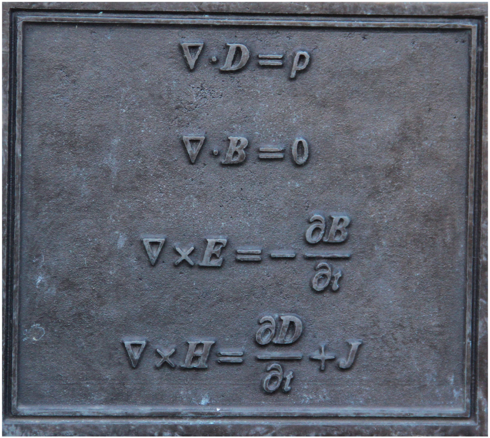
时变电磁场基本方程

蔡承颖[1]

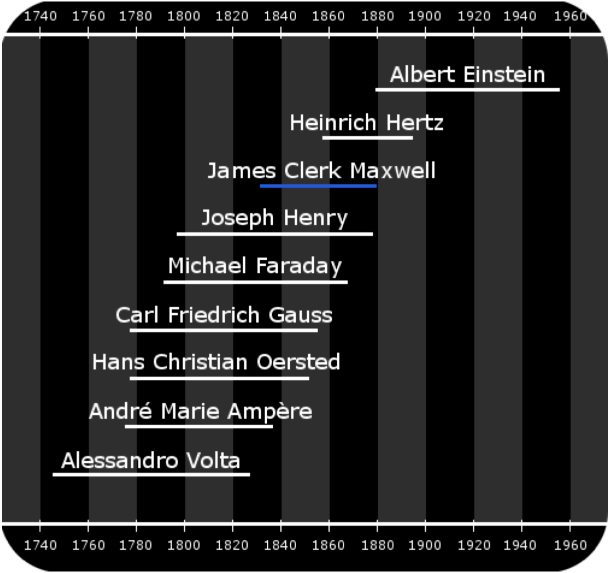
华中科技大学电气与电子工程学院

[1] jcytsai@hust.edu.cn

麦克斯韦方程组 (Maxwell equations)



麦克斯韦方程组 (Maxwell equations)



麦克斯韦方程组

又称 Maxwell-Hertz equations。在时变电磁场中，电场与磁场都是时间和空间的函数；变化的磁场会产生电场，变化的电场会产生磁场，电场与磁场相互依存，构成统一的电磁场 (electromagnetic field, EM field)。

[2]感应电动势定量式一直到 1845 年由德国物理学家纽曼 (F.E. Neumann) 给出。纽曼还是数学家、矿物学家、基因学家。

麦克斯韦方程组

又称 Maxwell-Hertz equations。在时变电磁场中，电场与磁场都是时间和空间的函数；变化的磁场会产生电场，变化的电场会产生磁场，电场与磁场相互依存，构成统一的电磁场 (electromagnetic field, EM field)。

在静电场与恒定电场、恒定磁场后，

1. 法拉第 (Faraday) 1831 年总结**发现**变化的磁场会产生电场 ⇒ 为电磁理论提供“原材料”[2]

[2]感应电动势定量式一直到 1845 年由德国物理学家纽曼 (F.E. Neumann) 给出。纽曼还是数学家、矿物学家、基因学家。

麦克斯韦方程组

又称 Maxwell-Hertz equations。在时变电磁场中，电场与磁场都是时间和空间的函数；变化的磁场会产生电场，变化的电场会产生磁场，电场与磁场相互依存，构成统一的电磁场 (electromagnetic field, EM field)。

在静电场与恒定电场、恒定磁场后，

1. 法拉第 (Faraday) 1831 年总结**发现**变化的磁场会产生电场 ⇒ 为电磁理论提供“原材料”[2]
2. 麦克斯韦 (Maxwell) 根据对称性的考虑，1861 年首次提出位移电流假设 ⇒ **建立**电磁理论体系 ⇒ 预言电磁波的存在 ⇒ 电磁场可以独立于电荷/电流，在真空中传递

[2]感应电动势定量式一直到 1845 年由德国物理学家纽曼 (F.E. Neumann) 给出。纽曼还是数学家、矿物学家、基因学家。

麦克斯韦方程组

又称 Maxwell-Hertz equations。在时变电磁场中，电场与磁场都是时间和空间的函数；变化的磁场会产生电场，变化的电场会产生磁场，电场与磁场相互依存，构成统一的电磁场 (electromagnetic field, EM field)。

在静电场与恒定电场、恒定磁场后，

1. 法拉第 (Faraday) 1831 年总结**发现**变化的磁场会产生电场 $\Rightarrow$ 为电磁理论提供“原材料”[2]
2. 麦克斯韦 (Maxwell) 根据对称性的考虑，1861 年首次提出位移电流假设 $\Rightarrow$ **建立**电磁理论体系 $\Rightarrow$ 预言电磁波的存在 $\Rightarrow$ 电磁场可以独立于电荷/电流，在真空中传递
3. 赫兹 (Hertz) 1888 年实验上**证实**电磁波存在 $\Rightarrow$ “点亮”电磁理论的大厦

[2]感应电动势定量式一直到 1845 年由德国物理学家纽曼 (F.E. Neumann) 给出。纽曼还是数学家、矿物学家、基因学家。

麦克斯韦方程组

又称 Maxwell-Hertz equations。在时变电磁场中，电场与磁场都是时间和空间的函数；变化的磁场会产生电场，变化的电场会产生磁场，电场与磁场相互依存，构成统一的电磁场 (electromagnetic field, EM field)。

在静电场与恒定电场、恒定磁场后，

1. 法拉第 (Faraday) 1831 年总结**发现**变化的磁场会产生电场 $\Rightarrow$ 为电磁理论提供“原材料”[2]
2. 麦克斯韦 (Maxwell) 根据对称性的考虑，1861 年首次提出位移电流假设 $\Rightarrow$ **建立**电磁理论体系 $\Rightarrow$ 预言电磁波的存在 $\Rightarrow$ 电磁场可以独立于电荷/电流，在真空中传递
3. 赫兹 (Hertz) 1888 年实验上**证实**电磁波存在 $\Rightarrow$ “点亮”电磁理论的大厦

Asked about the applications of his discoveries, Hertz replied, “Nothing, I guess.”

[2] 感应电动势定量式一直到 1845 年由德国物理学家纽曼 (F.E. Neumann) 给出。纽曼还是数学家、矿物学家、基因学家。

When Faraday first made public his remarkable discovery that a changing magnetic flux produces an emf, he was asked (as anyone is asked when he discovers a new fact of nature), "What is the use of it?" All he had found was the oddity that a tiny current was produced when he moved a wire near a magnet. Of what possible "use" could that be? His answer was: "What is the use of a newborn baby?" …

Modern electrical technology began with Faraday's discoveries. The useless baby developed into a prodigy and changed the face of the earth in ways its proud father could never have imagined.

Feynman Lectures on Physics, Volume II, §16-4

以下探讨麦克斯韦方程组中各个方程的意义与地位。在开始前，注意电荷/电流连续性是基本方程，即 $\nabla \cdot \mathbf{J} + \partial\rho/\partial t = 0$ 必须成立。

[3]注意，对法拉第定律等式两边取散度，可以得到磁的高斯定律，可以认为在时变电磁场中，磁的高斯定律不是自己独立的方程。

以下探讨麦克斯韦方程组中各个方程的意义与地位。在开始前，注意电荷/电流连续性是基本方程，即 $\nabla \cdot \mathbf{J} + \partial\rho/\partial t = 0$ 必须成立。

从 $\boxed{\text{电的高斯定律}}$ 开始，$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$，意义为造成电场的原因为电荷，其中电荷具有守恒性。对于时变电场也**要求**成立。

[3]注意，对法拉第定律等式两边取散度，可以得到磁的高斯定律，可以认为在时变电磁场中，磁的高斯定律不是自己独立的方程。

以下探讨麦克斯韦方程组中各个方程的意义与地位。在开始前，注意电荷/电流连续性是基本方程，即 $\nabla\cdot\mathbf{J}+\partial\rho/\partial t=0$ 必须成立。

从 $\boxed{\text{电的高斯定律}}$ 开始，$\nabla\cdot\mathbf{E}=\rho/\epsilon_0$，意义为造成电场的原因为电荷，其中电荷具有守恒性。对于时变电场也**要求**成立。

接着是 $\boxed{\text{磁的高斯定律}}$，$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$，意义为不存在磁荷。对于时变磁场也**要求**成立。

[3]注意，对法拉第定律等式两边取散度，可以得到磁的高斯定律，可以认为在时变电磁场中，磁的高斯定律不是自己独立的方程。

以下探讨麦克斯韦方程组中各个方程的意义与地位。在开始前，注意电荷/电流连续性是基本方程，即 $\nabla\cdot\mathbf{J}+\partial\rho/\partial t=0$ 必须成立。

从 $\boxed{\text{电的高斯定律}}$ 开始，$\nabla\cdot\mathbf{E}=\rho/\epsilon_0$，意义为造成电场的原因为电荷，其中电荷具有守恒性。对于时变电场也**要求**成立。

接着是 $\boxed{\text{磁的高斯定律}}$，$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$，意义为不存在磁荷。对于时变磁场也**要求**成立。

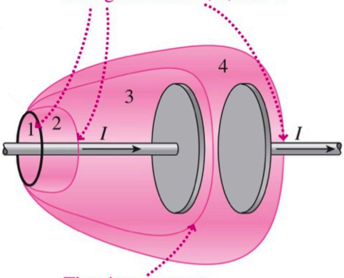
再来是 $\boxed{\text{法拉第定律}}$，$\nabla\times\mathbf{E}=-\partial\mathbf{B}/\partial t$，意义为闭合回路的感应电动势大小与穿过闭合回路的磁通量的变化率成正比。或者说，由于磁场改变产生的电场是有旋场，此时的电场不是保守场。因为法拉第在提出此定律时已经在时变的基础上，故对于时变电场**恒**成立[3]。 ▸ 例题 1

[3]注意，对法拉第定律等式两边取散度，可以得到磁的高斯定律，可以认为在时变电磁场中，磁的高斯定律不是自己独立的方程。

安培定律的矛盾[4]

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \iint_A \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}} = \mu_0 I$$

$$\iint_{A_1} \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}} = \iint_{A_2} \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}} \stackrel{?}{=} \iint_{A_3} \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}} = \iint_{A_4} \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}}$$



[3]图例取自 http://www.physics.louisville.edu/cldavis/phys299/notes/mag_displacement.html

最后，也是关键的方程，安培定律，$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$。对等式两边取散度，得 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$。显然此式仅在恒定电流成立。如果希望维持其它方程形式不变，安培定律该怎么修改?

最后，也是关键的方程，安培定律，$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$。对等式两边取散度，得 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$。显然此式仅在恒定电流成立。如果希望维持其它方程形式不变，安培定律该怎么修改?

首先，在安培定律右边加上一项

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}$$

当系统不随时间而变时，$\partial / \partial t = 0$。

最后，也是关键的方程，安培定律，$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$。对等式两边取散度，得 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$。显然此式仅在恒定电流成立。如果希望维持其它方程形式不变，安培定律该怎么修改?

首先，在安培定律右边加上一项

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}$$

当系统不随时间而变时，$\partial / \partial t = 0$。一般情况下，对上式两边取散度，有

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{J} + \mu_0^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathcal{F}$$

最后，也是关键的方程，安培定律，$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$。对等式两边取散度，得 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$。显然此式仅在恒定电流成立。如果希望维持其它方程形式不变，安培定律该怎么修改?

首先，在安培定律右边加上一项

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}$$

当系统不随时间而变时，$\partial/\partial t = 0$。一般情况下，对上式两边取散度，有

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{J} + \mu_0^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathcal{F}$$

要求电荷/电流连续性 $0 = \nabla \cdot \mathbf{J} + \partial \rho / \partial t$ 成立，因此有

$$\nabla \cdot \mathcal{F} = \mu_0 \rho \qquad \text{比较} \qquad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

考虑取 $\mathcal{F} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{E}$。

代回安培定律带有添加项的式子，得

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{或} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

其中，在自由空间 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ 与 $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$。定义 $\mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 为位移电流 (displacement current)。上式对于时变电场**恒**成立，称为 $\boxed{\text{全电流定律}}$，或带有麦克斯韦修正项的安培电流定律 (Ampere's law with Maxwell's correction)[5]。 例题 2

[5]注意，对全电流定律等式两边取散度，可以得到电的高斯定律，可以认为在时变电磁场中，电的高斯定律不是自己独立的方程。

代回安培定律带有添加项的式子，得

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{或} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

其中，在自由空间 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ 与 $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$。定义 $\mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 为位移电流 (displacement current)。上式对于时变电场**恒**成立，称为 $\boxed{\text{全电流定律}}$，或带有麦克斯韦修正项的安培电流定律 (Ampere's law with Maxwell's correction)[5]。 ▸ 例题 2

在麦克斯韦建立电磁理论后，对电磁现象的探讨形成一明显的分水岭，在此之前的讨论多半属于**归纳 (inductive)** 性质，在此之后则变为**演绎 (deductive)** 性质。

[5]注意，对全电流定律等式两边取散度，可以得到电的高斯定律，可以认为在时变电磁场中，电的高斯定律不是自己独立的方程。

总结：麦克斯韦方程组

定律：时变电磁场基本方程 (微分形式)

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

与连续方程 $\nabla \cdot \mathbf{J} + \partial\rho/\partial t = 0$。电磁材料本构方程有 $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$、$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$、$\mathbf{J}_c = \gamma\mathbf{E}$。另外，电荷在电磁场中受力有洛伦兹力方程 (Lorentz force equation) $\mathbf{f} = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$。一般不写成 $\mathbf{f} = \rho\left(\epsilon^{-1}\mathbf{D} + \mu\mathbf{v} \times \mathbf{H}\right)$。

上面第一个与最后一个方程为约束方程，第二与第三个方程为演化方程。

总结：麦克斯韦方程组

定律：时变电磁场基本方程 (积分形式)

$$\oiint_A \mathbf{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}} = q$$

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = -\iint_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}}$$

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \iint_A \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}}$$

$$\oiint_A \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}} = 0$$

与连续方程 $\oiint_A \mathbf{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}} = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$。电磁材料本构方程有 $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$、$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$、$\mathbf{J}_c = \gamma\mathbf{E}$。另外，电荷在电磁场中受力有洛伦兹力方程 (Lorentz force equation) $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})$。一般不写成 $\mathbf{F} = q\left(\epsilon^{-1}\mathbf{D} + \mu\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right)$。

上面第一个与最后一个方程为约束方程，第二与第三个方程为演化方程。

电荷弛豫 (relaxation) 现象

有了完整的电荷/电流连续方程关系后，考虑均匀媒质 (即 ϵ, γ 在媒质材料内不随坐标而变) 中的电荷密度随时间演变，有

$$\gamma \nabla \cdot \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\gamma}{\epsilon} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

其解为 $\rho = \rho(t=0) e^{-t/\tau_e}$，式中 $\tau_e = \epsilon/\gamma$ 为弛豫时间 (relaxation time)。以上表明，具有导电性的材料，体内 (若有) 自由电荷会随时间衰减，称为电荷弛豫过程[6]。恒定电场情况 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ 无电荷弛豫现象。

[6] 以上论证不够严谨，理论模型多处过度简化，对良导体，结果未必正确。如 γ 可能是频率函数、电荷自体内转移至表面需要有限时间，尚未适当考虑电荷扩散等。

[7] 有时候思维反过来，用 $\gamma/\omega\epsilon \gg 1$ 定义媒质为良导体 (good conductor)，$\gamma/\omega\epsilon \ll 1$ 为良绝缘体 (good insulator)，$\gamma = \infty$ 为理想导体 (perfect conductor)，而 $\gamma = 0$ 为理想电介质 (perfect dielectric)。$\gamma/\omega\epsilon \equiv \tan\delta$ 又定义为损耗正切 (loss tangent)。

电荷弛豫 (relaxation) 现象

有了完整的电荷/电流连续方程关系后，考虑均匀媒质 (即 ϵ, γ 在媒质材料内不随坐标而变) 中的电荷密度随时间演变，有

$$\gamma \nabla \cdot \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\gamma}{\epsilon}\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

其解为 $\rho = \rho(t=0)e^{-t/\tau_e}$，式中 $\tau_e = \epsilon/\gamma$ 为弛豫时间 (relaxation time)。以上表明，具有导电性的材料，体内 (若有) 自由电荷会随时间衰减，称为电荷弛豫过程[6]。恒定电场情况 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ 无电荷弛豫现象。

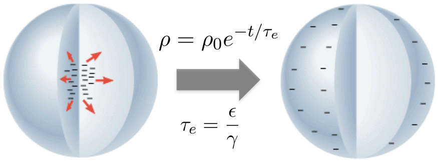
一般金属弛豫时间非常短 (约 10^{-19} s)，因此，如果外部电磁场随时间变化的周期 $T \gg \tau_e$ (或 $\omega \ll \tau_e^{-1}$)，导体内部可以视为无自由电荷积累[7]。

[6]以上论证不够严谨，理论模型多处过度简化，对良导体，结果未必正确。如 γ 可能是频率函数、电荷自体内转移至表面需要有限时间，尚未适当考虑电荷扩散等。

[7]有时候思维反过来，用 $\gamma/\omega\epsilon \gg 1$ 定义媒质为良导体 (good conductor)，$\gamma/\omega\epsilon \ll 1$ 为良绝缘体 (good insulator)，$\gamma = \infty$ 为理想导体 (perfect conductor)，而 $\gamma = 0$ 为理想电介质 (perfect dielectric)。$\gamma/\omega\epsilon \equiv \tan\delta$ 又定义为损耗正切 (loss tangent)。

电荷弛豫 (relaxation) 现象[8]

若 $t=0$ 瞬间一道闪电击中导体球 (半径 R)，使球体均匀携带总电荷 Q，估算球体内外在 $t>0$ 时的 $\mathbf{E},\mathbf{J}$。



▷ $\rho_0=\rho(t=0)=\frac{Q}{\frac{4\pi}{3}R^3}$。利用高斯定律 $\oiint_A \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}}=\frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon}$，

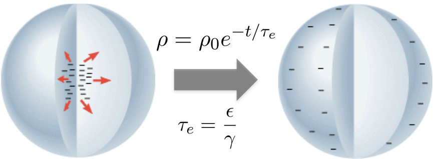
$$\begin{cases}\mathbf{E}(r\le R)=\mathbf{e}_r\dfrac{\rho(t)}{4\pi\epsilon r^2}\underbrace{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{r}r^2\mathrm{d}r}_{\frac{4\pi}{3}r^3}=\mathbf{e}_r\dfrac{Qe^{-t/\tau_e}}{4\pi\epsilon R^3}r\\ \mathbf{E}(r>R)=\mathbf{e}_r\dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\end{cases}$$

体电流密度有 $\mathbf{J}(r\le R)=\gamma\mathbf{E}(r\le R)=\mathbf{e}_r\frac{Q\gamma e^{-t/\tau_e}}{4\pi\epsilon R^3}r$。

[8]图例修改自 http://demo.webassign.net/ebooks/cj6demo/pc/c18/read/main/c18x18_8.htm

电荷弛豫 (relaxation) 现象[8]

若 $t=0$ 瞬间一道闪电击中导体球 (半径 R)，使球体均匀携带总电荷 Q，估算球体内外在 $t>0$ 时的 $\mathbf{E},\mathbf{J}$。



▷ $\rho_0=\rho(t=0)=\dfrac{Q}{\frac{4\pi}{3}R^3}$。利用高斯定律 $\oiint_A \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}}=\dfrac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon}$，

$$\begin{cases}\mathbf{E}(r\le R)=\mathbf{e}_r\dfrac{\rho(t)}{4\pi\epsilon r^2}\underbrace{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{r}r^2\mathrm{d}r}_{\frac{4\pi}{3}r^3}=\mathbf{e}_r\dfrac{Qe^{-t/\tau_e}}{4\pi\epsilon R^3}r\\ \mathbf{E}(r>R)=\mathbf{e}_r\dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\end{cases}$$

体电流密度有 $\mathbf{J}(r\le R)=\gamma\mathbf{E}(r\le R)=\mathbf{e}_r\dfrac{Q\gamma e^{-t/\tau_e}}{4\pi\epsilon R^3}r$。

★ 试指出以上分析不够严谨之处。

♠ 进阶讨论可参考 H.C. Ohanian, Am. J. Phys. **51**, 1020 (1983)

[8] 图例修改自 http://demo.webassign.net/ebooks/cj6demo/pc/c18/read/main/c18x18_8.htm

电流的分类

与本课程讨论相关的电流分成两类:

- $\boxed{\text{自由电流}}$：由宏观运动形成的电流，细分为
  - **传导电流**：$\mathbf{J}_c = \gamma \mathbf{E}$，可以是金属中的自由电子、电解质溶液的正负离子、半导体中的电子或空穴、天线电流、绕组的匝电流等。考虑传导电流时，净电荷密度为 0。

电流的分类

与本课程讨论相关的电流分成两类:

- 自由电流：由宏观运动形成的电流，细分为
  - **传导电流**：$\mathbf{J}_c = \gamma\mathbf{E}$，可以是金属中的自由电子、电解质溶液的正负离子、半导体中的电子或空穴、天线电流、绕组的匝电流等。考虑传导电流时，净电荷密度为 0。
  - **运流电流**：$\mathbf{J}_v = \rho\mathbf{v}$，在真空或气体中产生。考虑运流电流时，净电荷密度未必为 0。

电流的分类

与本课程讨论相关的电流分成两类:

- $\boxed{\text{自由电流}}$：由宏观运动形成的电流，细分为
  - **传导电流**：$\mathbf{J}_c = \gamma \mathbf{E}$，可以是金属中的自由电子、电解质溶液的正负离子、半导体中的电子或空穴、天线电流、绕组的匝电流等。考虑传导电流时，净电荷密度为 0。
  - **运流电流**：$\mathbf{J}_v = \rho \mathbf{v}$，在真空或气体中产生。考虑运流电流时，净电荷密度未必为 0。
- $\boxed{\text{束缚电流}}$：在外加电场或磁场下，由于微观运动产生，细分为
  - **极化电流**：极化电荷在外界电场随时变的情况下产生，$\mathbf{J}_p \equiv \partial \mathbf{P}/\partial t$，会积累电荷。**位移电流**中已经包含了极化电流，因为

$$\mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

电流的分类

与本课程讨论相关的电流分成两类:

- $\boxed{\text{自由电流}}$：由宏观运动形成的电流，细分为
  - **传导电流**：$\mathbf{J}_c = \gamma \mathbf{E}$，可以是金属中的自由电子、电解质溶液的正负离子、半导体中的电子或空穴、天线电流、绕组的匝电流等。考虑传导电流时，净电荷密度为 0。
  - **运流电流**：$\mathbf{J}_v = \rho \mathbf{v}$，在真空或气体中产生。考虑运流电流时，净电荷密度未必为 0。
- $\boxed{\text{束缚电流}}$：在外加电场或磁场下，由于微观运动产生，细分为
  - **极化电流**：极化电荷在外界电场随时变的情况下产生，$\mathbf{J}_p \equiv \partial \mathbf{P}/\partial t$，会积累电荷。**位移电流**中已经包含了极化电流，因为

$$\mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

  - **磁化电流**：$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$，不积累磁荷，因为 $\nabla \cdot \mathbf{J}_m = 0$。

麦克斯韦方程组在时谐情况下的表示：空间和时间的解耦

当电磁场的激发源以大致确定的频率作正弦振荡，空间(包括介质)中的电磁场也就以相同的频率作正弦振荡，称时谐(定态)电磁场(time-harmonic EM field)。一般情况下，即使电磁场不是单一频率，可以先就单频电磁场进行分析，然后，通过傅立叶分析将不同频率成分叠加获得结果。

麦克斯韦方程组在时谐情况下的表示：空间和时间的解耦

当电磁场的激发源以大致确定的频率作正弦振荡，空间 (包括介质) 中的电磁场也就以相同的频率作正弦振荡，称时谐 (定态) 电磁场 (time-harmonic EM field)。一般情况下，即使电磁场不是单一频率，可以先就单频电磁场进行分析，然后，通过傅立叶分析将不同频率成分叠加获得结果。

先考虑标量函数 $E(t)$，逐步写成以下形式 [$\omega = 2\pi f$ 为角频率，φ 为初始相位]

$$E(t) = \sqrt{2}\mathcal{E}\sin(\omega t + \varphi) = \mathrm{Im}\left(\sqrt{2}\mathcal{E}\, e^{j\varphi + j\omega t}\right) \mapsto \mathrm{Im}\left(\sqrt{2}\dot{\mathcal{E}}\, e^{j\omega t}\right)$$

其中，$\dot{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\, e^{j\varphi}$ 称为 E 的相量 (phasor) 表示式。注意，教科书中符号与此处使用不一样 $\dot{\mathcal{E}} \leftrightarrow \dot{\mathbf{E}}$。此处及以下，我们以 $\dot{}$ 代表从时 (间) 域转换到频 (率) 域。更多教科书写为 $\tilde{\mathcal{E}}$。

时谐矢量的复数表示

对于时域的三维矢量场，$\omega = 2\pi f$ 为角频率，$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ 为初始相位

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(x, y, z, t) &= \sqrt{2}\mathcal{E}_x \sin(\omega t + \varphi_x)\mathbf{e}_x + \sqrt{2}\mathcal{E}_y \sin(\omega t + \varphi_y)\mathbf{e}_y \\
&\quad + \sqrt{2}\mathcal{E}_z \sin(\omega t + \varphi_z)\mathbf{e}_z \\
&\mapsto \operatorname{Im}\left(\sqrt{2}\dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}\, e^{j\omega t}\right)
\end{aligned}
$$

其中，$\dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = \dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(x, y, z) = \dot{\mathcal{E}}_x\mathbf{e}_x + \dot{\mathcal{E}}_y\mathbf{e}_y + \dot{\mathcal{E}}_z\mathbf{e}_z$。关于时谐场的复数表示，以下几点值得注意:

1. $\dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ 仍为三维空间的函数，但已经不是时间的函数

时谐矢量的复数表示

对于时域的三维矢量场，$\omega = 2\pi f$ 为角频率，$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ 为初始相位

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(x, y, z, t) &= \sqrt{2}\mathcal{E}_x \sin(\omega t + \varphi_x)\mathbf{e}_x + \sqrt{2}\mathcal{E}_y \sin(\omega t + \varphi_y)\mathbf{e}_y \\
&\quad + \sqrt{2}\mathcal{E}_z \sin(\omega t + \varphi_z)\mathbf{e}_z \\
&\mapsto \operatorname{Im}\left(\sqrt{2}\dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}\, e^{j\omega t}\right)
\end{aligned}
$$

其中，$\dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = \dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(x, y, z) = \dot{\mathcal{E}}_x\mathbf{e}_x + \dot{\mathcal{E}}_y\mathbf{e}_y + \dot{\mathcal{E}}_z\mathbf{e}_z$。关于时谐场的复数表示，以下几点值得注意:

1. $\dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ 仍为三维空间的函数，但已经不是时间的函数
2. 比较电路理论中的电流、电压相量

时谐矢量的复数表示

对于时域的三维矢量场，$\omega = 2\pi f$ 为角频率，$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ 为初始相位

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x, y, z, t) &= \sqrt{2}\mathcal{E}_x \sin(\omega t + \varphi_x)\mathbf{e}_x + \sqrt{2}\mathcal{E}_y \sin(\omega t + \varphi_y)\mathbf{e}_y \\ &\quad + \sqrt{2}\mathcal{E}_z \sin(\omega t + \varphi_z)\mathbf{e}_z \\ &\quad \mapsto \operatorname{Im}\left(\sqrt{2}\dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}\, e^{j\omega t}\right)\end{aligned}$$

其中，$\dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = \dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(x, y, z) = \dot{\mathcal{E}}_x\mathbf{e}_x + \dot{\mathcal{E}}_y\mathbf{e}_y + \dot{\mathcal{E}}_z\mathbf{e}_z$。关于时谐场的复数表示，以下几点值得注意:

1. $\dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ 仍为三维空间的函数，但已经不是时间的函数
2. 比较电路理论中的电流、电压相量
3. 只有频率相同的相量才能使用复矢量方法进行运算

时谐矢量的复数表示

对于时域的三维矢量场，$\omega = 2\pi f$ 为角频率，$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ 为初始相位

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x, y, z, t) &= \sqrt{2}\mathcal{E}_x \sin(\omega t + \varphi_x)\mathbf{e}_x + \sqrt{2}\mathcal{E}_y \sin(\omega t + \varphi_y)\mathbf{e}_y \\ &\quad + \sqrt{2}\mathcal{E}_z \sin(\omega t + \varphi_z)\mathbf{e}_z \\ &\quad \mapsto \operatorname{Im}\left(\sqrt{2}\dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}\, e^{j\omega t}\right)\end{aligned}$$

其中，$\dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = \dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(x, y, z) = \dot{\mathcal{E}}_x\mathbf{e}_x + \dot{\mathcal{E}}_y\mathbf{e}_y + \dot{\mathcal{E}}_z\mathbf{e}_z$。关于时谐场的复数表示，以下几点值得注意:

1. $\dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ 仍为三维空间的函数，但已经不是时间的函数
2. 比较电路理论中的电流、电压相量
3. 只有频率相同的相量才能使用复矢量方法进行运算
4. 如果以上用 cosine 作为基底，则 Im 改为 Re

时谐矢量的复数表示

对于时域的三维矢量场，$\omega = 2\pi f$ 为角频率，$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ 为初始相位

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(x, y, z, t) &= \sqrt{2}\mathcal{E}_x \sin(\omega t + \varphi_x)\mathbf{e}_x + \sqrt{2}\mathcal{E}_y \sin(\omega t + \varphi_y)\mathbf{e}_y \\
&\quad + \sqrt{2}\mathcal{E}_z \sin(\omega t + \varphi_z)\mathbf{e}_z \\
&\mapsto \operatorname{Im}\left(\sqrt{2}\dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}\, e^{j\omega t}\right)
\end{aligned}
$$

其中，$\dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = \dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(x, y, z) = \dot{\mathcal{E}}_x\mathbf{e}_x + \dot{\mathcal{E}}_y\mathbf{e}_y + \dot{\mathcal{E}}_z\mathbf{e}_z$。关于时谐场的复数表示，以下几点值得注意:

1. $\dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ 仍为三维空间的函数，但已经不是时间的函数
2. 比较电路理论中的电流、电压相量
3. 只有频率相同的相量才能使用复矢量方法进行运算
4. 如果以上用 cosine 作为基底，则 Im 改为 Re
5. 在有些教科书或文献中，直接以 $\mathbf{E}(x, y, z, t) = \dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}\, e^{j\omega t}$ 表示，省略了 Im 与 $\sqrt{2}$

时谐电磁场的复数表示

由相量的特性知，$\boxed{\partial/\partial t \leftrightarrow j\omega}$。

时谐电磁场的复数表示

由相量的特性知，$\boxed{\partial/\partial t \leftrightarrow j\omega}$。

利用时谐电磁场的复数表示，在一个固定频率下，电磁材料本构方程可以写成 $\dot{\mathbf{D}} = \epsilon\dot{\mathbf{E}}$、$\dot{\mathbf{B}} = \mu\dot{\mathbf{H}}$、$\dot{\mathbf{J}}_c = \gamma\dot{\mathbf{E}}$。注意 ϵ, μ, γ 可能是频率的函数。麦克斯韦方程组也可以写成时谐复数形式，有

时谐电磁场的复数表示

由相量的特性知，$\boxed{\partial/\partial t \leftrightarrow j\omega}$。

利用时谐电磁场的复数表示，在一个固定频率下，电磁材料本构方程可以写成 $\dot{\mathbf{D}} = \epsilon\dot{\mathbf{E}}$、$\dot{\mathbf{B}} = \mu\dot{\mathbf{H}}$、$\dot{\mathbf{J}}_c = \gamma\dot{\mathbf{E}}$。注意 ϵ, μ, γ 可能是频率的函数。麦克斯韦方程组也可以写成时谐复数形式，有

定律：时变电磁场基本方程 (微分形式)

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho \Leftrightarrow \nabla\cdot\dot{\mathbf{D}} = \dot{\rho}$$

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \nabla\times\dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\dot{\mathbf{H}}$$

$$\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \Leftrightarrow \nabla\times\dot{\mathbf{H}} = \gamma\dot{\mathbf{E}} + j\omega\epsilon\dot{\mathbf{E}} \equiv j\omega\epsilon_c\dot{\mathbf{E}}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow \nabla\cdot\dot{\mathbf{B}} = 0$$

$$\nabla\cdot\mathbf{J} + \partial\rho/\partial t = 0 \Leftrightarrow \nabla\cdot\dot{\mathbf{J}} + j\omega\dot{\rho} = 0$$

讨论：为什么引入时谐电磁场、为什么使用复数表达?♠

线性代数的概念：时变电磁场可能具有多个频率，为了使分析具有普适性，一般我们分析其基底/特征函数的特性。**如果**物理系统是线性的，并且能找到基底/特征函数，则此种分析的结果具有高度普适性与应用价值。

讨论：为什么引入时谐电磁场、为什么使用复数表达?♠

线性代数的概念：时变电磁场可能具有多个频率，为了使分析具有普适性，一般我们分析其基底/特征函数的特性。**如果**物理系统是线性的，并且能找到基底/特征函数，则此种分析的结果具有高度普适性与应用价值。

复数表达可以大大简化运算，特别是对“二次量”而言，如后面将会介绍的坡印廷矢量 $\mathbf{S}$、功率 P 等。

讨论：为什么引入时谐电磁场、为什么使用复数表达？♠

线性代数的概念：时变电磁场可能具有多个频率，为了使分析具有普适性，一般我们分析其基底/特征函数的特性。**如果**物理系统是线性的，并且能找到基底/特征函数，则此种分析的结果具有高度普适性与应用价值。

复数表达可以大大简化运算，特别是对“二次量”而言，如后面将会介绍的坡印廷矢量 $\mathbf{S}$、功率 P 等。

★ 时谐相量表示主要适用于单一频率或窄带电磁信号，又称频域电磁理论。对于非线性、短脉冲、宽带电磁场，时谐相量表示未必合适，则需要时域电磁理论。

讨论: 为什么引入时谐电磁场、为什么使用复数表达?♠

线性代数的概念: 时变电磁场可能具有多个频率，为了使分析具有普适性，一般我们分析其基底/特征函数的特性。**如果**物理系统是线性的，并且能找到基底/特征函数，则此种分析的结果具有高度普适性与应用价值。

复数表达可以大大简化运算，特别是对“二次量”而言，如后面将会介绍的坡印廷矢量 $\mathbf{S}$、功率 P 等。

★ 时谐相量表示主要适用于单一频率或窄带电磁信号，又称频域电磁理论。对于非线性、短脉冲、宽带电磁场，时谐相量表示未必合适，则需要时域电磁理论。
★★ 试想，当电磁脉冲时长短于其波长时，相位与频率的意义何解?

介电常数的复数表示

定义导电媒质的复介电常数 (complex dielectric constant)

$$\epsilon_c = \epsilon \left(1 - j\frac{\gamma}{\omega\epsilon}\right) = \epsilon\,(1 - j\tan\delta)$$

此处虚部表示媒质的频率响应。电流经过导电媒质会有热效应，加上弛豫损耗效应，一般会再将复介电常数扩充为

$$\epsilon_c = \epsilon' - j\left(\epsilon'' + \frac{\gamma}{\omega}\right)$$

介电常数的复数表示

定义导电媒质的复介电常数 (complex dielectric constant)

$$\epsilon_c = \epsilon\left(1 - j\frac{\gamma}{\omega\epsilon}\right) = \epsilon\,(1 - j\tan\delta)$$

此处虚部表示媒质的频率响应。电流经过导电媒质会有热效应，加上弛豫损耗效应，一般会再将复介电常数扩充为

$$\epsilon_c = \epsilon' - j\left(\epsilon'' + \frac{\gamma}{\omega}\right)$$

结束这节前，简单讨论关于虚数单元 j 与 i 的使用与区别 ♠

说明

按照课程教科书，我们选择 $e^{j\omega t}$ 作为时谐场时间依存关系。有些教科书选用 $e^{-j\omega t}$，则对应的 $\partial/\partial t$ 也就差一个负号，且 ϵ_c 表示也稍有差异。一般工程类电磁场教科书使用 j，而物理类电磁场教科书则采用 i，有 $j = \pm i$ (正负选择随意但不随便)。微妙的影响在于当我们完成从频域 $(\omega, \mathbf{k})$ 分析场量，转回时域 $(t, \mathbf{r})$ 时，要注意逆傅立叶转换时，在复空间回路积分的选择应避免违反因果律与发散问题。

分界面边界条件: 一般形式

- 电场的边界条件
  - ① $E_{1\mathrm{t}} = E_{2\mathrm{t}}$ 或 $\widehat{\mathbf{n}}_{1\to 2} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0}$
  - ② $D_{2\mathrm{n}} - D_{1\mathrm{n}} = \sigma_f$ 或 $\widehat{\mathbf{n}}_{1\to 2} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma_f$
- 磁场的边界条件
  - ① $B_{1\mathrm{n}} = B_{2\mathrm{n}}$ 或 $\widehat{\mathbf{n}}_{1\to 2} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$
  - ② $H_{2\mathrm{t}} - H_{1\mathrm{t}} = K_f$ 或 $\widehat{\mathbf{n}}_{1\to 2} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}_f$
- 传导电流的边界条件 (γ 有限且不为零)
  - ① $J_{2n} - J_{1n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}$ 或 $\widehat{\mathbf{n}}_{1\to 2} \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}$

分界面边界条件: 一般形式

- 电场的边界条件

  ① $E_{1\mathrm{t}} = E_{2\mathrm{t}}$ 或 $\hat{\mathbf{n}}_{1\to 2} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0}$

  ② $D_{2\mathrm{n}} - D_{1\mathrm{n}} = \sigma_f$ 或 $\hat{\mathbf{n}}_{1\to 2} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma_f$
- 磁场的边界条件

  ① $B_{1\mathrm{n}} = B_{2\mathrm{n}}$ 或 $\hat{\mathbf{n}}_{1\to 2} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$

  ② $H_{2\mathrm{t}} - H_{1\mathrm{t}} = K_f$ 或 $\hat{\mathbf{n}}_{1\to 2} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}_f$
- 传导电流的边界条件 (γ 有限且不为零)

  ① $J_{2n} - J_{1n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}$ 或 $\hat{\mathbf{n}}_{1\to 2} \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}$

若以时谐的复数表示，以上物理量加˙，并且 $\partial/\partial t \leftrightarrow j\omega$。

注意，对静电场或恒定场而言，以上边界条件都是独立的。对时变场而言，除传导电流的边界条件外，其它知道切线方向边界条件，则法向边界条件可以获得 (反之亦同)。

分界面边界条件: 理想导体

假设 1 为理想导体 ($\gamma_1 = \infty$), 2 为理想介质 ($\gamma_2 = 0$), 则 $\mathbf{E}_1 = \mathbf{D}_1 = \mathbf{B}_1 = \mathbf{H}_1 = \mathbf{0}$, 有

- 电场的边界条件
  - ① $E_{2\mathrm{t}} = 0$ 或 $\widehat{\mathbf{n}}_{1\to 2} \times \mathbf{E}_2 = \mathbf{0}$
  - ② $D_{2\mathrm{n}} = \sigma_f$ 或 $\widehat{\mathbf{n}}_{1\to 2} \cdot \mathbf{D}_2 = \sigma_f$
- 磁场的边界条件
  - ① $B_{2\mathrm{n}} = 0$ 或 $\widehat{\mathbf{n}}_{1\to 2} \cdot \mathbf{B}_2 = 0$
  - ② $H_{2\mathrm{t}} = K_f$ 或 $\widehat{\mathbf{n}}_{1\to 2} \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{K}_f$

分界面边界条件：理想导体

假设 1 为理想导体 ($\gamma_1 = \infty$)，2 为理想介质 ($\gamma_2 = 0$)，则 $\mathbf{E}_1 = \mathbf{D}_1 = \mathbf{B}_1 = \mathbf{H}_1 = \mathbf{0}$，有

- 电场的边界条件
  - ① $E_{2\mathrm{t}} = 0$ 或 $\hat{\mathbf{n}}_{1\to2} \times \mathbf{E}_2 = \mathbf{0}$
  - ② $D_{2\mathrm{n}} = \sigma_f$ 或 $\hat{\mathbf{n}}_{1\to2} \cdot \mathbf{D}_2 = \sigma_f$
- 磁场的边界条件
  - ① $B_{2\mathrm{n}} = 0$ 或 $\hat{\mathbf{n}}_{1\to2} \cdot \mathbf{B}_2 = 0$
  - ② $H_{2\mathrm{t}} = K_f$ 或 $\hat{\mathbf{n}}_{1\to2} \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{K}_f$

在理想导体表面，时变电场必须垂直导体表面，而时变磁场必须与其表面相切，且垂直面电流方向。

无源电磁场方程

无源即 $\mathbf{J}_{\text{ext}} = \mathbf{0}, \rho_f = 0$，则麦克斯韦方程组可简化为

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot \dot{\mathbf{D}} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\dot{\mathbf{H}}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \gamma\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \Leftrightarrow \nabla \times \dot{\mathbf{H}} = j\omega\epsilon_c\dot{\mathbf{E}}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot \dot{\mathbf{B}} = 0$$

其中，$\gamma\mathbf{E} = \mathbf{J}_c$。

无源电磁场方程

无源即 $\mathbf{J}_{\text{ext}} = \mathbf{0}, \rho_f = 0$，则麦克斯韦方程组可简化为

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot \dot{\mathbf{D}} = 0$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\dot{\mathbf{H}}$$
$$\nabla \times \mathbf{H} = \gamma\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \Leftrightarrow \nabla \times \dot{\mathbf{H}} = j\omega\epsilon_c\dot{\mathbf{E}}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot \dot{\mathbf{B}} = 0$$

其中，$\gamma\mathbf{E} = \mathbf{J}_c$。在时域中，对法拉第定律与全电流定律分别在等式两边取旋度，得

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu\epsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mu\frac{\partial \mathbf{J}_c}{\partial t}$$
$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} + \mu\epsilon\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \nabla \times \mathbf{J}_c$$

无源电磁场方程

通过数学操作，可以得到时变电场与磁场的波动方程组

$$\nabla^2 \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} - \mu\gamma \frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \nabla^2 \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{E}} \\ \dot{\mathbf{H}} \end{Bmatrix} + \omega^2 \mu\epsilon_c \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{E}} \\ \dot{\mathbf{H}} \end{Bmatrix} = 0 \qquad \text{[Helmholtz 方程]}$$

无源电磁场方程

通过数学操作，可以得到时变电场与磁场的波动方程组

$$\nabla^2 \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} - \mu\gamma \frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \nabla^2 \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{E}} \\ \dot{\mathbf{H}} \end{Bmatrix} + \omega^2 \mu\epsilon_c \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{E}} \\ \dot{\mathbf{H}} \end{Bmatrix} = 0 \qquad \text{[Helmholtz 方程]}$$

★ 参考教科书 §7.3.1，试从麦克斯韦方程出发，推导 Helmholtz 方程。

无源电磁场方程

通过数学操作，可以得到时变电场与磁场的波动方程组

$$\nabla^2 \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} - \mu\gamma \frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \nabla^2 \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{E}} \\ \dot{\mathbf{H}} \end{Bmatrix} + \omega^2 \mu \epsilon_c \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{E}} \\ \dot{\mathbf{H}} \end{Bmatrix} = 0 \qquad \text{[Helmholtz 方程]}$$

★ 参考教科书 §7.3.1，试从麦克斯韦方程出发，推导 Helmholtz 方程。
★ 检视得到 Helmholtz 方程的过程中用到了哪些假设？注意，上式结果并不是最具一般性的电磁波方程。

无源电磁场方程

通过数学操作，可以得到时变电场与磁场的波动方程组

$$\nabla^2 \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} - \mu\gamma \frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ \nabla^2 \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{E}} \\ \dot{\mathbf{H}} \end{Bmatrix} + \omega^2 \mu\epsilon_c \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{E}} \\ \dot{\mathbf{H}} \end{Bmatrix} = 0 \qquad \text{[Helmholtz 方程]}$$

★ 参考教科书 §7.3.1，试从麦克斯韦方程出发，推导 Helmholtz 方程。
★ 检视得到 Helmholtz 方程的过程中用到了哪些假设？注意，上式结果并不是最具一般性的电磁波方程。

例：无限大平面电流激发平面电磁场 ▸ 例题 3。
例：电磁参数的尺寸缩放 ▸ 例题 4。
例：自由空间中的时变场 ▸ 例题 5。

波的分类 ♠

按场的坐标变换方式，有标量波 (scalar wave)、矢量波 (vector wave)、张量波 (tensor wave)、旋量波 (spinor wave) 等。

- 标量 ⇒ 压力波方程 ⇒ $\nabla^2 p - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$、物质波方程 (薛定谔方程) ⇒ $\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi - U\psi + i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0$
- 矢量 ⇒ 电磁波方程 ⇒ $\nabla^2\mathbf{E} + \mu\epsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0}$
- 张量 ⇒ 重力波方程 (爱因斯坦场方程) ⇒ $\mathbb{G} + \Lambda\mathcal{G} = \frac{8\pi G}{c^4}\mathbb{T}$
- 旋量 ⇒ 自旋-1/2 方程 (狄拉克方程) ⇒ $\gamma^\mu\left(i\hbar\partial_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right)\psi - m_0 c\psi = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{0}}$

按介质种类分，有在固体中的弹性波 (elastic wave)、在液体或气体的声波 (acoustic wave)、电磁波等，又通称经典波 (classical wave)。

时变电磁场是一种波

> ...After proposition 14 Maxwell quickly concluded that there should be electromagnetic waves. He calculated their velocity, compared it with the known velocity of light, and reached the momentous conclusion that "We can scarcely avoid the inference that *light consists in the transverse undulations of the same medium which is the cause of electric and magnetic phenomena*" (page 500; the italics are Maxwell's).
>
> Maxwell was a religious person. I wonder whether after this momentous discovery he had in his prayers asked for God's forgiveness for revealing one of His greatest secrets.
>
> ---
>
> 杨振宁 (1922-)

节录自 C.N. Yang, The conceptual origins of Maxwell's equations and gauge theory, Physics Today (2014)

引入静态位的思路[9]

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{D}=\rho\\ \nabla\times\vec{E}=0\end{cases}\;\longrightarrow\;\begin{cases}\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon\\ \vec{E}=-\nabla\varphi\end{cases}\;\longrightarrow\;\nabla^2\varphi=-\rho/\varepsilon$$

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{J}\end{cases}\;\longrightarrow\;\begin{cases}\vec{B}=\nabla\times\vec{A}\\ \nabla\times\vec{B}=\mu\vec{J}\end{cases}\;\longrightarrow\;\nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)=\mu\vec{J}\;\longrightarrow\;\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}=\mu\vec{J}$$

$$\begin{cases}\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}=\mu\vec{J}\\ \nabla\cdot\vec{A}=0\end{cases}\;\longrightarrow\;\nabla^2\vec{A}=-\mu\vec{J}$$

[9] 取自叶齐政教授上课 ppt。

动态位[10]

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{D}=\rho \\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \\ \nabla\times\vec{H}=\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{J} \end{cases}$$

$$\varepsilon\nabla\cdot\vec{E}=\rho$$

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$$

$$\nabla\times\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0$$

$$\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi$$

$$\mu\nabla\times\vec{H}=\nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)$$

$$\mu\nabla\times\vec{H}=\mu\vec{J}+\mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\mu\vec{J}+\mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}$$

$$\nabla^2\varphi+\nabla\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla^2\vec{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t}=-\mu\vec{J}+\nabla\left(\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{A}\right)$$

$$\nabla\cdot\vec{A}=?$$

[10] 取自叶齐政教授上课 ppt。

利用$\boxed{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}}$与$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial\mathbf{A}/\partial t}$，可以将麦克斯韦方程组表示为 φ 与 $\mathbf{A}$ 的标量-矢量耦合方程组

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi + \dfrac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbf{A} = -\dfrac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla^2\mathbf{A} - \mu\epsilon\dfrac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A} + \mu\epsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -\mu\mathbf{J} \end{cases}$$

[11]又称辐射规范 (radiation gauge)、横向规范 (transverse gauge)。

利用 $\boxed{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}}$ 与 $\boxed{\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial\mathbf{A}/\partial t}$，可以将麦克斯韦方程组表示为 φ 与 $\mathbf{A}$ 的标量-矢量耦合方程组

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi + \dfrac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbf{A} = -\dfrac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla^2\mathbf{A} - \mu\epsilon\dfrac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A} + \mu\epsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -\mu\mathbf{J} \end{cases}$$

在库仑规范 (Coulomb gauge)[11]下，$\boxed{\nabla\cdot\mathbf{A} = 0}$，有

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi = -\dfrac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla^2\mathbf{A} - \mu\epsilon\dfrac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu\epsilon\dfrac{\partial\nabla\varphi}{\partial t} = -\mu\mathbf{J} \end{cases}$$

[11] 又称辐射规范 (radiation gauge)、横向规范 (transverse gauge)。

利用 $\boxed{\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}}$ 与 $\boxed{\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\partial\mathbf{A}/\partial t}$，可以将麦克斯韦方程组表示为 φ 与 $\mathbf{A}$ 的标量-矢量耦合方程组

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi+\dfrac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbf{A}=-\dfrac{\rho}{\epsilon}\\ \nabla^2\mathbf{A}-\mu\epsilon\dfrac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}-\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}+\mu\epsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=-\mu\mathbf{J}\end{cases}$$

在库仑规范 (Coulomb gauge)[11]下，$\boxed{\nabla\cdot\mathbf{A}=0}$，有

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi=-\dfrac{\rho}{\epsilon}\\ \nabla^2\mathbf{A}-\mu\epsilon\dfrac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}-\mu\epsilon\dfrac{\partial\nabla\varphi}{\partial t}=-\mu\mathbf{J}\end{cases}$$

在洛伦兹规范 (Lorenz gauge) 下，$\boxed{\nabla\cdot\mathbf{A}=-\mu\epsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}}$，有

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi-\mu\epsilon\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\dfrac{\rho}{\epsilon}\\ \nabla^2\mathbf{A}-\mu\epsilon\dfrac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\mu\mathbf{J}\end{cases}$$

[11] 又称辐射规范 (radiation gauge)、横向规范 (transverse gauge)。

动态位

注意上页中的 $\mathbf{J}$ 一般表示式可写作 $\mathbf{J}=\mathbf{J}_{\text{ext}}+\gamma\mathbf{E}$。在理想介质中，$\mathbf{J}=\mathbf{J}_{\text{ext}}$，则利用洛伦兹规范，若已知电荷分布，可以单独求出动态标量位；已知电流密度分布，可以单独求出动态矢量位。但是最后求解电场时，同时需要 φ 与 $\mathbf{A}$。

动态位

注意上页中的 $\mathbf{J}$ 一般表示式可写作 $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\text{ext}} + \gamma\mathbf{E}$。在理想介质中，$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\text{ext}}$，则利用洛伦兹规范，若已知电荷分布，可以单独求出动态标量位；已知电流密度分布，可以单独求出动态矢量位。但是最后求解电场时，同时需要 φ 与 $\mathbf{A}$。

利用库仑规范的分析多见于**低频**电磁场，例如涡流问题，电力装置 (工频) 中问题等。利用洛伦兹规范的分析则有**高频**电磁场，例如天线辐射，(相对论) 加速荷电粒子辐射等。

动态位

注意上页中的 $\mathbf{J}$ 一般表示式可写作 $\mathbf{J}=\mathbf{J}_{\text{ext}}+\gamma\mathbf{E}$。在理想介质中，$\mathbf{J}=\mathbf{J}_{\text{ext}}$，则利用洛伦兹规范，若已知电荷分布，可以单独求出动态标量位；已知电流密度分布，可以单独求出动态矢量位。但是最后求解电场时，同时需要 φ 与 $\mathbf{A}$。

利用库仑规范的分析多见于**低频**电磁场，例如涡流问题，电力装置 (工频) 中问题等。利用洛伦兹规范的分析则有**高频**电磁场，例如天线辐射，(相对论) 加速荷电粒子辐射等。

说明

1. 仅由 $\mathbf{A}$ 和 φ 描述电磁现象不是唯一的，即，给定 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 并不对应唯一的 $\mathbf{A}$ 和 φ
2. 每一组 $\mathbf{A}$ 和 φ 称为一种规范 (gauge)
3. 当“位”作规范变换 (gauge transformation) 时，所有可测量的物理量和物理规律都应该保持不变，称规范不变性 (guage invariance)

以前算 $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ 都没问题，为什么出现 $\mathbf{A}, \varphi$ 之后一切变调了？

因为在 Ch3 介绍的 $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ 与 Ch5 介绍的 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$，其中 φ 与 $\mathbf{A}$ 如今都无法唯一确定[12]。计算 $\mathbf{A}, \varphi$ 具有 (不少) 自由度，不再像计算 $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ 那么直接。麻烦之处在于，按照物理要求，$\mathbf{E}, \mathbf{B}$ 不能因为“位”的改变而不同。因此，φ 与 $\mathbf{A}$ 就需要满足某种规范。

[12] 记得以前 Ch3 可以唯一确定的前提是 $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$，现在不成立。至于磁场，在 Ch5 我们曾提及一般 $\mathbf{A}$ 的选择不是唯一的，因为 $\nabla \times \mathbf{B}$ 一般 $\neq \mathbf{0}$。

[13] 如果选到不合适的规范，可能让问题复杂到解不出来。

以前算 $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ 都没问题，为什么出现 $\mathbf{A}, \varphi$ 之后一切变调了?

因为在 Ch3 介绍的 $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ 与 Ch5 介绍的 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$，其中 φ 与 $\mathbf{A}$ 如今都无法唯一确定[12]。计算 $\mathbf{A}, \varphi$ 具有 (不少) 自由度，不再像计算 $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ 那么直接。麻烦之处在于，按照物理要求，$\mathbf{E}, \mathbf{B}$ 不能因为“位”的改变而不同。因此，φ 与 $\mathbf{A}$ 就需要满足某种规范。

该满足哪些规范? ▶ 如，库仑规范、洛伦兹规范。但是，这只是实用的规范，并不是唯二的规范。针对特定问题，选择适当的规范可以大大简化问题分析[13]。

[12]记得以前 Ch3 可以唯一确定的前提是 $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$，现在不成立。至于磁场，在 Ch5 我们曾提及一般 $\mathbf{A}$ 的选择不是唯一的，因为 $\nabla \times \mathbf{B}$ 一般 $\neq \mathbf{0}$。

[13]如果选到不合适的规范，可能让问题复杂到解不出来。

以前算 $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ 都没问题，为什么出现 $\mathbf{A}, \varphi$ 之后一切变调了？

因为在 Ch3 介绍的 $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ 与 Ch5 介绍的 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$，其中 φ 与 $\mathbf{A}$ 如今都无法唯一确定[12]。计算 $\mathbf{A}, \varphi$ 具有 (不少) 自由度，不再像计算 $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ 那么直接。麻烦之处在于，按照物理要求，$\mathbf{E}, \mathbf{B}$ 不能因为“位”的改变而不同。因此，φ 与 $\mathbf{A}$ 就需要满足某种规范。

该满足哪些规范？▶ 如，库仑规范、洛伦兹规范。但是，这只是实用的规范，并不是唯二的规范。针对特定问题，选择适当的规范可以大大简化问题分析[13]。
今天假设一位同学找到了一组 $(\mathbf{A}, \varphi)$，另一位同学找到了另一组 $(\mathbf{A}', \varphi')$，如何判断谁对？一个直观的方法是，让两位同学接着算 $\mathbf{E}, \mathbf{B}$，只要他们能得到一样的 $\mathbf{E}, \mathbf{B}$，那么他们找到的两组 $(\mathbf{A}, \varphi)$ 都是对的。

[12] 记得以前 Ch3 可以唯一确定的前提是 $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$，现在不成立。至于磁场，在 Ch5 我们曾提及一般 $\mathbf{A}$ 的选择不是唯一的，因为 $\nabla \times \mathbf{B}$ 一般 $\neq \mathbf{0}$。

[13] 如果选到不合适的规范，可能让问题复杂到解不出来。

好，那么从 $(\mathbf{A}, \varphi)$ 求 $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ 已经有了操作型定义，只是，有些问题这个求解虽然直观，但却需要不少时间。有没有更有效率的检验方式？ ▶ 规范变换。

好，那么从 $(\mathbf{A}, \varphi)$ 求 $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ 已经有了操作型定义，只是，有些问题这个求解虽然直观，但却需要不少时间。有没有更有效率的检验方式？ ▶ 规范变换。

什么是规范变换？其数学形式是什么？

$$\text{电磁作用的规范变换:} \begin{cases} \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f \\ \varphi' = \varphi - \dfrac{\partial f}{\partial t} \end{cases}$$

其中，f 为一标量函数，称规范函数 (gauge function)。

好，那么从 $(\mathbf{A},\varphi)$ 求 $\mathbf{E},\mathbf{B}$ 已经有了操作型定义，只是，有些问题这个求解虽然直观，但却需要不少时间。有没有更有效率的检验方式？ ▶ 规范变换。

什么是规范变换？其数学形式是什么？

$$\text{电磁作用的规范变换:}\ \begin{cases}\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f \\ \varphi' = \varphi - \dfrac{\partial f}{\partial t}\end{cases}$$

其中，f 为一标量函数，称规范函数 (gauge function)。

★ 试验证，两组 $(\mathbf{A},\varphi)$ 与 $(\mathbf{A}',\varphi')$ 若满足以上规范变换，则 $\mathbf{E}=\mathbf{E}',\mathbf{B}=\mathbf{B}'$。

好，那么从 $(\mathbf{A},\varphi)$ 求 $\mathbf{E},\mathbf{B}$ 已经有了操作型定义，只是，有些问题这个求解虽然直观，但却需要不少时间。有没有更有效率的检验方式？ ▶ 规范变换。

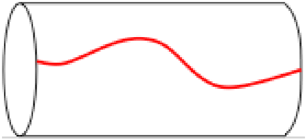
什么是规范变换？其数学形式是什么？

$$\text{电磁作用的规范变换:} \begin{cases} \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f \\ \varphi' = \varphi - \dfrac{\partial f}{\partial t} \end{cases}$$

其中，f 为一标量函数，称规范函数 (gauge function)。

★ 试验证，两组 $(\mathbf{A},\varphi)$ 与 $(\mathbf{A}',\varphi')$ 若满足以上规范变换，则 $\mathbf{E}=\mathbf{E}',\mathbf{B}=\mathbf{B}'$。

★ 知道了库仑规范与洛伦兹规范，它们之间的物理有什么不同处？选哪个好？
▷ 两种规范包含的物理一样多，没有不同。也没有那个规范更好，选择视问题而定。



$$\boxed{\underset{\text{gauge}}{\{\mathbf{A},\varphi\}} \xrightarrow[\text{gauge transformation}]{} \underset{\text{gauge}}{\{\mathbf{A}',\varphi'\}}}$$

$$\Downarrow \ \text{gauge invariance}$$

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -\nabla\varphi^{(')} - \dfrac{\partial \mathbf{A}^{(')}}{\partial t} \\ \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}^{(')} \end{cases}$$

$$\{\rho,\mathbf{J}\} \to \boxed{\{\varphi,\mathbf{A}\}} \to \{\mathbf{E},\mathbf{B}\}$$

♠ 比较大学物理学到的质点运动学 $\{m\} \to \{\mathbf{r}\} \to \{\mathbf{v}\}$。质点动力学有牛顿运动方程，电磁场动力学则是麦克斯韦方程组。

动态位 ♠

★ 在洛伦兹规范下，麦克斯韦方程简化成一组比库仑规范更对称的 $\varphi, \mathbf{A}$ 的方程，利用 Ch2 所学，写下洛伦兹规范的 $\varphi, \mathbf{A}$ 的通解形式。

★ 事实上，库仑规范下的 $\varphi, \mathbf{A}$ 方程可以通过 Helmholtz 定理[14]进一步化简。先将电流源写成 $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\parallel} + \mathbf{J}_{\perp}$，其中，$\nabla \times \mathbf{J}_{\parallel} = \mathbf{0}, \nabla \cdot \mathbf{J}_{\perp} = 0$

$$\mathbf{J}_{\perp} = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \iiint \frac{\nabla' \times \mathbf{J}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathrm{d}\mathcal{V}'$$

$$\mathbf{J}_{\parallel} = -\frac{1}{4\pi} \nabla \iiint \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathrm{d}\mathcal{V}'$$

则 $\mathbf{A}$ 的方程可以化简[15]为

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} + \mu\epsilon \frac{\partial \nabla \varphi}{\partial t} = -\mu \mathbf{J} + \mu \mathbf{J}_{\parallel} = -\mu \mathbf{J}_{\perp}$$

---

[14] 该定理指出，一个矢量函数恒可拆解成纵向场 (无旋场) 与横向场 (无散场)，即 $\mathbf{F} = -\nabla\varphi + \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{F}_{\parallel} + \mathbf{F}_{\perp}$，其中，$\mathbf{F}_{\parallel}$ 包含 $\mathbf{F}$ 的散度；$\mathbf{F}_{\perp}$ 包含 $\mathbf{F}$ 的旋度。

[15] 好处是可以利用 Ch2 所学的公式写出 $\mathbf{A}$ 的通解。

几个常用关系式

$$\nabla\cdot\spadesuit = 0 \Leftrightarrow \spadesuit = \nabla\times\clubsuit, \qquad \nabla\times\spadesuit = 0 \Leftrightarrow \spadesuit = \nabla\clubsuit$$

$$\nabla\cdot\bigstar = f(\mathbf{r}) \Leftrightarrow \bigstar = \frac{1}{4\pi}\mathbf{e}_R \int\limits_{V,A,C} \frac{f(\mathbf{r}')}{R^2(\mathbf{r},\mathbf{r}')}\mathrm{d}(\mathcal{V},\mathcal{S},\ell)'$$

$$\nabla\times\bigstar = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \Leftrightarrow \bigstar = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{V,A,C} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})\times\mathbf{e}_R}{R^2(\mathbf{r},\mathbf{r}')}\mathrm{d}(\mathcal{V},\mathcal{S},\ell)'$$

$$\nabla^2\blacksquare = -f(\mathbf{r}) \Leftrightarrow \blacksquare = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\iiint\limits_V \dfrac{f(\mathbf{r}')}{R(\mathbf{r},\mathbf{r}')}\mathrm{d}\mathcal{V}' \\ \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\iiint\limits_V \dfrac{f(\mathbf{r}')}{R(\mathbf{r},\mathbf{r}')}\mathrm{d}\mathcal{V}' + \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\oiint\limits_A \left[\dfrac{1}{R(\mathbf{r},\mathbf{r}')}\dfrac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\dfrac{\partial}{\partial n}\dfrac{1}{R(\mathbf{r},\mathbf{r}')}\right]\mathrm{d}\mathcal{S}' \end{cases}$$

物理意义：等式右边第一项表示 V内包含的场源$f(\mathbf{r})$对■的贡献。叠加原理。

等式右边第二项则表示 V外场源$f(\mathbf{r})$对■的贡献。惠更斯原理 (Huygens principle)。

$$\nabla^2\blacksquare - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\blacksquare = -f(\mathbf{r},t) \Leftrightarrow \blacksquare = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\iiint\limits_V \dfrac{f\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{R(\mathbf{r},\mathbf{r}')}\mathrm{d}\mathcal{V}' \\ \dots \end{cases}$$

物理意义：推迟效应，当$c\to\infty$, $f\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right) \to f(\mathbf{r}')$

推迟效应 (retardation effect)

回顾前几章所讨论的内容，静电场、恒定电场、恒定磁场，由于不涉及与时间相关的讨论 (除法拉第定律外)，一个隐性的假设是当时忽略了“源”建立“场”的时间效应，或者假设传递此效应的速度 $v \to \infty$。

推迟效应 (retardation effect)

回顾前几章所讨论的内容，静电场、恒定电场、恒定磁场，由于不涉及与时间相关的讨论 (除法拉第定律外)，一个隐性的假设是当时忽略了“源”建立“场”的时间效应，或者假设传递此效应的速度 $v \to \infty$。

进一步说明，考虑静电场或恒定电场情况，由 $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$，有 $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$。由本章前面讨论知，$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial\mathbf{A}/\partial t$，第二项可以视为修正项，也体现了对“场的构建”的时间效应。

推迟效应 (retardation effect)

回顾前几章所讨论的内容，静电场、恒定电场、恒定磁场，由于不涉及与时间相关的讨论 (除法拉第定律外)，一个隐性的假设是当时忽略了“源”建立“场”的时间效应，或者假设传递此效应的速度 $v \to \infty$。

进一步说明，考虑静电场或恒定电场情况，由 $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$，有 $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$。由本章前面讨论知，$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial\mathbf{A}/\partial t$，第二项可以视为修正项，也体现了对“场的构建”的时间效应。

以下选择洛伦兹规范，并假设理想电介质 ($\gamma = 0$)，有

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\dfrac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla^2\mathbf{A} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J}_{\text{ext}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla^2\dot{\varphi} + \beta^2\dot{\varphi} = -\dfrac{\dot{\rho}}{\epsilon} \\ \nabla^2\dot{\mathbf{A}} + \beta^2\dot{\mathbf{A}} = -\mu\dot{\mathbf{J}}_{\text{ext}} \end{cases}$$

其中定义了波速 $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon} \neq \infty$ (此处 μ, ϵ 与参照系选择无关) 与相位常数 $\beta = \omega/v = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$。上式波动方程又称为达朗贝尔 (D'Alembert) 方程。

φ 与 $\mathbf{A}$ 推迟解的一般形式

对于一般形式的电荷与电流分布，$\varphi, \mathbf{A}$ 有以下解形式[16]

$$\begin{cases} \varphi = \dfrac{1}{4\pi\epsilon} \iiint\limits_V \dfrac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{v}\right)}{R} \mathrm{d}\mathcal{V}' \\ \mathbf{A} = \dfrac{\mu}{4\pi} \iiint\limits_V \dfrac{\mathbf{J}_{\text{ext}}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{v}\right)}{R} \mathrm{d}\mathcal{V}' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\varphi} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon} \iiint\limits_V \dfrac{\dot{\rho}(\mathbf{r}')\, e^{-j\beta R}}{R} \mathrm{d}\mathcal{V}' \\ \dot{\mathbf{A}} = \dfrac{\mu}{4\pi} \iiint\limits_V \dfrac{\dot{\mathbf{J}}_{\text{ext}}(\mathbf{r}')\, e^{-j\beta R}}{R} \mathrm{d}\mathcal{V}' \end{cases}$$

[16] 由 Ch2 知，此式假设激励源为局域分布，因此忽略惠更斯项。

[17] 严格来说，这个模型违反 (局部的) 电荷守恒。完整的解在 Ch9 偶极子将介绍。

φ 与 $\mathbf{A}$ 推迟解的一般形式

对于一般形式的电荷与电流分布，$\varphi, \mathbf{A}$ 有以下解形式[16]

$$\begin{cases} \varphi = \dfrac{1}{4\pi\epsilon} \displaystyle\iiint_V \dfrac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{v}\right)}{R} \mathrm{d}\mathcal{V}' \\ \mathbf{A} = \dfrac{\mu}{4\pi} \displaystyle\iiint_V \dfrac{\mathbf{J}_{\text{ext}}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{v}\right)}{R} \mathrm{d}\mathcal{V}' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\varphi} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon} \displaystyle\iiint_V \dfrac{\dot{\rho}(\mathbf{r}') e^{-j\beta R}}{R} \mathrm{d}\mathcal{V}' \\ \dot{\mathbf{A}} = \dfrac{\mu}{4\pi} \displaystyle\iiint_V \dfrac{\dot{\mathbf{J}}_{\text{ext}}(\mathbf{r}') e^{-j\beta R}}{R} \mathrm{d}\mathcal{V}' \end{cases}$$

比较静电场与恒定磁场中的标量与矢量位，可发现此处额外的时间依存关系与 $e^{-j\beta R}$ 项。此处的 $\rho \mathrm{d}\mathcal{V}'$ 可换成 $\sigma \mathrm{d}\mathcal{S}'$ 或 $\tau \mathrm{d}\ell'$，电流密度亦同。

[16] 由 Ch2 知，此式假设激励源为局域分布，因此忽略惠更斯项。

[17] 严格来说，这个模型违反 (局部的) 电荷守恒。完整的解在 Ch9 偶极子将介绍。

φ 与 $\mathbf{A}$ 推迟解的一般形式

对于一般形式的电荷与电流分布，$\varphi, \mathbf{A}$ 有以下解形式[16]

$$\begin{cases} \varphi = \dfrac{1}{4\pi\epsilon} \underset{V}{\iiint} \dfrac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{v}\right)}{R} \mathrm{d}\mathcal{V}' \\ \mathbf{A} = \dfrac{\mu}{4\pi} \underset{V}{\iiint} \dfrac{\mathbf{J}_{\text{ext}}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{v}\right)}{R} \mathrm{d}\mathcal{V}' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\varphi} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon} \underset{V}{\iiint} \dfrac{\dot{\rho}(\mathbf{r}')\, e^{-j\beta R}}{R} \mathrm{d}\mathcal{V}' \\ \dot{\mathbf{A}} = \dfrac{\mu}{4\pi} \underset{V}{\iiint} \dfrac{\dot{\mathbf{J}}_{\text{ext}}(\mathbf{r}')\, e^{-j\beta R}}{R} \mathrm{d}\mathcal{V}' \end{cases}$$

比较静电场与恒定磁场中的标量与矢量位，可发现此处额外的时间依存关系与 $e^{-j\beta R}$ 项。此处的 $\rho \mathrm{d}\mathcal{V}'$ 可换成 $\sigma \mathrm{d}\mathcal{S}'$ 或 $\tau \mathrm{d}\ell'$，电流密度亦同。考虑电荷振荡 $q(t) = q_0 \sin \omega t$，在空间某处 $r \neq 0$ 的行为有[17]

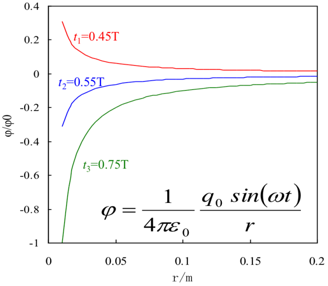
$$\varphi = \frac{q_0}{4\pi\epsilon} \frac{\sin \omega \left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} \xrightarrow{v \to \infty} \frac{q_0}{4\pi\epsilon} \frac{\sin \omega t}{r}$$

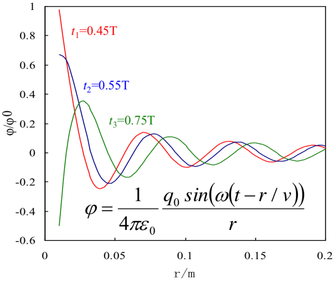
[16] 由 Ch2 知，此式假设激励源为局域分布，因此忽略惠更斯项。

[17] 严格来说，这个模型违反 (局部的) 电荷守恒。完整的解在 Ch9 偶极子将介绍。

推迟效应 (retardation effect)

下图例[18]展示是否考虑推迟效应对空间标量场的影响。





[18] 取自叶齐政教授上课 ppt。

结束本节之前，应注意，以上具有时间推迟项的时变标量位与矢量位和静电场及恒定磁场的对比关系并**不表示**对电场与磁场也有类似关系，即

说明

$$\mathbf{E} \neq \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_V \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{v}\right)\mathbf{e}_R}{R^2} \mathrm{d}\mathcal{V}'$$

$$\mathbf{B} \neq \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}_{\text{ext}}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{v}\right) \times \mathbf{e}_R}{R^2} \mathrm{d}\mathcal{V}'$$

例：无限大平面电流激发平面电磁场 例题 3

时变电磁场能量

已知在静电场中，有电场能量密度 $w_e = \frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}$。在恒定磁场中，有 $w_m = \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}$。在时变电磁场中，$\boxed{\text{实验}}$上已证实 $w_{\mathsf{EM}} = w_e + w_m$ 的正确性。如果我们想知道动态的能量流动，即功率，可以将闭合区域 V 内的电磁场 (总) 能量对时间微分，从而获得功率平衡方程，有[19]

[19]英国物理学家 John Henry Poynting (1852-1914)

时变电磁场能量

已知在静电场中，有电场能量密度 $w_e = \frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}$。在恒定磁场中，有 $w_m = \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}$。在时变电磁场中，$\boxed{\text{实验}}$上已证实 $w_{\text{EM}} = w_e + w_m$ 的正确性。如果我们想知道动态的能量流动，即功率，可以将闭合区域 V 内的电磁场 (总) 能量对时间微分，从而获得功率平衡方程，有[19]

定律：坡印廷定律 (Poynting's theorem)

积分形式:

$$\frac{\partial W_{\text{EM}}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V w_{\text{EM}}\mathrm{d}\mathcal{V} = -\oiint_A (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}} - \iiint_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}\mathrm{d}\mathcal{V}$$

微分形式: $$\frac{\partial w_{\text{EM}}}{\partial t} = -\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) - \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}$$

其中，定义 (瞬时) 坡印廷矢量为 $\boxed{\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}}$。SI 单位: W/m^2 或 J/(m^{2}sec)。$p = \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}$ 称热功率密度。

[19] 英国物理学家 John Henry Poynting (1852-1914)

对导电媒质，有 $\mathbf{J}=\gamma\mathbf{E}$，于是

$$\frac{\partial W_{\mathrm{EM}}}{\partial t}=-\oiint_A(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}}-\iiint_V\frac{J^2}{\gamma}\mathrm{d}\mathcal{V}$$

对导电媒质，有 $\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E}$，于是

$$\frac{\partial W_{\text{EM}}}{\partial t} = -\oint\!\!\oint_A (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}} - \iiint_V \frac{J^2}{\gamma}\mathrm{d}\mathcal{V}$$

上式中

- $\frac{\partial W_{\text{EM}}}{\partial t}$ 的正负表征体积 V 内单位时间的电磁能量增加 (>0) 或减少 (<0)

对导电媒质，有 $\mathbf{J}=\gamma\mathbf{E}$，于是

$$\frac{\partial W_{\mathrm{EM}}}{\partial t}=-\oiint_A(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}}-\iiint_V\frac{J^2}{\gamma}\mathrm{d}\mathcal{V}$$

上式中

- $\frac{\partial W_{\mathrm{EM}}}{\partial t}$ 的正负表征体积 V 内单位时间的电磁能量增加 (>0) 或减少 (<0)
- $\oiint_A(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}}$ 为电磁能量从闭合面 A 流**向外**的功率 ($\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ 又称能流密度)

对导电媒质，有 $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$，于是

$$\frac{\partial W_{\mathrm{EM}}}{\partial t} = -\oiint_A (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}} - \iiint_V \frac{J^2}{\gamma} \mathrm{d}\mathcal{V}$$

上式中

- $\frac{\partial W_{\mathrm{EM}}}{\partial t}$ 的正负表征体积 V 内单位时间的电磁能量增加 (> 0) 或减少 (< 0)
- $\oiint_A (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}}$ 为电磁能量从闭合面 A 流**向外**的功率 ($\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 又称能流密度)
- $\iiint_V \frac{J^2}{\gamma} \mathrm{d}\mathcal{V}$ 为体积 V 内由于传导电流产生的热功率 (恒 ≥ 0)

对导电媒质，有 $\mathbf{J}=\gamma\mathbf{E}$，于是

$$\frac{\partial W_{\mathrm{EM}}}{\partial t}=-\oiint_A(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}}-\iiint_V\frac{J^2}{\gamma}\mathrm{d}\mathcal{V}$$

上式中

- $\frac{\partial W_{\mathrm{EM}}}{\partial t}$ 的正负表征体积 V 内单位时间的电磁能量增加 (>0) 或减少 (<0)
- $\oiint_A(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}}$ 为电磁能量从闭合面 A 流**向外**的功率 ($\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ 又称能流密度)
- $\iiint_V\frac{J^2}{\gamma}\mathrm{d}\mathcal{V}$ 为体积 V 内由于传导电流产生的热功率 (恒 ≥ 0)

坡印廷矢量 $\mathbf{S}$ 除了表示单位面积瞬时功率，还带有能流的概念。因此，并不是说空间中存在 $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{H}$ 时，$\mathbf{S}$ 就有意义。 例题 6、例题 7

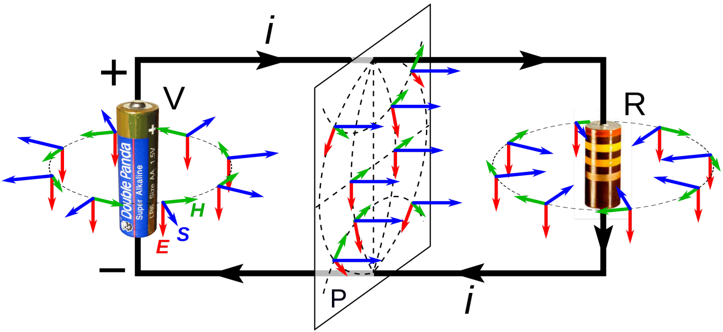
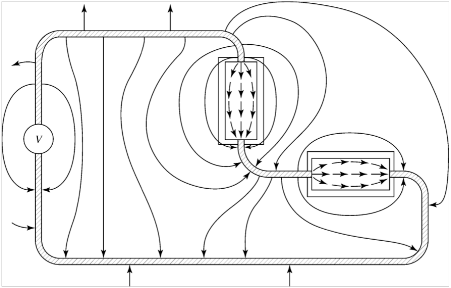


图: Poynting vector, E-field, H-field[20]

电路中各处的坡印廷矢量 **S**、电场 **E**、磁场 **H**分布。电场从高电位指向低电位，磁场按电流方向决定。电池内的由于 (化学) 电动势，将电流自 (−) 拉到 (+)。整体来看，能量流方向自电池至负载，通过导体外传输。

[20]图例取自 https://en.wikipedia.org/wiki/Poynting_vector



电路中导线外的电场分布。电阻两端加电压，把带电粒子挤压到电阻另一侧。如果电阻为线性，则电压加倍，电流加倍 (欧姆定律)。注意，有些电场跑到电阻元件的外面，为传递能量 (在电阻内的就以热形式而消耗)。导线外侧附近的电场几乎垂直导线表面，一点点平行分量用来推动带有一点点电阻的导线内的电子。电路接通后，电流就开始寻找流动路径。

坡印廷矢量在复数域表达式

定义：复坡印廷矢量

定义 (瞬时) 复坡印廷矢量为 $\dot{\mathbf{S}} = \dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*$。

[21] 推导见教科书 §7.5.2。坡印廷矢量可以视为“二次式”形式的物理量。

坡印廷矢量在复数域表达式

定义：复坡印廷矢量

定义 (瞬时) 复坡印廷矢量为 $\dot{\mathbf{S}} = \dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*$。

由上可知，(平均) 坡印廷矢量[21]

$$\mathbf{S}_{\mathsf{ave}} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{S}(\mathbf{r}, t)\mathrm{d}t \quad [T = 2\pi/\omega]$$

$$= (\boldsymbol{\mathcal{E}} \times \boldsymbol{\mathcal{H}})\cos(\varphi_E - \varphi_H) = \mathsf{Re}\left(\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*\right) = \mathsf{Re}\left(\dot{\mathbf{S}}\right)$$

[21] 推导见教科书 §7.5.2。坡印廷矢量可以视为“二次式”形式的物理量。

坡印廷矢量在复数域表达式

定义：复坡印廷矢量

定义 (瞬时) 复坡印廷矢量为 $\dot{\mathbf{S}} = \dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*$。

由上可知，(平均) 坡印廷矢量[21]

$$\mathbf{S}_{\mathsf{ave}} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{S}(\mathbf{r}, t)\mathrm{d}t \quad [T = 2\pi/\omega]$$
$$= (\boldsymbol{\mathcal{E}} \times \boldsymbol{\mathcal{H}})\cos(\varphi_E - \varphi_H) = \mathsf{Re}\left(\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*\right) = \mathsf{Re}\left(\dot{\mathbf{S}}\right)$$

其中，假设 $\dot{\mathbf{E}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r})e^{j\varphi_E}, \dot{\mathbf{H}} = \boldsymbol{\mathcal{H}}(\mathbf{r})e^{j\varphi_H}$。

[21] 推导见教科书 §7.5.2。坡印廷矢量可以视为“二次式”形式的物理量。

坡印廷矢量在复数域表达式

定义：复坡印廷矢量

定义 (瞬时) 复坡印廷矢量为 $\dot{\mathbf{S}} = \dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*$。

由上可知，(平均) 坡印廷矢量[21]

$$\mathbf{S}_{\text{ave}} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{S}(\mathbf{r}, t)\mathrm{d}t \quad [T = 2\pi/\omega]$$
$$= (\boldsymbol{\mathcal{E}} \times \boldsymbol{\mathcal{H}})\cos(\varphi_E - \varphi_H) = \text{Re}\left(\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*\right) = \text{Re}\left(\dot{\mathbf{S}}\right)$$

其中，假设 $\dot{\mathbf{E}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r})e^{j\varphi_E}, \dot{\mathbf{H}} = \boldsymbol{\mathcal{H}}(\mathbf{r})e^{j\varphi_H}$。

复坡印廷矢量的实部表示时变电磁场在一个周期内的平均能流密度，$\dot{\mathbf{S}}$ 本身不是时谐量。

[21]推导见教科书 §7.5.2。坡印廷矢量可以视为“二次式”形式的物理量。

坡印廷矢量在复数域表达式

定义：复坡印廷矢量

定义 (瞬时) 复坡印廷矢量为 $\dot{\mathbf{S}} = \dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*$。

由上可知，(平均) 坡印廷矢量[21]

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{\text{ave}} &= \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{S}(\mathbf{r}, t)\mathrm{d}t \quad [T = 2\pi/\omega] \\ &= (\boldsymbol{\mathcal{E}} \times \boldsymbol{\mathcal{H}})\cos(\varphi_E - \varphi_H) = \text{Re}\left(\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*\right) = \text{Re}\left(\dot{\mathbf{S}}\right)\end{aligned}$$

其中，假设 $\dot{\mathbf{E}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r})e^{j\varphi_E}, \dot{\mathbf{H}} = \boldsymbol{\mathcal{H}}(\mathbf{r})e^{j\varphi_H}$。

复坡印廷矢量的实部表示时变电磁场在一个周期内的平均能流密度，$\dot{\mathbf{S}}$ 本身不是时谐量。注意，有些教科书写 $\mathbf{S}_{\text{ave}} = \frac{1}{2}\text{Re}(\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*)$。$\frac{1}{2}$ 的差异是由于对相量定义少了 $\sqrt{2}$ 差异造成。

[21] 推导见教科书 §7.5.2。坡印廷矢量可以视为“二次式”形式的物理量。

坡印廷矢量在复数域表达式

类似地，一个周期内能量体密度平均有

$$w_{\mathrm{e,ave}} = \frac{1}{T}\int_0^T w_e(\mathbf{r}, t)\mathrm{d}t = \frac{\epsilon}{2}\dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}}^*$$

$$w_{\mathrm{m,ave}} = \frac{1}{T}\int_0^T w_m(\mathbf{r}, t)\mathrm{d}t = \frac{\mu}{2}\dot{\mathbf{H}} \cdot \dot{\mathbf{H}}^*$$

其中，假设 $\dot{\mathbf{E}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r})e^{j\varphi_E}, \dot{\mathbf{H}} = \boldsymbol{\mathcal{H}}(\mathbf{r})e^{j\varphi_H}$。

坡印廷矢量在复数域表达式

类似地，一个周期内能量体密度平均有

$$w_{\mathrm{e,ave}} = \frac{1}{T}\int_0^T w_e(\mathbf{r},t)\mathrm{d}t = \frac{\epsilon}{2}\dot{\mathbf{E}}\cdot\dot{\mathbf{E}}^*$$

$$w_{\mathrm{m,ave}} = \frac{1}{T}\int_0^T w_m(\mathbf{r},t)\mathrm{d}t = \frac{\mu}{2}\dot{\mathbf{H}}\cdot\dot{\mathbf{H}}^*$$

其中，假设 $\dot{\mathbf{E}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r})\,e^{j\varphi_E}, \dot{\mathbf{H}} = \boldsymbol{\mathcal{H}}(\mathbf{r})\,e^{j\varphi_H}$。

注意，有些教科书写 $w_{\mathrm{e,ave}} = \frac{\epsilon}{4}\dot{\mathbf{E}}\cdot\dot{\mathbf{E}}^*$、$w_{\mathrm{m,ave}} = \frac{\mu}{4}\dot{\mathbf{H}}\cdot\dot{\mathbf{H}}^*$。$\frac{1}{4}$ 的差异是由于对相量定义少了 $\sqrt{2}$ 差异造成。

复功率 ♠

对应于电路理论中的术语，定义复功率 $P + jQ$

$$
\begin{aligned}
&-\oiint_A (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}} = \ldots \\
&= \iiint_V \frac{\dot{\mathbf{J}} \cdot \dot{\mathbf{J}}^*}{\gamma} \mathrm{d}\mathcal{V} + 2j\omega \iiint_V \left(\frac{\mu}{2} \dot{\mathbf{H}} \cdot \dot{\mathbf{H}}^* - \frac{\epsilon}{2} \dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}}^* \right) \mathrm{d}\mathcal{V} \\
&= P + 2j\omega (W_{m,\mathrm{ave}} - W_{e,\mathrm{ave}}) = P + jQ
\end{aligned}
$$

复功率 ♠

对应于电路理论中的术语，定义复功率 $P + jQ$

$$
\begin{aligned}
&-\oiint_A (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}} = \dots \\
&= \iiint_V \frac{\dot{\mathbf{J}} \cdot \dot{\mathbf{J}}^*}{\gamma} \mathrm{d}\mathcal{V} + 2j\omega \iiint_V \left(\frac{\mu}{2}\dot{\mathbf{H}} \cdot \dot{\mathbf{H}}^* - \frac{\epsilon}{2}\dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}}^*\right) \mathrm{d}\mathcal{V} \\
&= P + 2j\omega(W_{m,\mathrm{ave}} - W_{e,\mathrm{ave}}) = P + jQ
\end{aligned}
$$

其中，

- P 称为有功功率 (real power)、Q 称为无功功率 (reactive power)；
  $P = -\oiint_A \mathrm{Re}\,(\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}}$, $Q = -\oiint_A \mathrm{Im}\,(\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}}$

复功率 ♠

对应于电路理论中的术语，定义复功率 $P+jQ$

$$
\begin{aligned}
&-\oiint_A (\dot{\mathbf{E}}\times\dot{\mathbf{H}}^*)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}} = \dots\\
&= \iiint_V \frac{\dot{\mathbf{J}}\cdot\dot{\mathbf{J}}^*}{\gamma}\mathrm{d}\mathcal{V} + 2j\omega \iiint_V \left(\frac{\mu}{2}\dot{\mathbf{H}}\cdot\dot{\mathbf{H}}^* - \frac{\epsilon}{2}\dot{\mathbf{E}}\cdot\dot{\mathbf{E}}^*\right)\mathrm{d}\mathcal{V}\\
&= P + 2j\omega(W_{m,\text{ave}} - W_{e,\text{ave}}) = P + jQ
\end{aligned}
$$

其中，

- P 称为有功功率 (real power)、Q 称为无功功率 (reactive power)；
  $P = -\oiint_A \mathrm{Re}\,(\dot{\mathbf{E}}\times\dot{\mathbf{H}}^*)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}}$, $Q = -\oiint_A \mathrm{Im}\,(\dot{\mathbf{E}}\times\dot{\mathbf{H}}^*)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}}$
- 等式左边: 流入闭合面的复功率

复功率 ♠

对应于电路理论中的术语，定义复功率 $P + jQ$

$$
\begin{aligned}
&-\oiint_A (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}} = \dots \\
&= \iiint_V \frac{\dot{\mathbf{J}} \cdot \dot{\mathbf{J}}^*}{\gamma} \mathrm{d}\mathcal{V} + 2j\omega \iiint_V \left(\frac{\mu}{2} \dot{\mathbf{H}} \cdot \dot{\mathbf{H}}^* - \frac{\epsilon}{2} \dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}}^* \right) \mathrm{d}\mathcal{V} \\
&= P + 2j\omega (W_{m,\text{ave}} - W_{e,\text{ave}}) = P + jQ
\end{aligned}
$$

其中，

- P 称为有功功率 (real power)、Q 称为无功功率 (reactive power)；
  $P = -\oiint_A \text{Re}\,(\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}}$, $Q = -\oiint_A \text{Im}\,(\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}}$
- 等式左边：流入闭合面的复功率
- 等式右边第一项 (实部)：闭合面内导电媒质消耗的功率，即有功功率

复功率 ♠

对应于电路理论中的术语，定义复功率 $P+jQ$

$$
\begin{aligned}
&-\oiint_A (\dot{\mathbf{E}}\times\dot{\mathbf{H}}^*)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}} = \dots \\
&= \iiint_V \frac{\dot{\mathbf{J}}\cdot\dot{\mathbf{J}}^*}{\gamma}\mathrm{d}\mathcal{V} + 2j\omega \iiint_V \left(\frac{\mu}{2}\dot{\mathbf{H}}\cdot\dot{\mathbf{H}}^* - \frac{\epsilon}{2}\dot{\mathbf{E}}\cdot\dot{\mathbf{E}}^*\right)\mathrm{d}\mathcal{V} \\
&= P + 2j\omega(W_{m,\text{ave}} - W_{e,\text{ave}}) = P + jQ
\end{aligned}
$$

其中，

- P 称为有功功率 (real power)、Q 称为无功功率 (reactive power)；$P = -\oiint_A \mathrm{Re}\,(\dot{\mathbf{E}}\times\dot{\mathbf{H}}^*)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}}$, $Q = -\oiint_A \mathrm{Im}\,(\dot{\mathbf{E}}\times\dot{\mathbf{H}}^*)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}}$
- 等式左边：流入闭合面的复功率
- 等式右边第一项 (实部)：闭合面内导电媒质消耗的功率，即有功功率
- 等式右边第二项 (虚部)：闭合面内电磁能量的交换及与外部的交换 (交换 $\neq$ 消耗)

复功率 ♠

对应于电路理论中的术语，定义复功率 $P + jQ$

$$
\begin{aligned}
&-\oiint_A (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}} = \dots \\
&= \iiint_V \frac{\dot{\mathbf{J}} \cdot \dot{\mathbf{J}}^*}{\gamma} \mathrm{d}\mathcal{V} + 2j\omega \iiint_V \left(\frac{\mu}{2}\dot{\mathbf{H}} \cdot \dot{\mathbf{H}}^* - \frac{\epsilon}{2}\dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}}^*\right) \mathrm{d}\mathcal{V} \\
&= P + 2j\omega(W_{m,\mathrm{ave}} - W_{e,\mathrm{ave}}) = P + jQ
\end{aligned}
$$

其中，

- P 称为有功功率 (real power)、Q 称为无功功率 (reactive power)；$P = -\oiint_A \mathrm{Re}\ (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}}$, $Q = -\oiint_A \mathrm{Im}\ (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}}$
- 等式左边：流入闭合面的复功率
- 等式右边第一项 (实部)：闭合面内导电媒质消耗的功率，即有功功率
- 等式右边第二项 (虚部)：闭合面内电磁能量的交换及与外部的交换 (交换 $\neq$ 消耗)
- 定义视在功率 (表观功率，apparent power) 为 $\sqrt{P^2 + Q^2}$

复功率 ♠

对应于电路理论中的术语，定义复功率 $P+jQ$

$$
\begin{aligned}
&-\oiint_A (\dot{\mathbf{E}}\times\dot{\mathbf{H}}^*)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}} = \ldots \\
&= \iiint_V \frac{\dot{\mathbf{J}}\cdot\dot{\mathbf{J}}^*}{\gamma}\mathrm{d}\mathcal{V} + 2j\omega\iiint_V \left(\frac{\mu}{2}\dot{\mathbf{H}}\cdot\dot{\mathbf{H}}^* - \frac{\epsilon}{2}\dot{\mathbf{E}}\cdot\dot{\mathbf{E}}^*\right)\mathrm{d}\mathcal{V} \\
&= P + 2j\omega(W_{m,\text{ave}} - W_{e,\text{ave}}) = P + jQ
\end{aligned}
$$

其中，

- P 称为有功功率 (real power)、Q 称为无功功率 (reactive power)；
  $P = -\oiint_A \text{Re}\ (\dot{\mathbf{E}}\times\dot{\mathbf{H}}^*)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}}$, $Q = -\oiint_A \text{Im}\ (\dot{\mathbf{E}}\times\dot{\mathbf{H}}^*)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}}$
- 等式左边：流入闭合面的复功率
- 等式右边第一项 (实部)：闭合面内导电媒质消耗的功率，即有功功率
- 等式右边第二项 (虚部)：闭合面内电磁能量的交换及与外部的交换 (交换 $\neq$ 消耗)
- 定义视在功率 (表观功率，apparent power) 为 $\sqrt{P^2+Q^2}$
- 定义交流阻抗 $Z(\omega) \equiv \frac{P+jQ}{I^2} = R + jX$，则当 $W_m = W_e$ 时，系统电抗 $X=0$，系统谐振，此时电磁损耗与热相关。(更多讨论见 Ch8)

有功功率 vs. 无功功率 ♠

在交流电路中，由电源供给负载的电功率有两种；一种是有功功率，一种是无功功率。有功功率是保持用电设备正常运行所需的电功率，也就是将电能转换为其他形式能量 (机械能、光能、热能) 的电功率。无功功率比较抽象，它是用于电路内电场与磁场的交换，并用来在电气设备中建立和维持电磁场的功率。它不对外作功，而是转变为其他形式的能量。例如，在有电磁线圈的电气设备，要建立磁场，就需要无功功率。

无功功率不是无用功率，它的用处很大。电动机需要建立和维持旋转磁场，使转子转动，从而带动机械运动，电动机的转子磁场就是靠从电源取得无功功率建立的。变压器也同样需要无功功率，才能使变压器的一次线圈产生磁场，在二次线圈感应出电压。因此，没有无功功率，电动机就不会转动，变压器也不能变压。通常从发电机和高压输电线供给的无功功率，远远满足不了负荷的需要，所以在电网中要设置一些无功补偿装置来补充无功功率，以保证用户对无功功率的需要，这样用电设备才能在额定电压下工作。

[21] 取自 https://www.zhihu.com/question/20361729

定理陈述

麦克斯韦方程组的微分形式、电荷守恒方程的微分形式以及分界面上的边界条件是时变电磁场必须满足的基本方程，但这组方程的解是**通解**，要想得到具体物理问题的定解—**特解**，还必须给定系统的**初始条件**和**边界条件**，这些条件称为**定解条件**，与此相关的问题称为定解问题。

定理陈述

麦克斯韦方程组的微分形式、电荷守恒方程的微分形式以及分界面上的边界条件是时变电磁场必须满足的基本方程，但这组方程的解是**通解**，要想得到具体物理问题的定解—**特解**，还必须给定系统的**初始条件**和**边界条件**，这些条件称为**定解条件**，与此相关的问题称为定解问题。

定理：唯一性定理

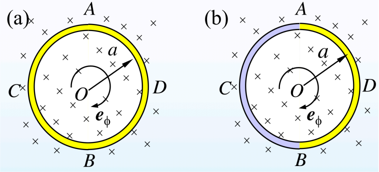
在 $t > 0$ 的所有时刻，闭合区域 $\mathcal{V}$ 内的电磁场是由整个 $\mathcal{V}$ 内的电和磁矢量的初始值，以及 $t \geq 0$ 时边界上电矢量 (或磁矢量) 的**切向**分量的值所**唯一**确定。

证明

见教科书 §7.6。 □

例题 1: 时变磁场中的导体环 (例 7.1.1) ◂ 法拉第定律

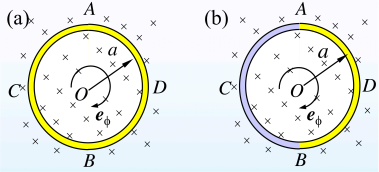
在空间均匀随时间缓变增加 $(\mathrm{d}B/\mathrm{d}t = c > 0)$ 的磁场中，分别放置金属环，(a) 半径 a，电阻 R 与 (b) 等长等粗不同材料的金属环，$\gamma_{ACB} = \frac{1}{2}\gamma_{ADB}$，求感应电流与电压。



例题 1: 时变磁场中的导体环 (例 7.1.1)

法拉第定律

在空间均匀随时间缓变增加 ($\mathrm{d}B/\mathrm{d}t = c > 0$) 的磁场中，分别放置金属环，(a) 半径 a，电阻 R 与 (b) 等长等粗不同材料的金属环，$\gamma_{ACB} = \frac{1}{2}\gamma_{ADB}$，求感应电流与电压。



对 (a)，感应电动势有 $\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\pi a^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = -\pi a^2 c$。环上电流为 $I = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{\pi a^2 c}{R}$。沿环上的电压有

$$U_{ACB} = \int_{ACB} \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_{ACB} \frac{I}{\gamma S}\mathbf{e}_\phi\cdot\mathrm{d}\ell(-\mathbf{e}_\phi) \overset{!}{=} -I\frac{R}{2} = \frac{\pi a^2 c}{2}$$

$$\int_{AOB+BCA} \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = -\frac{\pi a^2 c}{2} \Rightarrow \int_{AOB} \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = -\frac{\pi a^2 c}{2} + \frac{\pi a^2 c}{2} = 0$$

同样的 A、B 两点，沿不同路径的积分不一样。一般在时变场的分析中不使用电位差的概念。

例题 1: (续)

对 (b)，感应电动势相同，$\varepsilon = -\pi a^2 c$。两半环视为串联，环上电流为 $I = \frac{\varepsilon}{R+2R} = -\frac{\pi a^2 c}{3R}$(设右半弧长的电阻为 R)。环上路径的电压有

$$U_{ACB} = -2RI = \frac{2\pi a^2 c}{3}$$

$$U_{ADB} = RI = -\frac{\pi a^2 c}{3}$$

$$\int_{AOB} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = -\frac{\pi a^2 c}{2} + U_{ACB} = \frac{\pi a^2 c}{6}$$

注意，不同于 (a)，$U_{AOB} \neq 0$，是由于两半环的电导率不相等，半环交界面积累面电荷。因此 AOB 线上，除了感应电场的贡献，还有库仑电场。沿 AOB 的合成电场不再始终垂直于直径线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$。

例题 2: $\mathbf{J}_c, \mathbf{J}_D$ 何者大? (例 7.1.2) ◂ 返回

海水电导率 $\gamma = 4.2$ S/m，$\epsilon_r = 81$。考虑在 $f = 1$ MHz 与 $f = 1$ GHz 时的 $\mathbf{J}_c, \mathbf{J}_D$ 的最大值的比值。

设电场强度 $E = E_m \sin \omega t$，则位移电流与传导电流分别为

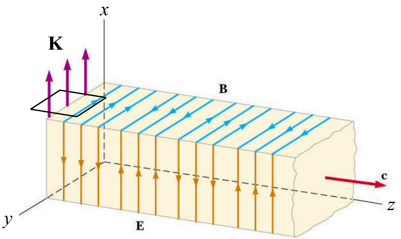
$$J_D = \frac{\partial D}{\partial t} = \omega \epsilon_0 \epsilon_r E_m \cos \omega t$$
$$J_c = \gamma E = \gamma E_m \sin \omega t$$

峰值比值则有

$$\frac{J_{D,\max}}{J_{c,\max}} = \frac{\omega \epsilon_0 \epsilon_r}{\gamma} = \begin{cases} 1.072 \times 10^{-3}, f = 1 \text{ MHz} \\ 1.072, f = 1 \text{ GHz} \end{cases}$$

例题 3: 平面电磁场 ◂ 返回

简单介质中，有均匀分布于 xy 平面之面电流 $\mathbf{K} = \mathbf{e}_x K_0 \cos\omega t$，求空间中的电磁场。



暂时忽略时间依存关系，对图中封闭回路应用安培定律，有

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\boldsymbol{\ell} = \iint \mathbf{K}\cdot d\boldsymbol{\mathcal{S}} \overset{\text{厚度}\to 0}{\Longrightarrow} H2\ell = K_0\ell \Rightarrow \mathbf{H} = -\frac{K_0}{2}\mathbf{e}_y \ \ (z>0)$$

利用推迟概念，有

$$\mathbf{H}(z,t) = \mathbf{e}_y \begin{cases} -\dfrac{K_0}{2}\cos\omega\left(t-\frac{z}{c}\right), z>0 \\ +\dfrac{K_0}{2}\cos\omega\left(t+\frac{z}{c}\right), z<0 \end{cases}, \mathbf{E}(z,t) = \mathbf{e}_x \begin{cases} -\eta\dfrac{K_0}{2}\cos\omega\left(t-\frac{z}{c}\right), z>0 \\ -\eta\dfrac{K_0}{2}\cos\omega\left(t+\frac{z}{c}\right), z<0 \end{cases}$$

其中，$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ 为本质阻抗，$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$。

例题 3: (续) ◂ 推迟效应

试想，上面推迟位的分析是否恒成立？正规的分析要怎么做？

例题 3: (续) ◂ 推迟效应

试想，上面推迟位的分析是否恒成立？正规的分析要怎么做？

根据问题的对称性，有 $\mathbf{A} \parallel \mathbf{e}_x$，且 $\mathbf{A} = A_x(z,t)\mathbf{e}_x$。利用推迟概念，有

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi}\iint \frac{\mathbf{K}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R}\mathrm{d}\mathcal{S}' = \mathbf{e}_x\frac{\mu}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{K\left(t - \frac{\sqrt{\rho^2+z^2}}{c}\right)}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi$$

$$= \mathbf{e}_x\frac{\mu}{2}\int_0^{\infty}\frac{K\left(t - \frac{\sqrt{\rho^2+z^2}}{c}\right)}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\rho\mathrm{d}\rho = \mathbf{e}_x\frac{\mu c}{2}\int_0^{\infty}K\left(t-\zeta-\frac{z}{c}\right)\mathrm{d}\zeta$$

注意，上式最后一个等号用了变量变换 $\zeta = \frac{\sqrt{\rho^2+z^2}}{c} - \frac{z}{c}$ 与 $\rho\mathrm{d}\rho = Rc\mathrm{d}\zeta$。

例题 3: (续) ◂ 推迟效应

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{\mu}\mathbf{e}_y\frac{\partial A_x}{\partial z} = \mathbf{e}_y\frac{c}{2}\int_0^\infty \frac{\partial K\left(t-\zeta-\frac{z}{c}\right)}{\partial z}\mathrm{d}\zeta$$

$$= \mathbf{e}_y\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\partial K\left(t-\zeta-\frac{z}{c}\right)}{\partial \zeta}\mathrm{d}\zeta = \mathbf{e}_y\frac{1}{2}\left[K(-\infty) - K\left(t-\frac{z}{c}\right)\right]$$

$$= -\frac{K\left(t-\frac{z}{c}\right)}{2}\mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mathbf{e}_x\frac{\mu c}{2}\int_0^\infty \frac{\partial K\left(t-\zeta-\frac{z}{c}\right)}{\partial t}\mathrm{d}\zeta$$

$$= \mathbf{e}_x\frac{\mu c}{2}\int_0^\infty \frac{\partial K\left(t-\zeta-\frac{z}{c}\right)}{\partial \zeta}\mathrm{d}\zeta = \mathbf{e}_x\frac{\mu c}{2}\left[K(-\infty) - K\left(t-\frac{z}{c}\right)\right]$$

$$= -\mathbf{e}_x\eta\frac{K\left(t-\frac{z}{c}\right)}{2}$$

★ 重复以上推导，分析 $z<0$ 的情况。

例题 4：电磁参数的尺寸缩放关系 ♠

例题 4：电磁参数的尺寸缩放关系 ♠ ◂ 返回

一电磁系统尺寸为 d，操作频率 ω 的简单介质 (ϵ, μ, γ 为常数标量)。欲制造比例缩小 κ 倍之系统，要求两系统具有一样的电磁行为，哪些电磁参数要求有相应的改变?

▷ 对于原尺寸与缩小后 ($\prime$) 的尺寸，分别有

$$\begin{cases}\nabla\times\dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\dot{\mathbf{H}} \\ \nabla\times\dot{\mathbf{H}} = \gamma\dot{\mathbf{E}} + j\omega\epsilon\dot{\mathbf{E}}\end{cases}, \quad \begin{cases}\nabla'\times\dot{\mathbf{E}}' = -j\omega'\mu'\dot{\mathbf{H}}' \\ \nabla'\times\dot{\mathbf{H}}' = \gamma'\dot{\mathbf{E}}' + j\omega'\epsilon'\dot{\mathbf{E}}'\end{cases}$$

尺寸缩小 κ 倍，表示 $x = \kappa x'$。因而有 $\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x'} = \kappa\frac{\partial}{\partial x}$。缩小系统的 Maxwell 方程为

$$\begin{cases}\nabla\times\dot{\mathbf{E}}' = -j\left(\dfrac{\omega'\mu'}{\kappa}\right)\dot{\mathbf{H}}' \\ \nabla\times\dot{\mathbf{H}}' = \left(\dfrac{\gamma'}{\kappa}\right)\dot{\mathbf{E}}' + j\left(\dfrac{\omega'\epsilon'}{\kappa}\right)\dot{\mathbf{E}}'\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mu' = \mu \quad \text{假设非磁性材料} \\ \omega' = \kappa\omega \\ \epsilon' = \epsilon \\ \gamma' \overset{?}{=} \kappa\gamma\end{cases}$$

原则上，以上标度无法完全同时满足，因为 $\epsilon_c = \epsilon\left(1 - j\frac{\gamma}{\omega\epsilon}\right), \epsilon_c(\omega_1) \neq \epsilon_c(\omega_2)$。然而，如果电流效应不重要的话，$\gamma$ 的比例缩放可以忽略。

例题 5: 自由空间中的时变场 返回

自由空间中有一时变电场表达式为
$\mathbf{E}(x,y,z,t) = \hat{\mathbf{n}} E_0 e^{-ik_x x} \cos(\omega t - y)$，试问 k_x 值。

▷ 电场传播方向的一般表示

为[22]$\hat{\mathbf{n}} = \cos\alpha\mathbf{e}_x + \cos\beta\mathbf{e}_y + \cos\gamma\mathbf{e}_z$ (其中，α, β, γ 为常数)，满足波动方程，有

$$\nabla^2\mathbf{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}$$

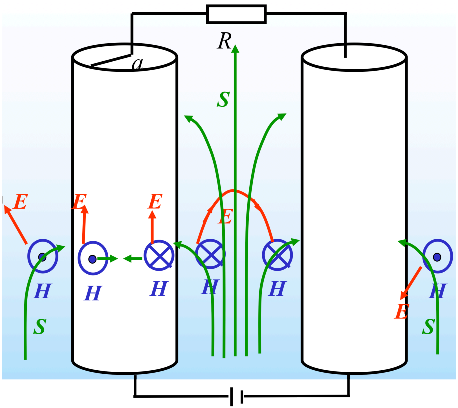
对于其它 y, z 分量有类似的形式。将时变电场表达式代入上式，得

$$k_x = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - c^2}$$

[22]注意这里的 γ 不是导电率。

例题 6: 直流电路能流分析 (例 7.5.1) 返回

如右图[23]，直流电源对电阻供电，电流为 I。分析导体内的能流密度。



对左边圆柱，有 $\mathbf{J} = \frac{I}{\pi a^2}\mathbf{e}_z$，导体内电场 $\mathbf{E}_内 = \frac{\mathbf{J}}{\gamma} = \frac{I}{\pi a^2 \gamma}\mathbf{e}_z$，磁场 $\mathbf{H}_内 = \frac{I\rho}{2\pi a^2}\mathbf{e}_\phi$。坡印廷矢量 $\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H} = -\frac{I^2\rho}{2\pi^2 a^4 \gamma}\mathbf{e}_\rho$，垂直电流方向，由导体表面流向轴心。

[23]图例取自叶齐政教授上课 ppt。

例题 6: (续)

按定义，流入导体**内**的功率可以求得，为

$$-\oiint_A \mathbf{S}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}} = +\frac{I^2\rho}{2\pi^2 a^4\gamma}\mathbf{e}_\rho \cdot 2\pi a\ell\mathbf{e}_\rho = \frac{\ell}{\gamma\left(\pi a^2\right)}I^2 = R' I^2$$

将导线内阻写为 R'。

例题 6: (续)

按定义，流入导体**内**的功率可以求得，为

$$-\oiint_A \mathbf{S}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}} = +\frac{I^2\rho}{2\pi^2 a^4\gamma}\mathbf{e}_\rho\cdot 2\pi a\ell\mathbf{e}_\rho = \frac{\ell}{\gamma\left(\pi a^2\right)}I^2 = R' I^2$$

将导线内阻写为 R'。

自洽检验：由于为**恒定**电场与磁场，利用坡印廷定律，有

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\oiint_A \mathbf{S}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}} - \iiint_V \frac{J^2}{\gamma}\mathrm{d}\mathcal{V} = 0$$

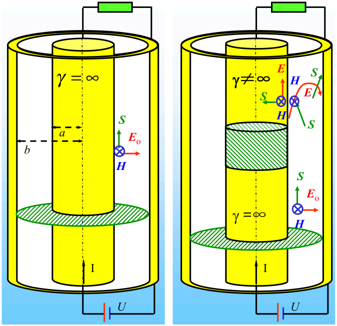
$$\Rightarrow \oiint_A \mathbf{S}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}} = -\left(\frac{I}{\pi a^2}\right)^2\frac{\pi a^2\ell}{\gamma} = -R' I^2$$

★ 分析导线外的电磁场与坡印廷矢量。

例题 7 ◂ 返回

如下图[24]，直流电源 U 通过同轴电缆向负载电阻供电，电流为 I，设导体的电导率 γ，内半径 a; 外导体半径 b。填充绝缘介质电导率为 0, 磁导率为 μ_0。求

1. $\gamma = \infty$，求绝缘介质内任一点的电场和磁场强度。
2. $\gamma = \infty$，计算穿过同轴电缆横截面的功率。
3. $\gamma \neq \infty$，计算流入内导体单位长度的功率。



[24] 图例取自叶齐政教授上课 ppt。

例题 7: (续)

对1.，$\gamma=\infty \Rightarrow \mathbf{E}_i=\frac{\mathbf{J}}{\gamma}=\mathbf{0}$。假设圆柱内柱与外柱面分布电荷线密度 $\pm\tau$，由高斯定律可求电场 $\mathbf{E}_o=\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\rho}\mathbf{e}_\rho$。内外柱电位差有

$$U=\int_a^b \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\rho}\mathrm{d}\rho=\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

因此，电场可以写成 $\mathbf{E}_o=\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\rho}\mathbf{e}_\rho=\frac{U}{\ln\frac{b}{a}\rho}\mathbf{e}_\rho$。磁场有 $\mathbf{H}_o=\frac{I}{2\pi\rho}\mathbf{e}_\phi$。这里假设电缆无限长。

对2.，有坡印廷定律，有 $\mathbf{S}=\mathbf{E}_o\times\mathbf{H}_o=\frac{UI}{2\pi\rho^2\ln\frac{b}{a}}\mathbf{e}_z$。穿过同轴电缆横截面的功率则有

$$P=\iint_A \mathbf{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_a^b S\rho\mathrm{d}\rho=UI$$

例题 7: (续)

对3.，若 $\gamma \neq \infty$，则内侧圆柱内有 $\mathbf{E}_i = \frac{I}{\pi a^2 \gamma}\mathbf{e}_z$。根据边界条件，内导体表面有

$\mathbf{E}_t(\rho = a) = \frac{I}{\pi a^2 \gamma}\mathbf{e}_z, \mathbf{H}_t(\rho = a) = \frac{I}{2\pi a}\mathbf{e}_\phi$。坡印廷矢量为

$\mathbf{S}(\rho = a) = \mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t = \frac{I^2}{2\pi^2 a^3 \gamma}(-\mathbf{e}_n)$。

流入内导体总功率可以写为

$$P' = \iint_A \mathbf{S}(\rho = a) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}} = \frac{I^2}{2\pi^2 a^3 \gamma} \cdot 2\pi a h = \frac{I^2 h}{\pi a^2 \gamma} = R' I^2$$

单位长度功率则有 P'/h。

作业

- 7.1, 7.2
- 7.3, 7.4, 7.8
- 7.10, 7.11, 7.12