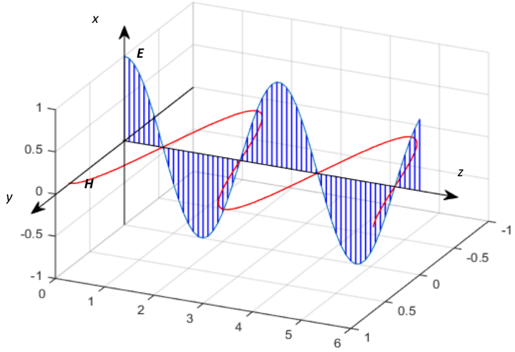
$$\begin{cases} E_x = \sqrt{2}E_{x0}^+ e^{-\alpha z}\sin(\omega t - \beta z) + \sqrt{2}E_{x0}^- e^{\alpha z}\sin(\omega t + \beta z) \\ H_y = \dfrac{\sqrt{2}E_{x0}^+}{|Z_{\text{TEM}}|} e^{-\alpha z}\sin(\omega t - \beta z - \psi) - \dfrac{\sqrt{2}E_{x0}^-}{|Z_{\text{TEM}}|} e^{\alpha z}\sin(\omega t + \beta z - \psi) \end{cases}$$

[9]注意，TEM 波没有截止波数，$K_c = 0$，因此，恒有 $\omega^2\mu\epsilon_c + \Gamma^2 = 0$。

TEM 波在理想介质 ($\gamma = 0, \epsilon_c = \epsilon, \Gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$)

有 $Z_{\text{TEM}}(\gamma = 0) = \eta \in \mathbb{R}$，瞬时表达式 (仅考虑入射波)

$$\begin{cases} E_x^+(z,t) = \sqrt{2}E_{0x}^+ \sin(\omega t - \beta z) \\ H_y^+(z,t) = \dfrac{\sqrt{2}E_{0x}^+}{\eta} \sin(\omega t - \beta z) \end{cases}$$



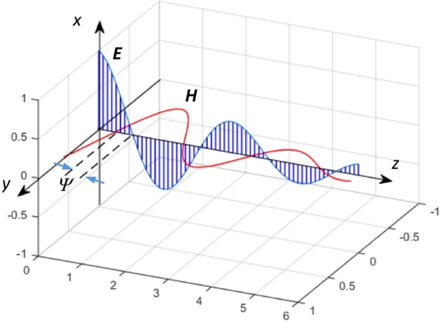
其它特性见表 9-4-1(旧版 9-2-2)。

TEM 波在良导体中

$(\gamma/\omega\epsilon \gg 1, \epsilon_c = -j\gamma/\omega, \Gamma = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}})$

有 $Z_{\text{TEM}} \approx \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} e^{j\frac{\pi}{4}}$，瞬时表达式 (仅考虑入射波)

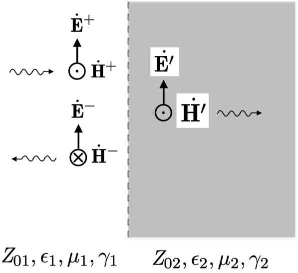
$$\begin{cases} E_x^+(z,t) = \sqrt{2}E_{0x}^+ e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z) \\ H_y^+(z,t) = \dfrac{\sqrt{2}E_{0x}^+}{\sqrt{\dfrac{\omega\mu}{\gamma}}} e^{-\alpha z} \sin\left(\omega t - \beta z - \dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$



例：TEM 波在不良导体中，极低频 (ELF) 电磁传输 ▸ 例题 1。

均匀平面电磁波的正向入射 (normal incidence) 与反射 (reflection)

前面讨论了均匀平面电磁波在理想介质 (如真空) 与良导体中的传播。以下探讨均匀平面电磁波在分界面附近的行为。为简化起见，假设正向 (垂直) 入/反射，见下图。



$$\begin{cases} \dot{\mathbf{E}}^+ = \dot{\mathcal{E}}^+_{x0} e^{-\Gamma_1 z} \mathbf{e}_x \\ \dot{\mathbf{H}}^+ = \dfrac{\dot{\mathcal{E}}^+_{x0}}{Z_{01}} e^{-\Gamma_1 z} \mathbf{e}_y \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{E}}^- = \dot{\mathcal{E}}^-_{x0} e^{\Gamma_1 z} \mathbf{e}_x \\ \dot{\mathbf{H}}^- = -\dfrac{\dot{\mathcal{E}}^-_{x0}}{Z_{01}} e^{\Gamma_1 z} \mathbf{e}_y \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{E}}' = \dot{\mathcal{E}}'_{x0} e^{-\Gamma_2 z} \mathbf{e}_x \\ \dot{\mathbf{H}}' = \dfrac{\dot{\mathcal{E}}'_{x0}}{Z_{02}} e^{-\Gamma_2 z} \mathbf{e}_y \end{cases}$$

一般情况下，媒质里是体电流，边界条件为

$$\dot{\mathbf{E}}_{1t}\Big|_{z=0} = \dot{\mathbf{E}}_{2t}\Big|_{z=0} \Rightarrow \dot{\mathcal{E}}_{x0}^{+} + \dot{\mathcal{E}}_{x0}^{-} = \dot{\mathcal{E}}'_{x0}$$

$$\dot{\mathbf{H}}_{1t}\Big|_{z=0} = \dot{\mathbf{H}}_{2t}\Big|_{z=0} \Rightarrow \frac{\dot{\mathcal{E}}_{x0}^{+}}{Z_{01}} - \frac{\dot{\mathcal{E}}_{x0}^{-}}{Z_{01}} = \frac{\dot{\mathcal{E}}'_{x0}}{Z_{02}}$$

定义：反射系数、透射系数

符号按照如上，有反射系数 r 与透射系数 t，定义为

$$r \equiv \frac{\dot{\mathcal{E}}_{x0}^{-}}{\dot{\mathcal{E}}_{x0}^{+}}, \quad t \equiv \frac{\dot{\mathcal{E}}'_{x0}}{\dot{\mathcal{E}}_{x0}^{+}} \quad (\text{恒有 } r^2 + t^2 = 1)$$

有 $r = \frac{Z_{02}-Z_{01}}{Z_{02}+Z_{01}}, t = \frac{2Z_{02}}{Z_{02}+Z_{01}}$，且 $t - r = 1$。例 9.3.2

电磁波在界面上的传播行为 $\Rightarrow$ 反射、透射、吸收。
若介质为均匀，则反射仅发生在交界面，吸收发生在介质内部。

1 侧 理想介质 \\ 2 侧	理想介质 $\gamma = 0, \alpha = 0$	理想导体 $\gamma \to \infty, \alpha = 0$ $\Gamma \to 0, r \to -1$	有耗良导体 $\gamma/\omega\epsilon \gg 1$ $\alpha > 0$	有耗不良导体 $\gamma/\omega\epsilon \ll 1$ $\alpha > 0$
正向入射	✓	✓		
斜向入射				

均匀平面电磁波在理想介质-理想介质分界面正向入射在 1 侧形成**行驻波**

从理想介质 1 至理想介质 2 ($\eta_2 > \eta_1$)，有

$$\Gamma_1 = j\beta_1 = j\omega\sqrt{\mu_1\epsilon_1}, \quad Z_{01} = \eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}$$

$$\Gamma_2 = j\beta_2 = j\omega\sqrt{\mu_2\epsilon_2}, \quad Z_{02} = \eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}}$$

$$r = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \in \mathbb{R}$$

入射场与反射场有

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{E}}^+ = \dot{\mathcal{E}}_{x0}^+ e^{-j\beta_1 z}\mathbf{e}_x \\ \dot{\mathbf{E}}^- = r\dot{\mathcal{E}}_{x0}^+ e^{j\beta_1 z}\mathbf{e}_x \end{cases}, \begin{cases} \dot{\mathbf{H}}^+ = \dfrac{\dot{\mathcal{E}}_{x0}^+}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z}\mathbf{e}_y \\ \dot{\mathbf{H}}^- = -r\dfrac{\dot{\mathcal{E}}_{x0}^+}{\eta_1} e^{j\beta_1 z}\mathbf{e}_y = r\dfrac{\dot{\mathcal{E}}_{x0}^+}{\eta_1} e^{j(\beta_1 z + \pi)}\mathbf{e}_y \end{cases}$$

性质

1. 对 $r > 0$ $(\eta_2 > \eta_1)$，电场是全波反射 (相位相同，振幅加强)，磁场半波反射 (相位差 π，振幅削弱)
2. 对 $r < 0$ $(\eta_2 < \eta_1)$，电场是半波反射 (相位差 π，振幅削弱)，磁场全波反射 (相位相同，振幅加强)
3. 理想介质 1 侧的合成电场或合成磁场含有部分行波，部分驻波 (行驻波)

$$e^{-j\beta_1 z} \pm re^{j\beta_1 z} = (1 \pm r)e^{-j\beta_1 z} \pm 2jr\sin\beta_1 z$$

4. 对于**均匀平面**电磁波在**理想介质-理想介质**分界面，r 与 t 皆为实数，且 $-1 \le r \le 1, 0 \le t \le 2$

均匀平面电磁波在理想介质-理想导体分界面正向入射在 1 侧形成**驻波**

从理想介质 1 至理想导体 2，有

$$\Gamma_1 = j\beta_1 = j\omega\sqrt{\mu_1\epsilon_1}, \quad Z_{01} = \eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}$$

$$\Gamma_2 = 0 \text{ (不存在、不传播)}, \quad Z_{02} = 0$$

$$r = \frac{0-\eta_1}{0+\eta_1} = -1$$

理想介质 1 侧的合成电场或磁场有

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{E}}^+ + \dot{\mathbf{E}}^- = \dot{\mathcal{E}}_{x0}^+ \left(e^{-j\beta_1 z} + re^{j\beta_1 z}\right) \mathbf{e}_x = -2j\dot{\mathcal{E}}_{x0}^+ \sin\beta_1 z\, \mathbf{e}_x \\ \dot{\mathbf{H}}^+ + \dot{\mathbf{H}}^- = \dfrac{\dot{\mathcal{E}}_{x0}^+}{\eta_1} \left(e^{-j\beta_1 z} - re^{j\beta_1 z}\right) \mathbf{e}_y = 2\dfrac{\dot{\mathcal{E}}_{x0}^+}{\eta_1} \cos\beta_1 z\, \mathbf{e}_y \end{cases}$$

性质

1. 恒有 $r = -1$ (完全反射)，电场是半波反射 (相位差 π)，磁场全波反射 (相位差相同)
2. 理想介质 1 侧的合成电场或磁场为驻波，或 $\mathbf{S}_{\text{ave}} = \mathbf{0}$
3. 承上，在理想介质 1 侧，设与分界面的距离为 d，当 $\beta_1 d = n\pi$ 时，电场为 $\mathbf{0}$，当 $\beta_1 d = (n + \frac{1}{2})\pi$ 时，磁场为 $\mathbf{0}$
4. 当电磁波接触理想导体时，会在导体侧产生感应电流，由于是理想导体，电流被严格限制在表面 (无趋肤效应)。或者说，此面电流对导体内部产生的电磁场，将和入射的电磁波 (仿佛传播至导体内部时) 相互抵消，确保理想导体**内部**不存在电磁场

均匀平面电磁波在理想介质-有耗导电媒质分界面附近行为 ♠

以上讨论的“理想介质-理想介质”与“理想介质-理想导体”都属于无耗损媒质。如果是有耗媒质，则 $\alpha \neq 0$。对于有耗导电媒质，再细分两种极端情况：良导体 $(\frac{\gamma}{\omega\epsilon} \gg 1)$ 与不良导体 $(\frac{\gamma}{\omega\epsilon} \ll 1)$。

上一章讨论过趋肤效应，在良导体侧，电磁场集中在导体表面，透入深度 $d = \alpha^{-1} = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu_2 \gamma_2}}$。因此，在良导体侧，电场与磁场可写出。

结合在分界面上无面电流时有 $H_{\text{切向}}$ 连续条件，与以上边界条件，可以很快写出电磁波自理想介质进入良导体侧表面附近的电场。分析细节此处不论。

均匀平面电磁波在理想介质-有耗导电媒质分界面附近行为

对于良导体与不良导体，通过化简

$\Gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{\mu\epsilon_c} = j\omega\sqrt{\mu\epsilon\left(1 - j\frac{\gamma}{\omega\epsilon}\right)}$ 表示式，分别有

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{\omega\epsilon}\right)^2}-1\right]} = \begin{cases} \frac{\gamma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}, & \frac{\gamma}{\omega\epsilon} \ll 1 \\ \sqrt{\frac{\omega\gamma\mu}{2}}, & \frac{\gamma}{\omega\epsilon} \gg 1 \end{cases}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{\omega\epsilon}\right)^2}+1\right]} = \begin{cases} \omega\sqrt{\mu\epsilon}\left[1+\frac{1}{8}\left(\frac{\gamma}{\omega\epsilon}\right)^2\right], & \frac{\gamma}{\omega\epsilon} \ll 1 \\ \sqrt{\frac{\omega\gamma\mu}{2}}, & \frac{\gamma}{\omega\epsilon} \gg 1 \end{cases}$$

上面推导需要用到以下结果： $a, b \in \mathbb{R}$

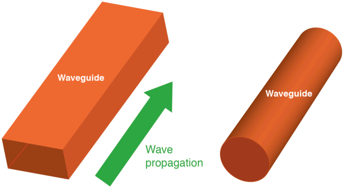
$$\mathrm{Re}\ \sqrt{a+jb} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}$$

$$\mathrm{Im}\ \sqrt{a+jb} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

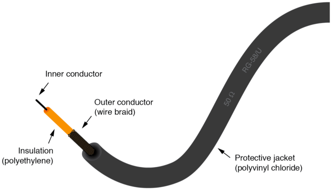
波导与传输线

定向传播电磁波 $\Rightarrow$ 能量和信号的传输。考虑到传输效率、欧姆损耗、辐射损耗与介电损耗等，有[10]

- 低频 ($\lambda > 10$ cm, $f <$ GHz): 双导线、同轴传输线 (transmission line)
- 高频 ($\lambda < 10$ cm, $f >$ GHz): 波导 (waveguide)



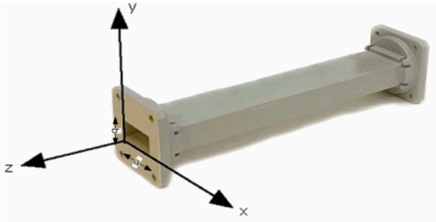
https://www.allaboutcircuits.com/textbook/alternating-current/chpt-14/waveguides/



https://www.allaboutcircuits.com/textbook/alternating-current/chpt-14/50-ohm-cable/

[10] 介于低频与高频之间，有微带线 (stripline)，属 (半) 开放微波结构。

波导：预备知识



波导与传输线常用频段

常用频段为无线电波与微波频段，又细分如下[11]

Band	Frequency range	wavelength range [cm]
HF	3-30 MHz	10-100 m
VHF[3]	30-300 MHz	1-10 m
UHF[3]	300-1000 MHz	30-100 cm
L	1-2 GHz	15-30 cm
S	2-4 GHz	7.5-15 cm
C	4-8 GHz	3.75-7.5 cm
X	8-12 GHz	2.5-3.75 cm
Ku	12-18 GHz	16.7-25 mm
K	18-27 GHz	11.1-16.7 mm
Ka	27-40 GHz	7.5-11.1 mm
V	40-75 GHz	4.0-7.5 mm
W	75-110 GHz	2.7-4.0 mm
mm	110-170 GHz	1.8-2.7 mm

[11] S.N. Anfinsen, Statistical Analysis of Multilook Polarimetric Radar Images with the Mellin Transform

波导: 预备知识

定义：波导 (waveguide)

在导体内部引导电磁波传播的装置 (导体内可能为真空或填充电介质) 称为波导。
若垂直于电磁波行进路径的截面，其形状、大小不变，又称均匀波导。

中空波导无法传输 TEM 波。

由电磁场特性知道，横向某一方向上两侧由理想导体建立的系统，电磁场在其间将形成横向**驻波**，可以是 TM 波或 TE 波。纵向传播与否根据 $\Gamma^2 = K_c^2 - \omega^2\mu\epsilon$ 决定。

如果横向仅有一个方向形成驻波，通常以一个下标标记 $\Rightarrow$ TE_n 或 TM_n 模。如果横向两个方向形成驻波，则以两个下标注记 $\Rightarrow$ TE_{mn} 或 TM_{mn} 模。(“波”$\Rightarrow$“模”)

波导: 预备知识

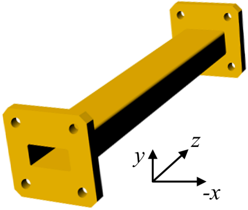
定义：截止频率、截止波长、截止波数、主要模式

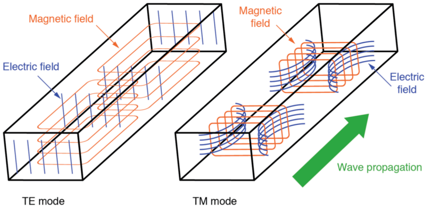
由于边界条件，电磁波横向场在波导内形成驻波，对传播的频率 (或波长) 局限，对每个模存在形成驻波的频率下限，称为截止频率，记作 f_c 或 ω_c，截止波长 $\lambda_c = \frac{2\pi}{K_c}$，其中 K_c 为截止波数。(截止 $\Leftrightarrow \Gamma = 0$)
在所有允许传播的模式中，具有最低截止频率的模称为主要模式 (dominant mode) 或基模 (fundamental mode)。其它称为高次模 (higher order mode, HOM)。

定理：单导体波导的截止频率表达式 (截止 $\Leftrightarrow \Gamma = 0$)

对于单导体中空波导，已知一特定模式的 $K_{c,mn}$(传播电磁场 $\mathbf{e}_z$ 分量的特征值)，则有 $\omega_{c,mn} = \frac{K_{c,mn}}{\sqrt{\mu\epsilon}}$，其中 μ, ϵ 为中空部分的磁导率与电容率。一般 TE、TM 模有不同的截止频率。

波导：预备知识





Magnetic flux lines appear as continuous loops
Electric flux lines appear with beginning and end points

https://www.allaboutcircuits.com/textbook/alternating-current/chpt-14/waveguides/

波导: TE 模、TM 模的边界条件 定理

如下图所示，TE 模、TM 模的边界条件满足**在波导侧壁上**有

- TE 模 (又称 H 模): E_z 恒为 0, $\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0$ ($\because E_{x,y} = 0$, 应用全电流定律)
- TM 模 (又称 E 模): H_z 恒为 0, E_z 恒为 0

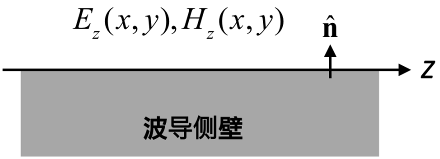


图: 在波导侧壁上单位法向量 $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$

矩形波导: 分离变量法在直角坐标系的应用

作为求解矩形波导内无源时变电磁场的解，数学上对应求解二阶偏微分方程。对于矩形波导，可以作为分离变量法在直角坐标系的直接应用。本节列写详细的推导过程，值得实际演练。按照上页规定的参照坐标，定向传播的波可以写成

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{E}}(x,y,z) = \dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(x,y)e^{-\Gamma z} \\ \dot{\mathbf{H}}(x,y,z) = \dot{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(x,y)e^{-\Gamma z} \end{cases}$$

代入 $\dot{\mathbf{E}}(x,y,z), \dot{\mathbf{H}}(x,y,z)$ 满足的波方程，纵向场满足

$$\begin{cases} \nabla_\perp^2 \dot{\mathcal{E}}_z(x,y) + K_c^2 \dot{\mathcal{E}}_z(x,y) = 0 \\ \nabla_\perp^2 \dot{\mathcal{H}}_z(x,y) + K_c^2 \dot{\mathcal{H}}_z(x,y) = 0 \end{cases}$$

其中，$K_c^2 = \omega^2\mu\epsilon + \Gamma^2$ (色散关系)、$\nabla_\perp^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$。单独研究电场波形，利用分离变量法，假设

$\boxed{\dot{\mathcal{E}}_z(x,y) = \mathcal{X}(x)\mathcal{Y}(y)}$，代入方程，有

$$\frac{\mathcal{X}''}{\mathcal{X}} + \frac{\mathcal{Y}''}{\mathcal{Y}} = -K_c^2 \Rightarrow -K_x^2 - K_y^2 = -K_c^2$$

由于 $\mathcal{X}$ 与 $\mathcal{Y}$ 互相独立，得两个常微分方程及其通解 (general solution)

$$\begin{cases} \mathcal{X}'' + K_x^2 \mathcal{X} = 0 \\ \mathcal{Y}'' + K_y^2 \mathcal{Y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{X} = A\sin K_x x + B\cos K_x x \\ \mathcal{Y} = C\sin K_y y + D\cos K_y y \end{cases}$$

电场的时谐相量表示包含波形与波动因子，有 $\dot{E}_z(x,y,z) = \dot{\mathcal{E}}_z(x,y)\,e^{-\Gamma z} = \mathcal{X}(x)\mathcal{Y}(y)\,e^{-\Gamma z}$。磁场也有类似的表示式。到目前为止，$A, B, C, D$ 仍待定，由边界条件约束。

注意，$\dot{E}_z, \dot{H}_z$ 其中之一是解方程得到的，

其它分量 $\dot{E}_{x,y}, \dot{H}_{x,y}$ 将通过定理得到。

矩形波导: TM 模 ($H_z = 0, E_z \neq 0$)

对 TM 模，有以下边界条件

$$\dot{\mathcal{E}}_z \Big|_{x=0,x=a,y=0,y=b} = 0$$

这些边界条件要求 $B = D = 0$，且对 K_x, K_y 加诸限制条件

$$K_x = \frac{m\pi}{a}, K_y = \frac{n\pi}{b}, \text{其中 } m, n \in \mathbb{N}$$

因此，电场纵向波形函数有

$$\dot{E}_z = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\Gamma z}$$

其中，E_0 仍为待定常数。K_x, K_y 由装置结构决定。截止波数 (m, n 要求皆为正整数)

$$K_c = \sqrt{K_x^2 + K_y^2} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon + \Gamma^2}$$

矩形波导: TM 模 ($H_z = 0, E_z \neq 0$)

根据前面定理 ▸定理，给定纵向波形函数，则横向波形函数也可获得，有

$$\begin{cases} \dot{E}_x = -\frac{\Gamma}{K_c^2}\frac{m\pi}{a}E_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\Gamma z} \\ \dot{E}_y = -\frac{\Gamma}{K_c^2}\frac{n\pi}{b}E_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\Gamma z} \\ \dot{H}_x = j\frac{\omega\epsilon}{K_c^2}\frac{n\pi}{b}E_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\Gamma z} \\ \dot{H}_y = -j\frac{\omega\epsilon}{K_c^2}\frac{m\pi}{a}E_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\Gamma z} \end{cases}$$

其中，$K_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$、$\Gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{K_c^2 - \omega^2\mu\epsilon}$。

矩形波导: TE 模 ($H_z \neq 0, E_z = 0$)

对 TE 模而言，边界条件 $E_t = 0$ 恒成立，有 $\dot{\mathcal{E}}_x\big|_{y=0,y=b} = 0, \dot{\mathcal{E}}_y\big|_{x=0,x=a} = 0$。纵向波形函数为磁场函数 $\dot{\mathcal{H}}_z$，边界条件有

$$\frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_z}{\partial y}\Big|_{y=0,y=b} = 0, \frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_z}{\partial x}\Big|_{x=0,x=a} = 0$$

类似地，利用分离变量法，$\dot{\mathcal{H}}_z(x,y) = \mathcal{X}(x)\mathcal{Y}(y)$，写出 $\mathcal{X}$ 与 $\mathcal{Y}$ 的通解，代入以上边界条件，要求 $A = C = 0$，且加诸 K_x, K_y 有限制条件。因此，磁场纵向波形函数有

$$\dot{H}_z(x,y) = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\Gamma z}$$

截止波数 (m, n 要求皆为正整数**或**其中之一可为 0)

$K_c = \sqrt{K_x^2 + K_y^2} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon + \Gamma^2}$。

矩形波导: TE 模 $(H_z \neq 0, E_z = 0)$

根据前面定理，给定纵向波形函数，则横向波形函数也可获得，有

$$
\begin{cases}
\dot{E}_x = j\dfrac{\omega\mu}{K_c^2}\dfrac{n\pi}{b}H_0\cos\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)e^{-\Gamma z} \\
\dot{E}_y = -j\dfrac{\omega\mu}{K_c^2}\dfrac{m\pi}{a}H_0\sin\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)e^{-\Gamma z} \\
\dot{H}_x = \dfrac{\Gamma}{K_c^2}\dfrac{m\pi}{a}H_0\sin\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)e^{-\Gamma z} \\
\dot{H}_y = \dfrac{\Gamma}{K_c^2}\dfrac{n\pi}{b}H_0\cos\left(\dfrac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{b}y\right)e^{-\Gamma z}
\end{cases}
$$

其中，$K_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$、$\Gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{K_c^2 - \omega^2\mu\epsilon}$。

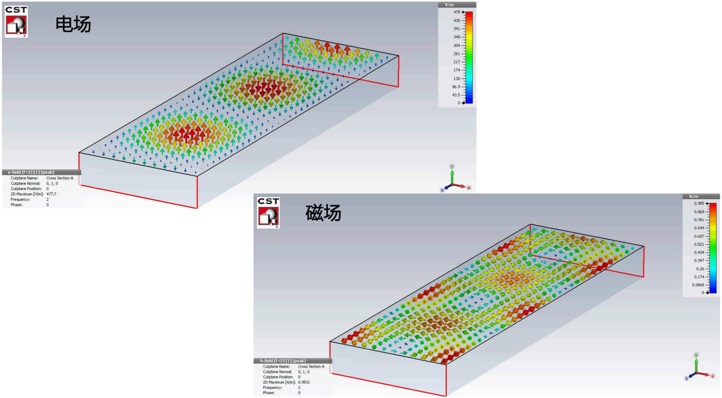
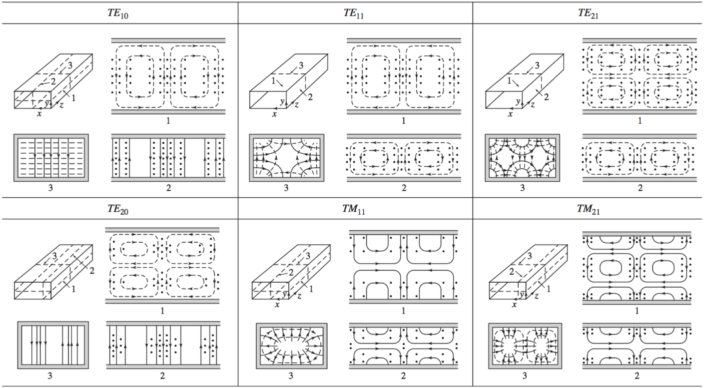


图: TE_{10} 模。参考教科书图 9-5-3。


TE10
TE11
TE21
TE20
TM11
TM21

矩形波导: 传播特性

矩形波导 TE 与 TM 模的截止波数表示式是一样的 $\Rightarrow K_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$，但 TE 模式允许其中一个下标为 0，TM 模式则要求下标必须皆为正整数。截止波长 $\lambda_c = \frac{2\pi}{K_{c,mn}}$。

定义：简并模式

具有相同 (m, n)，相同 K_c(与 λ_c)、相同相速、相同群速与相同波导波长的 TE 与 TM 模式，称为简并 (degenerate) 模式。

定义：波导波长

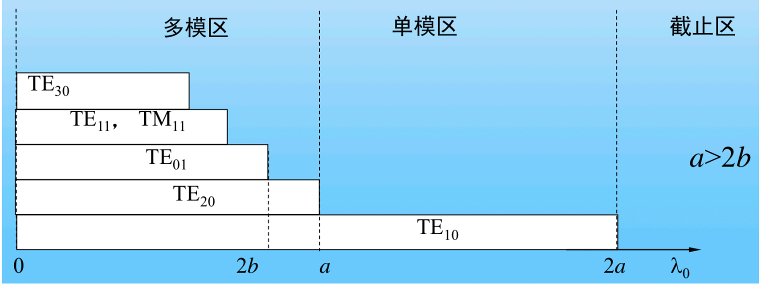
定义为 $\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta}$。

当电磁场能够传播，表示 $\Gamma \equiv \alpha + j\beta$，其中 $\alpha = 0$ (假设无衰减)。在以上例子中，有

$$\Gamma = j\sqrt{\omega^2\mu\epsilon - K_c^2} = j\beta$$

$$\beta = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} > 0$$

下图为矩形波导的模式分布，图中假设 $a > b$。 ▸ 例题 4



电磁波频率越高，允许传播的模式越多，未必是好事。因此，要谨慎考虑与设计。

矩形波导: 特性整理 ($\beta = \beta_z$)

色散关系 $K_c^2 = \omega^2\mu\epsilon + \Gamma^2$ 可以写成 $\omega^2 - \beta_z^2 c^2 - \omega_c^2 = 0$，其中 $\omega_c = c\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$。

$$\begin{cases} \lambda_g = \text{波导波长} \equiv \dfrac{2\pi}{\beta_z}, & \text{与几何及操作频率相关} \\ \lambda_c = \text{截止波长} \equiv \dfrac{2\pi}{\omega_c}c, & \text{仅与几何相关} \\ \lambda_0 = \text{工作波长} \equiv \dfrac{2\pi}{\omega}c, & \text{仅由操作频率决定，一般 } \lambda_0 < \lambda_g \end{cases}$$

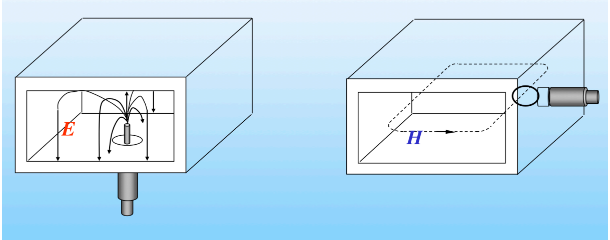
根据操作频率，电磁波在波导里有如下特性

$$\begin{cases} \omega > \omega_c \Rightarrow \beta_z \text{ 实数} \Rightarrow \text{传递行波，} v_g = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\beta_z} = \dfrac{\beta_z c^2}{\omega} \\ \omega = \omega_c \Rightarrow \beta_z = 0\,(\lambda_g = \infty) \Rightarrow v_g = 0 \\ \omega < \omega_c \Rightarrow \beta_z \text{ 纯虚数} \Rightarrow \text{衰减波、凋落波} \end{cases}$$

注意，如果波导中空填充电介质，那么 $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon}}$，其中，$\epsilon = \epsilon_r\epsilon_0$ 为介质的介电系数。

波导的激励方式

一般有两种方式，一个通过电偶极子，另一个通过磁偶极子天线 (小电流环)。基本原理是利用电偶极子或磁偶极子产生的电场或磁场尽量与想建立的模式场分布一致。这样可以保证被激励的模式是符合设计的，同时也压抑其它模式寄生。下图[12]表示针对 TE_{10} 模的两种激励方式。



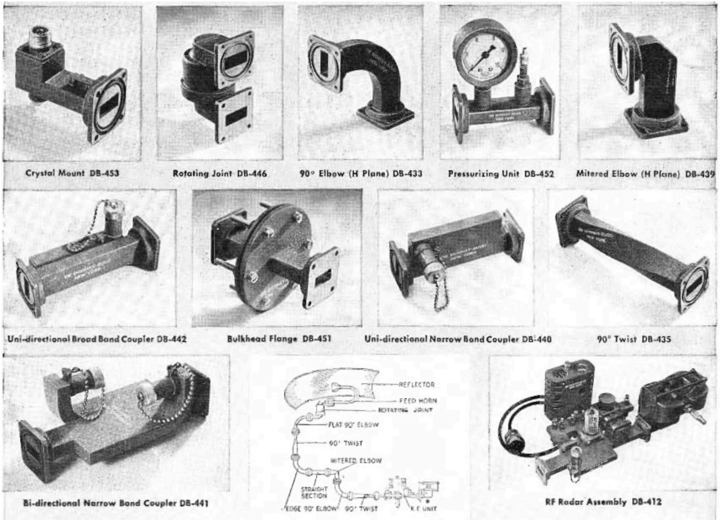
(a)电激励装置，　　(b) 磁激励装置

除了波导模式激励，有时还希望输出最大功率，此时要对激励源的辐射阻抗与波导模式的输入阻抗进行匹配。

[12] 取自叶齐政教授上课 ppt。

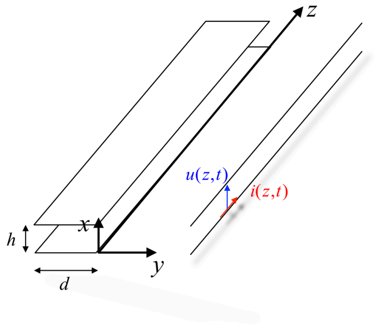
各式各样的波导

波导是传输微波频段电磁场的传输元件，形成微波电路。
下图是几种常见经典的波导元件[13]。



[13] https://en.wikipedia.org/wiki/Waveguide_(radio_frequency)

平板波导：一种简化的传输线模型



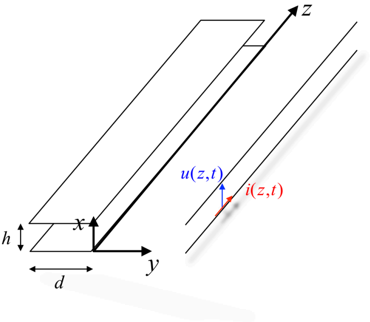
两侧开放的波导，非单一导体 $\Rightarrow$ 允许 TEM 模。
也允许 TE/TM 模，写为 TE_m/TM_m。$K_c = \frac{m\pi}{h}$。
沿传播方向 z 的电场改变 $E_x(z,t) \Rightarrow$ 电压 $u(z,t)$；
沿传播方向 z 的磁场改变 $H_y(z,t) \Rightarrow$ 电流 $i(z,t)$。
由法拉第感应定律与全电流定律，场方程可以写为类似的电路方程，称传输线方程或电报方程。

传输线: 预备知识 $\Rightarrow$ 平板波导

考虑如下几何结构的平板波导，先分析 TEM 模，场量分量可写为 (假设无损，有 $\Gamma = j\beta$)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{E}}(x,y,z) = \dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(x,y)e^{-\Gamma z} \approx \dot{\mathcal{E}}_{x0}(x)e^{-\Gamma z}\mathbf{e}_x + \dot{\mathcal{E}}_{y0}(x)e^{-\Gamma z}\mathbf{e}_y \\ \dot{\mathbf{H}}(x,y,z) = \dot{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(x,y)e^{-\Gamma z} \approx \dot{\mathcal{H}}_{x0}(x)e^{-\Gamma z}\mathbf{e}_x + \dot{\mathcal{H}}_{y0}(x)e^{-\Gamma z}\mathbf{e}_y \end{cases}$$

注意，这里用了 $h \ll d$ 的假设。



$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{E}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_{x0}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_{y0}}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_{x0}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \dot{\mathcal{E}}_{x0} = \text{常数}$$

传输线: 预备知识 ⇒ 平板波导

还可以推论，得 $\dot{\mathcal{E}}_{y0} = \dot{\mathcal{H}}_{x0} = 0, \dot{\mathcal{H}}_{y0} =$ 常数[14]。横向场的解仅有 x 的依存关系

$$\begin{cases} \dot{E}_x = A e^{-j\beta z} \\ \dot{H}_y = \dfrac{A}{Z_{\text{TEM}}} e^{-j\beta z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_x(z,t) = \sqrt{2} A \sin(\omega t - \beta z) \\ H_y(z,t) = \dfrac{\sqrt{2}A}{Z_{\text{TEM}}} \sin(\omega t - \beta z) \end{cases}$$

其中 A 为待定系数。

对 TM 模，仿照前面矩形波导，可以得到瞬时表达式 $(K_c = \frac{m\pi}{h}, m \in \mathbb{N})$

$$\begin{cases} E_z(x,z,t) = \sqrt{2} B \sin\left(\dfrac{m\pi}{h} x\right) \sin(\omega t - \beta z) \\ E_x(x,z,t) = -\dfrac{\sqrt{2}\beta B}{K_c} \cos\left(\dfrac{m\pi}{h} x\right) \cos(\omega t - \beta z) \\ H_y(x,z,t) = -\dfrac{\sqrt{2}\omega\epsilon B}{K_c} \cos\left(\dfrac{m\pi}{h} x\right) \cos(\omega t - \beta z) \end{cases}$$

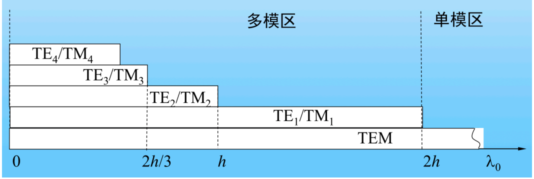
[14] 利用 $\nabla \cdot \dot{\mathbf{H}} = 0$，得 $\dot{\mathcal{H}}_{x0} =$ 常数。利用 TEM 模的横向场之间的关系，有 $\dot{\mathcal{E}}_{y0} =$ 常数。再利用理想导体边界条件，有 $\dot{\mathcal{E}}_{y0} = 0$。因此 $\dot{\mathcal{H}}_{x0}$ 也为 0。

传输线: 预备知识 ⇒ 平板波导

其中 B 为待定系数。$m=0 \Rightarrow \mathrm{TM}_0 = \mathrm{TEM}$。对 TE 模，

$$\begin{cases} H_z(x,z,t) = \sqrt{2}A\cos\left(\frac{m\pi}{h}x\right)\sin(\omega t-\beta z) \\ E_y(x,z,t) = \frac{\sqrt{2}\omega\mu A}{K_c}\sin\left(\frac{m\pi}{h}x\right)\cos(\omega t-\beta z) \\ H_x(x,z,t) = -\frac{\sqrt{2}\beta A}{K_c}\sin\left(\frac{m\pi}{h}x\right)\cos(\omega t-\beta z) \end{cases}$$

$K_c=\frac{m\pi}{h}$。不同于 TM 模，TE_0 在这里仅是平凡解 (行波)。关于传播特性，TEM 模式在所有频率都可以传播，但 TM/TE 模有限制条件，$K_c=\frac{m\pi}{h}$。由下图[15]知，TE/TM 为简并模，在 $\lambda_0 > 2h$ 时，只能传播 TEM 波。▸ 例题 3



[15] 取自叶齐政教授上课 ppt。

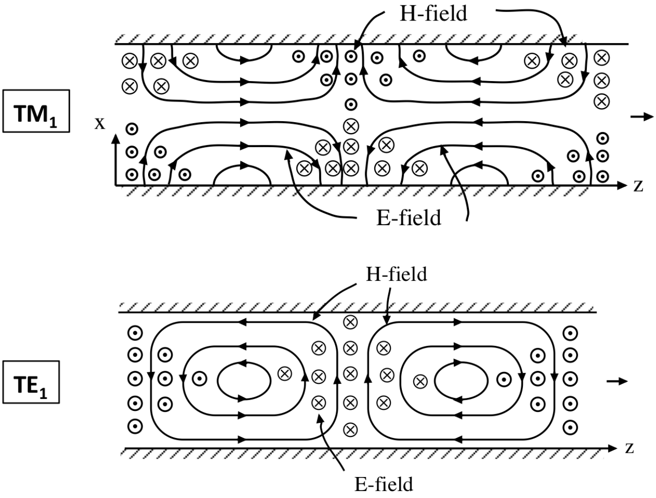


图: 取自 http://wcchew.ece.illinois.edu/chew/ece350.html

传输线方程 (transmission line equation): 均匀无损传输线

定义分布电压与分布电流，有

$$\begin{cases} E_x(z,t)h = u(z,t) \\ H_y(z,t)\,d = i(z,t) \end{cases}$$

再由法拉第感应定律与全电流定律，有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_x(z,t)}{\partial z} = -\mu \dfrac{\partial H_y(z,t)}{\partial t} \\ -\dfrac{\partial H_y(z,t)}{\partial z} = \epsilon \dfrac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial z} = -\left(\dfrac{\mu h}{d}\right)\dfrac{\partial i}{\partial t} \\ \dfrac{\partial i}{\partial z} = -\left(\dfrac{\epsilon d}{h}\right)\dfrac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$$

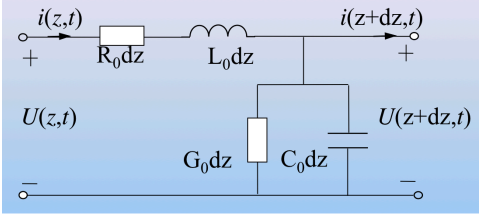
利用 $C_0 = \frac{\epsilon d}{h}, L_0 = \frac{\mu h}{d}$，引入时谐相量，可以进一步写成

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\dot{U}}{\mathrm{d}z} = -j\omega L_0 \dot{I} \\ \dfrac{\mathrm{d}\dot{I}}{\mathrm{d}z} = -j\omega C_0 \dot{U} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\dot{U}}{\mathrm{d}z^2} = -\beta^2\dot{U} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2\dot{I}}{\mathrm{d}z^2} = -\beta^2\dot{I} \end{cases}$$

其中，$\beta^2 = \omega^2\mu\epsilon = \omega^2 L_0 C_0$。

传输线方程: 均匀有耗传输线 ♠

利用另一个等价的方式，参数分布电路模型，来描述，见下图[16]



$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\dot U}{\mathrm{d}z}=-R_0\dot I-j\omega L_0\dot I=-Z_0\dot I\\ \dfrac{\mathrm{d}\dot I}{\mathrm{d}z}=-G_0\dot U-j\omega C_0\dot U=-Y_0\dot U\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2\dot U}{\mathrm{d}z^2}=-\Gamma^2\dot U\\ \dfrac{\mathrm{d}^2\dot I}{\mathrm{d}z^2}=-\Gamma^2\dot I\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dot U=\dot U_0^+e^{-\Gamma z}+\dot U_0^-e^{\Gamma z}\\ \dot I=\dot I_0^+e^{-\Gamma z}+\dot I_0^-e^{\Gamma z}\end{cases}$$

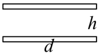
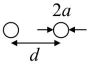
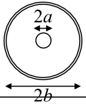
其中，$\Gamma=\alpha+j\beta=\sqrt{Z_0Y_0}=\sqrt{(R_0+j\omega L_0)(G_0+j\omega C_0)}$。这里有类似入射波与反射波的概念。定义特性阻抗 (characteristic impedance) 为 $Z_c=\dfrac{\dot U_0^+}{\dot I_0^+}=-\dfrac{\dot U_0^-}{\dot I_0^-}=\sqrt{\dfrac{Z_0}{Y_0}}$。注意，介绍场的入射/反射时，自由空间中的 TEM 波阻抗为本质阻抗 $\eta=\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\epsilon_0}}$。

[16] 图例取自叶齐政教授上课 ppt。

C_0, L_0, G_0, R_0 可以完整描述传输线传输特性 ♠

给定导线的 γ_1, μ_1 与空间媒质的 $\gamma_2, \epsilon, \mu_2$，则根据几何结构，可以求得 C_0, L_0, G_0, R_0(交流电阻)，如下表。

表: 双传输线的分布参数

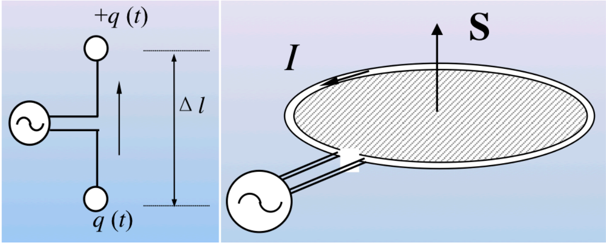
	C_0	L_0	G_0	R_0
	$\frac{\epsilon d}{h}$	$\frac{\mu_2 h}{d}$	$\frac{\gamma_2 d}{h}$	$\frac{2}{d}\sqrt{\frac{\omega\mu_1}{2\gamma_1}}$
	$\frac{\pi\epsilon}{\ln\frac{d-a}{a}}$	$\frac{\mu_2}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$	$\frac{\pi\gamma_2}{\ln\frac{d-a}{a}}$	$\frac{2}{2\pi a}\sqrt{\frac{\omega\mu_1}{2\gamma_1}}$
	$\frac{2\pi\epsilon}{\ln\frac{b}{a}}$	$\frac{\mu_2}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$	$\frac{2\pi\gamma_2}{\ln\frac{b}{a}}$	$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\sqrt{\frac{\omega\mu_1}{2\gamma_1}}$

★ 利用上表与 $L_0 C_0 = \mu_2\epsilon$ 与 $\frac{C_0}{G_0} = \frac{\epsilon}{\gamma_2}$ 关系，推导上表中的结果。对于单位长度交流电阻，有 $R_0 = \frac{1}{\gamma\times\text{横截面积}}$，其中，横截面积包含趋肤深度 $\delta_{\text{skin}} = \alpha^{-1} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_1\gamma_1}}$。

电磁辐射

电磁波从波源出发，以**有限**速度在媒质中向四面八方传播，一部分电磁波能量**脱离波源**而单独在空间波动，不再返回波源，这种现象称为辐射 (radiation)。辐射源种类繁多，最简单的模型可以用一根短线上流动的电荷 (电偶极子) 或小面积上流动的电流回路 (磁偶极子) 产生的时变电磁场表示。见下图。

辐射是有方向性的，在给定的方向产生电磁场。辐射过程是能量的传播过程。研究辐射的方向性和能量传播必须掌握辐射电磁场的特性。



电偶极子

如果电偶极子的长度比电磁波波长小很多，在导线上可以忽略推迟效应。假设观察点距离电偶极子很远，则观察点与电偶极子各部分距离相等。电偶极子短线上流动的电荷与对应的电流

$$q(t) = \sqrt{2} q_0 \sin \omega t \to \dot{q} = q_0$$

$$i(t) = \frac{\mathrm{d} q}{\mathrm{d} t} = \sqrt{2} I_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \dot{I} = I_0 e^{j\frac{\pi}{2}} = j\omega \dot{q}$$

观察点 (场点) 动态位可以写成 ($\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$)

$$\dot{\mathbf{A}} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\dot{I} \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}}{r} = \frac{\mu_0 \dot{I} e^{-j\beta r} \Delta \ell}{4\pi r} \mathbf{e}_z = \dot{A}_z \mathbf{e}_z$$

在球坐标下，通过 $\dot{\mathbf{H}} = \frac{\nabla\times\dot{\mathbf{A}}}{\mu_0}$ 与 $\dot{\mathbf{E}} = \frac{\nabla\times\dot{\mathbf{H}}}{j\omega\epsilon_0}$ 可以获得电偶极子的时谐相量表示 (§9.6.1)

电偶极子

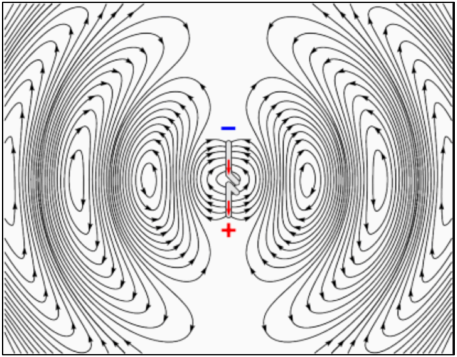
$$\begin{cases} \dot{A}_r = \dot{A}_z \cos\theta = \dfrac{\mu_0 \dot{I} e^{-j\beta r} \Delta\ell \cos\theta}{4\pi r} \\ \dot{A}_\theta = -\dot{A}_z \sin\theta = \dfrac{\mu_0 \dot{I} e^{-j\beta r} \Delta\ell \sin\theta}{4\pi r} \\ \dot{A}_\phi = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{E}_r = \dfrac{\dot{I}\beta^3 e^{-j\beta r} \Delta\ell \cos\theta}{2\pi\epsilon_0\omega} \left[0 + \dfrac{1}{(\beta r)^2} + \dfrac{1}{j(\beta r)^3} \right] \\ \dot{E}_\theta = \dfrac{\dot{I}\beta^3 e^{-j\beta r} \Delta\ell \sin\theta}{4\pi\epsilon_0\omega} \left[\dfrac{1}{-j(\beta r)} + \dfrac{1}{(\beta r)^2} + \dfrac{1}{j(\beta r)^3} \right] \\ \dot{H}_\phi = \dfrac{\dot{I}\beta^2 e^{-j\beta r} \Delta\ell \sin\theta}{4\pi} \left[\dfrac{1}{-j(\beta r)} + \dfrac{1}{(\beta r)^2} + 0 \right] \\ \dot{H}_r = \dot{H}_\theta = \dot{E}_\phi = 0 \end{cases}$$

电偶极子

电偶极子附近的电场形式如下图[17]，有 09-ED

- 近场 ($\beta r \ll 1$) 区域，场线发自正电荷，终于负电荷，场线像**准静态场**
- 远场 ($\beta r \gg 1$) 区域，场线为闭合，**辐射场**，电场与磁场交互变换 (regenerative)
- $\beta r \sim 1$ 区域，介于期间，**感应场**



[17] https://en.wikipedia.org/wiki/Dipole_antenna

磁偶极子

如果磁偶极子的尺寸比电磁波波长小很多，在回路上可以忽略推迟效应。假设观察点距离磁偶极子很远，则观察点与磁偶极子各部分距离相等。回路上的电流对应的动态位有

$$\dot{\mathbf{A}} = A_\phi \mathbf{e}_\phi \approx \frac{\mu_0 \dot{I} S \beta^2 e^{-j\beta r}}{4\pi}\left[\frac{j}{\beta r} + \frac{1}{(\beta r)^2}\right]$$

其中，$\mathbf{m} = \dot{I}\mathbf{S}$ 为磁偶极矩。类似前面，磁偶极子的时谐相量表示 (§9.6.2)

$$\begin{cases} \dot{H}_r = \dfrac{\dot{I} S \beta^3 e^{-j\beta r}\cos\theta}{2\pi}\left[0 + \dfrac{1}{-j(\beta r)^2} + \dfrac{1}{(\beta r)^3}\right] \\ \dot{H}_\theta = \dfrac{\dot{I} S \beta^3 e^{-j\beta r}\sin\theta}{4\pi}\left[\dfrac{1}{-(\beta r)} + \dfrac{1}{-j(\beta r)^2} + \dfrac{1}{(\beta r)^3}\right] \\ \dot{E}_\phi = \dfrac{\dot{I} S \beta^2 \omega\mu_0 e^{-j\beta r}\sin\theta}{4\pi}\left[\dfrac{1}{-(\beta r)} + \dfrac{1}{-j(\beta r)^2} + 0\right] \\ \dot{E}_r = \dot{E}_\theta = \dot{H}_\phi = 0 \end{cases}$$

远场 (far field) $\beta r \gg 1$，又为辐射场

场的性质可以从表示式中出现的 $\beta r \propto r\lambda^{-1}$ 来划分，分为远场与近场。
对电偶极子，时谐相量与瞬时远场表示可以近似为

$$\begin{cases} \dot{E}_r = \dfrac{\dot{I}\beta^3 e^{-j\beta r}\Delta\ell\cos\theta}{2\pi\epsilon_0\omega}[0] \\ \dot{E}_\theta = \dfrac{\dot{I}\beta^3 e^{-j\beta r}\Delta\ell\sin\theta}{4\pi\epsilon_0\omega}\left[\dfrac{1}{-j(\beta r)}\right] \\ \dot{H}_\phi = \dfrac{\dot{I}\beta^2 e^{-j\beta r}\Delta\ell\sin\theta}{4\pi}\left[\dfrac{1}{-j(\beta r)}\right] \\ \dot{H}_r = \dot{H}_\theta = \dot{E}_\phi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_r = 0 \\ E_\theta = \dfrac{\sqrt{2}I_0\beta^2 e^{-j\beta r}\Delta\ell\sin\theta}{4\pi\epsilon_0\omega r} \\ \qquad \times\sin(\omega t - \beta r + \pi) \\ H_\phi = \dfrac{\sqrt{2}I_0\beta e^{-j\beta r}\Delta\ell\sin\theta}{4\pi r} \\ \qquad \times\sin(\omega t - \beta r + \pi) \\ H_r = H_\theta = E_\phi = 0 \end{cases}$$

远场 (far field) $\beta r \gg 1$，又为辐射场

现在考虑电磁波的能量传播方向，发现传播方向恒向外 ($\mathbf{e}_r$)，故又称辐射场。

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \left(\frac{\sqrt{2} I_0 \Delta \ell \sin\theta}{4\pi r}\right)^2 \frac{\beta^3}{\omega \epsilon_0} \sin^2(\omega t - \beta r + \pi)\, \mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{S}_{\text{ave}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{I_0 \Delta \ell \sin\theta}{r\lambda}\right)^2 \mathbf{e}_r \propto \frac{\omega^4}{r^2}$$

以上还可以看出辐射功率与距离 r 及方向角 θ 有关，并且与频率四次方正比。
讨论电磁波周围的场时，时常引入波阻抗的概念，定义为

$$Z_0 = \frac{\dot{E}_\theta}{\dot{H}_\phi} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \eta = 120\pi \approx 377\Omega$$

远场 (far field) $\beta r \gg 1$，又为辐射场

进一步讨论辐射总功率 (流出)

$$P = \oiint_A \mathbf{S}_{\mathsf{ave}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}} = 80\pi^2 \left(\frac{I_0 \Delta \ell}{\lambda}\right)^2 \stackrel{!}{=} R_e I_0^2$$

及定义辐射电阻

$$R_e = 80\pi^2 \left(\frac{\Delta \ell}{\lambda}\right)^2$$

以上可以看到辐射总功率与电流平方成正比。另外，虽然 $P \propto (\Delta \ell)^2$，但 $\Delta \ell$ 越大将破坏最初模型的假设。

近场 (near field) $\beta r \ll 1$，又为准静场

类似的分析方式，近场情况可以得到简化形式的电磁场

$$\begin{cases} \dot{E}_r = \dfrac{\dot{I}\beta^3(1)\Delta\ell\cos\theta}{2\pi\epsilon_0\omega}\left[\dfrac{1}{j(\beta r)^3}\right] \\ \dot{E}_\theta = \dfrac{\dot{I}\beta^3(1)\Delta\ell\sin\theta}{4\pi\epsilon_0\omega}\left[\dfrac{1}{j(\beta r)^3}\right] \\ \dot{H}_\phi = \dfrac{\dot{I}\beta^2(1)\Delta\ell\sin\theta}{4\pi}\left[\dfrac{1}{j(\beta r)^2}\right] \\ \dot{H}_r = \dot{H}_\theta = \dot{E}_\phi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_r = \dfrac{\sqrt{2}I_0\Delta\ell\cos\theta}{2\pi\epsilon_0\omega r^3}\sin\omega t \\ \quad = \dfrac{2q(t)\Delta\ell\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\theta = \dfrac{\sqrt{2}I_0\Delta\ell\sin\theta}{4\pi\epsilon_0\omega r^3}\sin\omega t \\ \quad = \dfrac{q(t)\Delta\ell\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ H_\phi = \dfrac{\sqrt{2}I_0\Delta\ell\sin\theta}{4\pi r^2}\sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \quad = \dfrac{i(t)\Delta\ell\sin\theta}{4\pi r^2} \\ H_r = H_\theta = E_\phi = 0 \end{cases}$$

近场 (near field) $\beta r \ll 1$，又为准静场

由上面瞬时表达式可以看出

1. 电场与磁场相位不同，能流传播方向也就不再恒定。事实上，能量在波源与周围空间之间来回转换。
2. 电场与磁场的形式与静电场中学到的电偶极子的静电场及恒定磁场中学到的磁偶极子的磁场形式一致，这也表征近场像是准静态场。

分析能流密度及其在一个周期内的平均，有

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S}(r,t) &= \mathbf{E}\times\mathbf{H} = E_\theta H_\phi \mathbf{e}_r - E_r H_\phi \mathbf{e}_\theta \\
\mathbf{S}_{\text{ave}} &= 0\mathbf{e}_r + 0\mathbf{e}_\theta
\end{aligned}
$$

类似地，波阻抗为 $Z_0 = \frac{\dot{E}_\theta}{\dot{H}_\phi} = \frac{\eta}{\beta r} \gg \eta$，主要是电准静态场。如果激励源是磁偶极子，则其近场为磁准静态场。

偶极振子可以视为从 LC 振荡电流演变而来，见教科书 §9.6.4 介绍。

天线 (antenna)

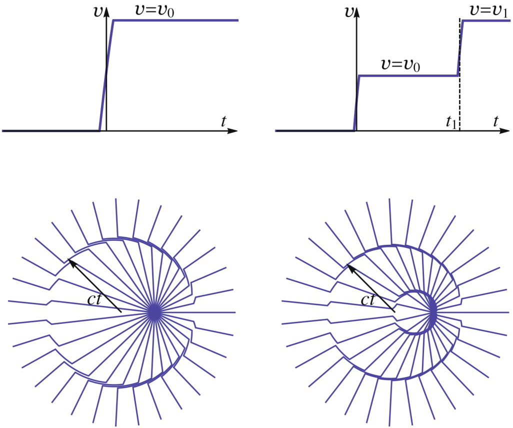
一段金属导线中的交变电流能够向空间发射交替变化的感应电场和感应磁场，这就是无线电信号的**发射**。相反，空间中交变的电磁场在遇到金属导线时又可以感应出交变的电流，这对应了无线电信号的**接收**。

对用于发射和接收的导线有获取最佳转换效率的要求，满足这样要求的用于发射和接收无线电磁波信号的导线称为**天线**。

天线是一种导波与自由空间波之间的转换器件，电路与空间的界面器件。

基于相对论运动粒子的辐射 ♠

加速度 $\Leftrightarrow$ 场线扭曲 $\Rightarrow$ 辐射场。见下面图例[18]。



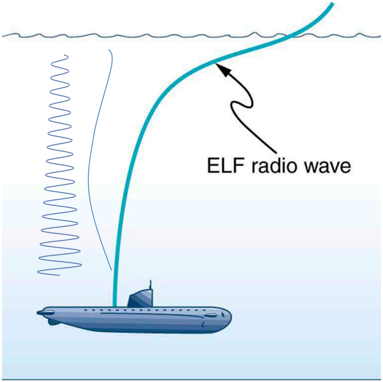
♠ 同步辐射 (synchrotron radiation) 是目前使用普遍的一种光源。

[18] Stupakov and Penn, Classical Mechanics and Electromagnetism in Accelerator Physics, Springer

例题 1：极低频 (extreme low frequency, ELF) 电磁通信 返回

如右图[19]，一潜艇在海面下 100 m 处，使用 ELF 信号发收信息，假设工作频率为 20 Hz。已知海水有 $\mu_r = 1, \epsilon_r = 72, \gamma = 4$ S/m。试求

1. 衰减常数、相位常数、趋肤深度
2. 相速、群速
3. 功率衰减分贝值



[19] https://courses.lumenlearning.com/physics/chapter/24-3-the-electromagnetic-spectrum/

例题 1: (续)

对于1.，根据定义，

$$\Gamma = j\omega\sqrt{\mu\left(\epsilon - j\frac{\gamma}{\omega}\right)} = \alpha + j\beta \Rightarrow \alpha = \beta \approx \frac{4\sqrt{2}\pi}{1000}\ \mathrm{m}^{-1}$$

趋肤深度有 $d = \alpha^{-1} = 57.6$ m。

对于2.，相速较为简单，根据定义，有 $v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{10^4}{\sqrt{2}}$ m/s。
群速计算需要将 Γ 取频率的导数，有

$$v_g = \left(\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\omega}\right)^{-1} = \left(\mathrm{Im}\,\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}\omega}\right)^{-1} = \left[\mathrm{Im}\left(j\frac{\sqrt{\epsilon_r}}{c}\odot - \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{2c}\frac{1}{\odot}\frac{\gamma}{\omega\epsilon}\right)\right]^{-1}$$

$$\approx \frac{10^4}{35\sqrt{2}} \approx 200\ \mathrm{m/s},\ \text{其中}\odot = \sqrt{1 - j\frac{\gamma}{\omega\epsilon}}$$

对于3.，信号自海底传至平面，功率衰减为

$$X_{\mathrm{dB}} = 20\log_{10}\left|\frac{E(z{=}0\ \mathrm{m})}{E(z{=}100\ \mathrm{m})}\right| = 20\log_{10}e^{\alpha\times 100} \approx 15.08\ \mathrm{dB}。$$

例题 2

均匀平面电磁波自真空入射 $\gamma = 5.8\times10^7$ S/m 的良导体。考虑以下三种频率的功率吸收: $f = 100$ kHz, $f = 100$ MHz, $f = 100$ GHz。

▷ 此题相当于求解透射系数 $|t|^2 = 1 - |r|^2$，其中，$r = \frac{Z_{02}-Z_{01}}{Z_{02}+Z_{01}}, Z_{01} = \eta = 377\ \Omega$。在良导体侧，波阻抗有 $Z_{02} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon - j\frac{\gamma}{\omega}}} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\sqrt{\frac{j}{\frac{\gamma}{\omega\epsilon}}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}(1+j)$。三种不同频率下的计算结果为

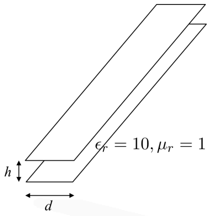
$$\begin{cases} f = 100\ \text{kHz},\ Z_{02}\approx 0 \Rightarrow r = -1 \Rightarrow |t|^2 = 0\% \\ f = 100\ \text{MHz},\ Z_{02}\approx 2.6\times10^{-3}(1+j) \Rightarrow |r| = 0.999986 \Rightarrow |t|^2 = 0.0038\% \\ f = 100\ \text{GHz},\ Z_{02}\approx 0.0825(1+j) \Rightarrow |r| = 0.9995 \Rightarrow |t|^2 = 0.1\% \end{cases}$$

例题 3：平行板波导传播模式评估 (例 9.5.1)

◂ 返回

平行板波导，$h=1$ cm，$d \gg h$，相对介电常数与相对磁导率如图示。试问：

1. 仅传播 TEM 模式的最大工作频率。
2. 若工作频率为 50 GHz，除 TEM 外，能够传播几个模式。



平行板波导的截止波数为 $K_c = \frac{m\pi}{h}$。TE/TM 模式的工作频率必须高于 K_c 对应的截止频率。低于 K_c 仅能传播 TEM 模式，故

$$f_c = \frac{K_c}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{m}{2h\sqrt{\mu\epsilon}} \stackrel{m=1}{\rightarrow} 4.7 \text{ GHz}$$

工作波长与截止波长分别可以写为 $\lambda_0 = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}}, \lambda_c = \frac{2\pi}{K_c} = \frac{2h}{m}$。工作波长必须低于截止波长，波导才能正常工作，因此有

$$\lambda_0 < \lambda_c \Rightarrow m < 2hf\sqrt{\mu\epsilon} = 10.54$$

取 $m = 10$，故允许 20 个工作模式 (一半 TE，一半 TM)。

例题 4：方形波导传播模式评估 ◂ 返回

金属管壁形成的方形波导 (边长 a) 内填充 $\epsilon_r = 4$(即，折射率 $n = 2$) 的电介质材料。假设电磁波工作频率 9 GHz，以 TM_{11} 模式传播，若要求 20% 余裕，求方形波导边长允许范围。

▷ 考虑 TM_{11} 与 TM_{21} 模式的截止频率

$$f_{11}^{\text{TM}} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\frac{2}{a^2}} = \frac{\sqrt{2}}{a}\frac{3\times 10^8}{4}$$

$$f_{21}^{\text{TM}} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\frac{5}{a^2}} = \frac{\sqrt{5}}{a}\frac{3\times 10^8}{4}$$

设计指标的要求因此有
$1.2 f_{11}^{\text{TM}} < f < 0.8 f_{21}^{\text{TM}} \Rightarrow 0.014 < a < 0.015$ m。

作业

- 9.1, 9.3
- 9.4, 9.5
- 9.6, 9.7
- 看教科书 Ch1 绪论