静态场边值问题

蔡承颖[1]

华中科技大学电气与电子工程学院

[1] jcytsai@hust.edu.cn.

写在开始前...

前面三章 (Ch3,Ch4,Ch5) 讨论的关于静电场、恒定电场、静磁场可以归结为求解 $\varphi, \mathbf{A}, \varphi_m$ (或 $\mathbf{E}, \mathbf{H}$) 的空间函数。用数学语言描述，即在给定明确的边界条件下，解对应的泊松方程或拉普拉斯方程。

- 解析法：纸笔工作[2]：严格解、精确解、近似解。
- 数值法：计算机技术[3]：真实解、近似解。

本章将简单介绍解析法中的分离变量法，与数值法中的有限差分法。

[2]现在已有开放协助符号运算的计算/化简工具，如 Mathematica、Maxima。

[3]有编程语言，如：Fortran, C, Python, Matlab, Octave 等，使用者利用所学的数值方法自行编程。也有为工程问题设计的商业软件，如 ANSYS, HFSS, CST, COMSOL 等，有些需要使用者进行小规模编程。

方程式与表示式的区别与用途

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{D}(\mathbf{r}) &= \rho_f\\ \nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= 0\\ \mathbf{D}(\mathbf{r}) &= \epsilon\mathbf{E}(\mathbf{r})\end{aligned}$$

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho_f}{\epsilon}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon}\iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}')\mathbf{e}_R}{R^2(\mathbf{r},\mathbf{r}')}\mathrm{d}\mathcal{V}'\\ \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon}\iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R(\mathbf{r},\mathbf{r}')}\mathrm{d}\mathcal{V}'\end{aligned}$$

复习：电场的分界面边界条件

定理：媒质分界面上“电”的边界条件

就任何二种媒质之分界面 (无论电介质或导体)，无论在分界面上是否有自由电荷，恒有 [1&3,2&4 等价]

1. $\widehat{\mathbf{n}}_{1\to 2} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0}$ [$\mathbf{E}$ 的切向连续性]
2. $\widehat{\mathbf{n}}_{1\to 2} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma_f$ (非 ρ_f) [$\mathbf{D}$ 的法向连续性]
3. $\varphi_1 = \varphi_2$ [电位函数的连续性，表征电场为有限值]
4. $\epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \sigma_f$ [电位函数法向导数的连续性]

其中 $\hat{\mathbf{n}}$ 为该点法线方向。

复习：磁场的分界面边界条件

定理：磁媒质分界面上“磁”的边界条件

就任何二种磁媒质之分界面 (无论铁/顺/逆磁)，无论在分界面上是否有自由面电流，恒有

1. $\widehat{\mathbf{n}}_{1\to 2}\times(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)=\mathbf{K}_f$ [$\mathbf{H}$ 的切向连续性]
2. $\widehat{\mathbf{n}}_{1\to 2}\cdot(\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1)=0$ [$\mathbf{B}$ 的法向连续性]
3. $A_{1t}=A_{2t}$ [矢量磁位的连续性，表征 $\mathbf{B}$ 为有限值] (或，$\mathbf{A}_1=\mathbf{A}_2$，若采库伦规范 $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$)
4. $\widehat{\mathbf{n}}_{1\to 2}\times\left(\frac{1}{\mu_2}\nabla\times\mathbf{A}_2-\frac{1}{\mu_1}\nabla\times\mathbf{A}_1\right)=\mathbf{K}_f$ [矢量磁位法向导数的连续性]
5. $\varphi_{m1}=\varphi_{m2}$ (若 $K_f=0$)，$\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial t}-\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial t}=K_f$ (若 $K_f\neq 0$) [标量磁位的连续性]
6. $\mu_1\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial n}=\mu_2\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n}$ [标量磁位法向导数的连续性]

注意，φ_m 仅适于无电流场域。

复习：磁场的分界面边界条件

对于平面平行场 $\mathbf{A} = A\mathbf{e}_z$，$\mathbf{A}$ 的边界条件可以简化为

$$A_1 = A_2$$

与

$$\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial A_1}{\partial n} - \frac{1}{\mu_2}\frac{\partial A_2}{\partial n} = K_f$$

静电场与恒定电场的场域边界条件

常以电极表面或电力线所在曲面为场域的边界。为了求解，画出的场域要是封闭[4]的。无论解析或数值求解，时常选取对称面/线作为分析的场域边界。

根据所关心的区域不同，建立的场域边界条件可能不同(对工程问题进行“物理”加工)。此外，随着划定的求解区域与边界，计算量也可能不同。

[4]解析解或许可以将无穷远处作为场域边界，但数值求解必须明确一个封闭的场域。

复习：静电场与恒定电场的场域边界条件

以下讨论假定电介质与导电媒质皆为各向同性、线性、均匀 (ϵ, γ 为标量)。求解时，除了利用泊松方程或拉普拉斯方程外，还需指明在求解场域边界上 (记为 Γ) 的电位值。

定义：常用的场域边界条件

1. 已知 Γ 上各点电位值，则有

$$\varphi(\mathbf{r})|_\Gamma = f_1(\Gamma)[\text{第一类 (Dirichlet) 边界条件}]$$

2. 已知 Γ 上各点电位法向导数值，则有

$$\left.\frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial n}\right|_\Gamma = f_2(\Gamma)[\text{第二类 (Neumann) 边界条件}]$$

或给定 $\sigma|_\Gamma$(或 $\tau|_\Gamma$)，则 $\left.\frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial n}\right|_\Gamma = -\frac{\sigma|_\Gamma}{\epsilon}$(或 $-\frac{\tau|_\Gamma}{\epsilon}$)。

定义：常用的场域边界条件 (续)

3. 对导体而言，选择表面 Γ_c 作为场域边界，$\varphi(\mathbf{r})|_{\Gamma_c} = U_{\Gamma_c}$。如果能够知道 U_{Γ_c} 的具体数值，则为第一类边界条件。若虽知为等位，而电位的具体数值未知，但表面电荷量 q 已知，则再加一个条件

$$-\oint_{\Gamma_c} \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathrm{d}\Gamma = q$$

   其中，U_{Γ_c} 为待定常数，ϵ 为导体外介电系数。

4. 通常在圆柱或环形区域，有 [周期边界条件]

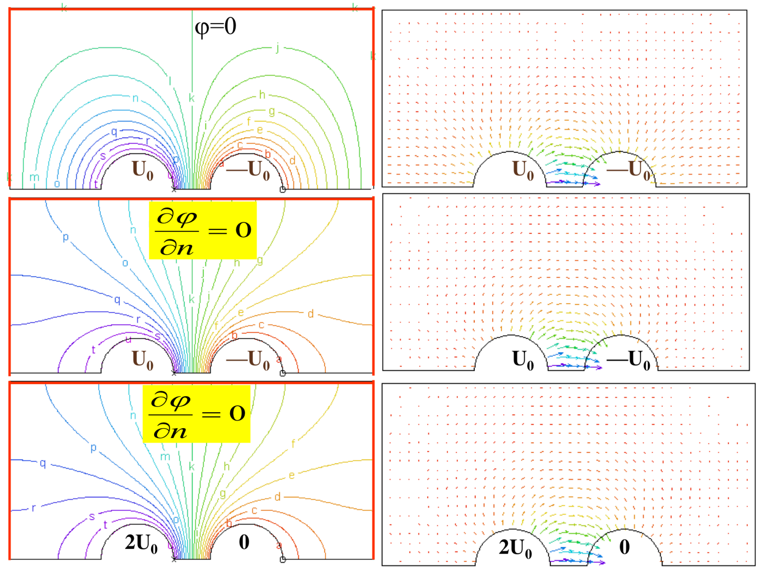
$$\varphi(\rho,\phi+2\pi,z) = \varphi(\rho,\phi,z), \partial_\phi\varphi(\rho,\phi+2\pi,z) = \partial_\phi\varphi(\rho,\phi,z)$$

5. 适用于无界场域，有 [自然边界条件]

$$\lim_{r\to\infty} r\varphi(\mathbf{r}) < \infty, \quad \lim_{r\to\infty} r^2 E(\mathbf{r}) < \infty$$

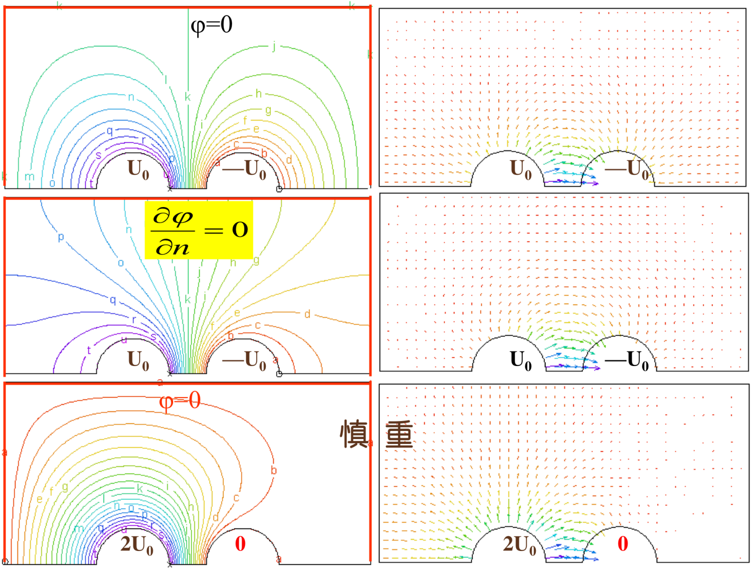
$$\lim_{r\to 0} E(r,\phi,z) < \infty, \quad \lim_{r\to 0} E(r,\theta,\phi) < \infty$$

图例：双导体球[5]

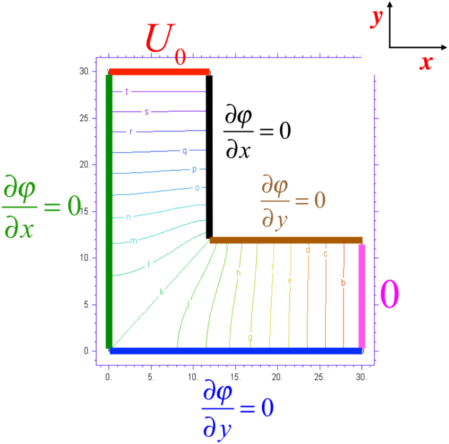


[5] 图例取自叶齐政教授上课 ppt。

图例：双导体球



图例：L 形导电平板[6]



6 图例修改自电气学院电磁场实验指导书。

恒定磁场的场域边界条件

计算恒定磁场可用 φ_m 或 $\mathbf{A}$ 来描述。标量函数 φ_m 比起矢量函数较为简单，计算量小，但仅适用于无电流区域，且积分路径不能包围电流，实际应用受到限制。

求解二维平行平面场，$\mathbf{A}$ 仅有一分量，此时使用矢量磁位函数较为方便。

复习：恒定磁场的场域边界条件

定义：常用的场域边界条件

1. 已知边界 Γ 上各点矢量磁位或标量磁位值，则有

$$A(\mathbf{r})|_\Gamma \text{ 或 } \varphi_m(\mathbf{r})|_\Gamma = f_1(\Gamma)[\text{第一类 (Dirichlet) 边界条件}]$$

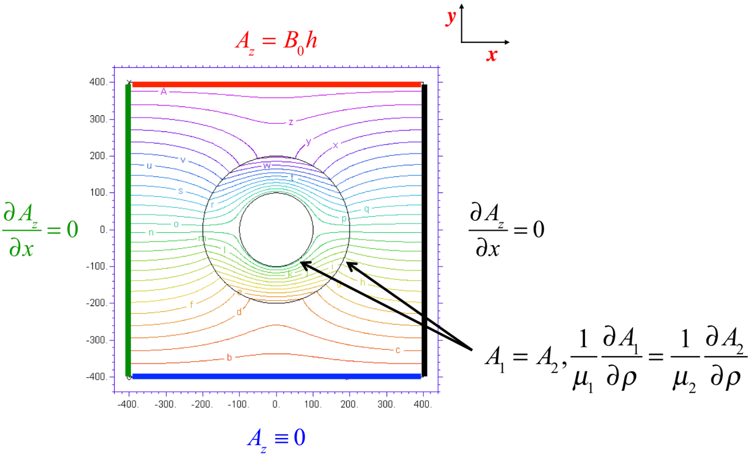
2. 已知 Γ 上各点矢量磁位或标量磁位法向导数值，则有

$$\left.\frac{\partial A(\mathbf{r})}{\partial n}\right|_\Gamma \text{ 或 } \left.\frac{\partial \varphi_m(\mathbf{r})}{\partial n}\right|_\Gamma = f_2(\Gamma)[\text{第二类 (Neumann) 边界条件}]$$

或给定沿相应方向的 B，利用 $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ 列写在 Γ 上相应的 $\partial A/\partial n$; 或利用 $\mathbf{B} = -\mu\nabla\varphi_m$ 列写在 Γ 上相应的 $\partial\varphi_m/\partial n$。

教科书例 6.1.3。

图例: 长直铁磁圆柱置于均匀外场 $\mathbf{B}_0 = B_0\mathbf{e}_x$



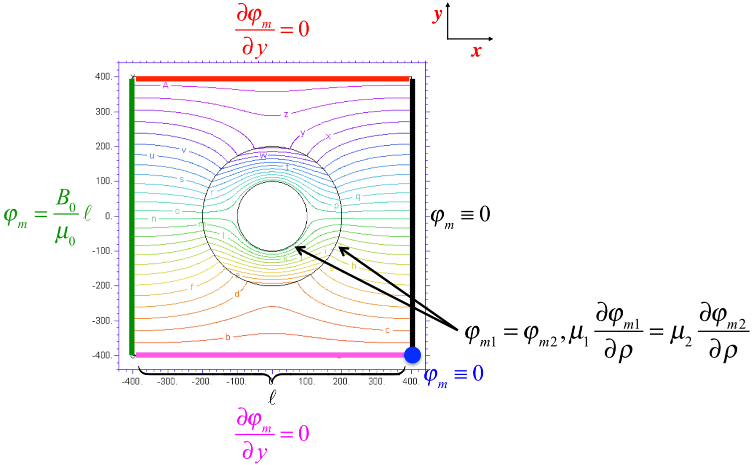
$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = B_0 \mathbf{e}_x$$

$$\overset{\mathbf{e}_x}{\Rightarrow} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = B_0 \Rightarrow A_z(y) = \int_0^y B_0 \mathrm{d}y - A_z(y=0)$$

$$\overset{\mathbf{e}_y}{\Rightarrow} \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0$$

$$\overset{\mathbf{e}_z}{\Rightarrow} \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

图例：长直铁磁圆柱置于均匀外场 $\mathbf{B}_0 = B_0\mathbf{e}_x$



$$\mathbf{H} = -\nabla\varphi_m = H_0\mathbf{e}_x$$

$$\overset{\mathbf{e}_x}{\Rightarrow} -\frac{\partial\varphi_m}{\partial x} = H_0 \Rightarrow \varphi_m(x) = -\int\limits_0^x H_0 \mathrm{d}x - \varphi_m(x=0)$$

$$\overset{\mathbf{e}_y}{\Rightarrow} -\frac{\partial\varphi_m}{\partial y} = 0$$

$$\overset{\mathbf{e}_z}{\Rightarrow} -\frac{\partial\varphi_m}{\partial z} = 0$$

概论

- 解析法: 纸笔工作: 严格解、精确解、近似解 (指对方程式而言)。
  - 镜像法、分离变量法、积分变换法 (傅立叶/拉普拉斯转换)、格林函数法、保角变换 (映射) 法
  - 具有普适性，明显参数依赖关系，属于理想模型
- 数值法: 计算机技术: 真实解、近似解 (指对工程实际而言)。
  - 有限差分法、有限元素法、边界元法、阶矩法、多极展开法
  - 微分方程 $\Rightarrow$ 差分方程，涉及离散过程 (对场域)
  - 一个工程问题一个 (次) 解，依赖计算资源
- 半解析法、图解法、模拟实验法

分离变量法 (method of separation variables)

分离变量法是一种非常典型的求解方法，但不是所有方程、所有边界形状、所有场域边界条件都适用于此法。以下性质总结适用分离变量法的条件

性质

1. 利用 $\varphi(x, y, z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z)$ 带入方程后，能够将个别单变量函数分离开
2. 场域边界条件必须能分离变量 [如，第一类 (Dirichlet) 或第二类 (Neumann) 边界条件]
3. 场域边界形状必须能分离变量 (如，重合)

说明

分离变量法的理论基础与特征值 (eigenvalue) 问题、Sturm-Liouville 系统、基底函数正交性 (orthogonality) 息息相关。

分离变量法[7](method of separation variables)

	静电场	恒定磁场
直角坐标	**例 6.3.1**	**例 6.3.2**
圆柱坐标	**例 6.3.3**	**例 6.3.4**
球坐标 ♠	例题 1	例题 2、例题 3

由于问题的对称性，在正交坐标下恒可写出 $\nabla^2\varphi = 0$ 标准形式的通解，即基底函数的级数和。因此，求解泊松方程或拉普拉斯方程变成寻找基底函数展开的系数。

说明

解题原则:

1. 列写场域边界条件数学式
2. 如果式中仅有一个系数 $\Rightarrow$ 比较系数，决定系数的值
3. 如果式中有多个系数 $\Rightarrow$ 利用基底函数对应的归一化正交关系，决定不同系数间的关系

[8]拉普拉斯算子 ∇^2 在不同正交坐标系的展开可以参考教科书附录 A 或讲义 Ch1_Ch2.pdf。

直角坐标系中的分离变量法

例 6.3.1 演示了二维矩形柱接地金属槽内电位。
例 6.3.2 演示了电机定转子空隙磁场。

一般而言，拉普拉斯方程在二维 (x, y) 直角坐标系中，φ 有以下形式通解

$$\varphi(x, y) = \sum X(x)\, Y(y) = \sum (A\cosh\alpha x + B\sinh\alpha x)\,(C\cos\beta y + D\sin\beta y)$$

其中，$\alpha^2 - \beta^2 = 0, \alpha\beta \neq 0$。注意此处 α, β 与 x, y 的角色是可以调换的，根据实际问题而定。并且，通常 α, β 由于边界条件限制需要满足离散条件 (但仍可能有无穷多个)。

柱坐标系中的分离变量法

例 6.3.3 演示了电介质圆柱外在均匀外加电场中的电场。
例 6.3.4 演示了考虑转子表面曲率的电机定转子空隙磁场。

一般而言，拉普拉斯方程在二维与 z 无关的柱坐标系中，φ 有以下形式通解

$$\varphi(\rho,\phi) = \alpha_0 + \beta_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos n\phi + \beta_n \sin n\phi\right) \rho^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi\right) \rho^{-n}$$

球坐标系中的分离变量法 ♠

对于球坐标，一般问题描述与 ϕ 无关，则拉普拉斯方程在二维与 ϕ 无关的球坐标系中，φ 有以下形式通解

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha_n r^n + \beta_n r^{-(n+1)}\right) P_n(\cos\theta)$$

其中，径向解为两个线性无关 (独立) 解 r^n 与 r^{-n+1}。θ 方向的解为勒让德多项式 (Legendre polynomial)P_n，$\theta \in [0,\pi]$。

♠ 若方程中包含 ϕ 的依存关系，则通解可写成球谐函数

$$\varphi(r,\theta,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \left(\alpha_n^m r^n + \beta_n^m r^{-(n+1)}\right) Y_n^m(\theta,\phi)$$

★Laplace 方程与 Helmholtz 方程在不同坐标系下的通解形式

拉普拉斯方程在直角坐标、柱坐标、球坐标 ♠ 下的通解形式有

$$\nabla^2\varphi = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varphi = X(x)Y(y)Z(z) \Rightarrow \begin{cases} X(x) : \sin, \cos, \sinh, \cosh \\ Y(y) : \sin, \cos, \sinh, \cosh \\ Z(z) : \sin, \cos, \sinh, \cosh \end{cases} \\ \varphi = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \Rightarrow \begin{cases} R(r) : r^n, r^{-(n+1)} \\ \left.\begin{array}{l} \Theta(\theta) : P_n(\cos\theta), P_n^m(..), Q_n(..), Q_n^m(..) \\ \Phi(\phi) : e^{\pm im\phi} \end{array}\right\} Y_n^m(\theta,\phi) \end{cases} \\ \varphi = R(\rho)\Phi(\phi)\mathrm{Z}(z) \Rightarrow \begin{cases} R(\rho) : J_\nu(k\rho), N_\nu(k\rho), I_\nu(k\rho), K_\nu(k\rho) \\ \Phi(\phi) : e^{\pm im\phi} \\ \mathrm{Z}(z) : e^{\pm nz} \end{cases} \end{cases}$$

在下一章讨论无源时变电磁场时，可能遇到亥姆霍兹方程 $\nabla^2\varphi + k^2\varphi = 0$，通解与上式非常类似，除了径向 r 的通解改为球谐贝索函数 (spherical Bessel functions)

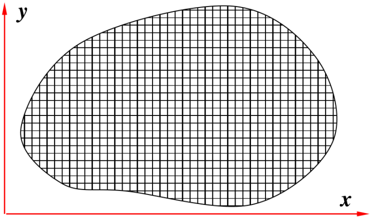
$$R(r) : j_n(kr), n_n(kr), i_n(kr), k_n(kr)$$

有限差分法 (finite difference method)

基本原理分四个步骤:

1. **场域离散**: 将场域剖分为很多网格和节点
2. **方程离散**: 差商代替微商，使微分方程转化为以各节点电位 (磁位) 为未知量的差分方程组 (线性代数方程组)
3. **矩阵计算**: 解代数方程组，获得离散节点待求函数的数值近似解
4. **后处理**: 进一步分析，如画图、分析受力、计算集总电路参数等

Step 1: 场域离散



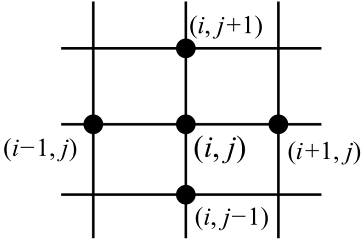
场域离散为: 简单，正方形网格

对节点进行编号，记录节点信息，包含节点位置、介质属性、边界关系等。

Step 2: 方程离散

分为**内部**节点的离散与**边界**节点的离散。

- 内部节点: 利用差分法将 $\partial\varphi/\partial x$ 与 $\partial^2\varphi/\partial x^2$ 化简 (y 类似)，则拉普拉斯方程在待求中心点 $\varphi_{i,j}$ 附近近似，得 $\boxed{\varphi_{i+1,j}+\varphi_{i,j+1}+\varphi_{i-1,j}+\varphi_{i,j-1}-4\varphi_{i,j}=0}$



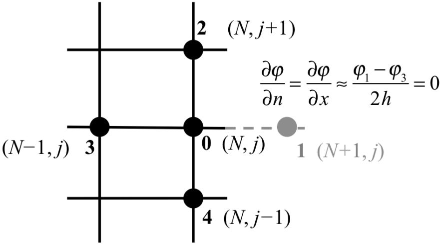
对泊松方程则有

$\varphi_{i+1,j}+\varphi_{i,j+1}+\varphi_{i-1,j}+\varphi_{i,j-1}-4\varphi_{i,j}=-h^2\rho_{0,ij}/\epsilon_0$，其中 h 为网格边长。

Step 2: 方程离散

- 边界节点
  - 第一类 (Dirichlet): 给定边界上的函数值，故沿 x 有 $\boxed{\varphi_i = f_i \text{ (或沿 } y \text{ 有 } \varphi_j = f_j)}$
  - 第二类 (Neumann): 给定边界上的外法向导数函数值。简化起见，考虑 $\partial\varphi/\partial n = 0$ 情况，有

$$\boxed{\varphi_{N,j+1} + 2\varphi_{N-1,j} + \varphi_{N,j-1} - 4\varphi_{N,j} = 0 \text{ 或 } -h^2\rho_{0,Nj}/\epsilon_0}$$



由上可知，对场域里的每一个节点，包含内部与边界，一个个都建立了对应的代数方程。N 个未知数，N 个方程。

Step 3: 矩阵计算 ▸ 例题 4
Step 4: 后处理

以上 N 个线性代数方程组可以写成一标准矩阵形式

$$\boxed{\mathbf{Ax} = \mathbf{b}}$$

解法有直接法或迭代法。
直接法如高斯消去法，直观但计算量大。迭代法有高斯-塞德尔 (Gauss-Seidel) 法，适合稀疏、大型的矩阵。

后处理包含进一步分析，如画图、分析受力、计算集总电路参数等。如根据 $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$，有

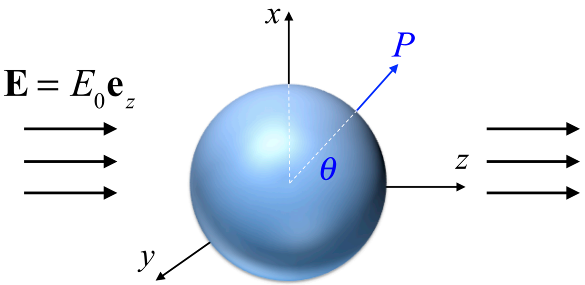
$$E_{x,ij} = -\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{i,j} \approx -\frac{\varphi_{i+1,j}-\varphi_{i-1,j}}{2h}$$

$$E_{y,ij} = -\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{i,j} \approx -\frac{\varphi_{i,j+1}-\varphi_{i,j-1}}{2h}$$

计算场域中任一点电位值通常涉及插值 (interpolation)。

例题 1：置于外加电场中的导体球 ♠ ◂ 返回

求解半径 a 孤立导体球球外任一点 P 的电位与电场。



由题意，电场、电位与 ϕ 无关

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \cancelto{0}{\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}} = 0$$

应用分离变量法，电位可以写成 $\varphi(r,\theta,\phi)=f(r)g(\theta)h(\phi)$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}\phi^2}=-m^2h\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right)-n(n+1)f=0\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left[n(n+1)\sin\theta-\dfrac{m^2}{\sin\theta}\right]g=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}h(\phi)=A+B\phi\\ f(r)=A_nr^n+B_nr^{-(n+1)}\\ g(\theta)=A_nP_n(\cos\theta)\end{cases}$$

注意，上式 A_n, B_n 为哑变元，仅表示待定常数。因此，通解可写成

$$\varphi(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_nr^n+B_nr^{-(n+1)}\right)P_n(\cos\theta)$$

基底函数的正交关系可以写成

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$$

本题可列写以下两分界面边界条件

$$\begin{cases}\varphi(r=a)=\text{常数}=0\\ \varphi(r\to\infty)=-E_0 z=-E_0 r\cos\theta\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(A_n a^n+B_n a^{-(n+1)}\right)P_n(\cos\theta)=0\\ \Rightarrow\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_{-1}^{1}\left(A_n a^n+B_n a^{-(n+1)}\right)P_n(\cos\theta)\times P_m(\cos\theta)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}0\times P_m(\cos\theta)\mathrm{d}x\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n\right)P_n(\cos\theta)=-E_0 r\cos\theta=-E_0 rP_1(\cos\theta)\end{cases}$$

利用基底函数正交性与比较系数，可得

$$\begin{cases}A_n a^n\dfrac{2}{2n+1}+B_n a^{-(n+1)}\dfrac{2}{2n+1}=0\Rightarrow B_n=-A_n a^{2n+1}\\ A_1=-E_0,A_{n>1}=0\end{cases}\Rightarrow B_1=-A_1 a^3=E_0 a^3$$

代回通解，电位与电场可以写为

$$\varphi(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + E_0 a^3 \frac{\cos\theta}{r^2} \Rightarrow \begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial r} = E_0\left(1+\dfrac{2a^3}{r^3}\right)\cos\theta \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -E_0\left(1-\dfrac{a^3}{r^3}\right)\sin\theta \end{cases}$$

导体球表面感应面电荷密度为

$$\sigma = -\epsilon_0 \left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=a} = 3\epsilon_0 E_0\cos\theta$$

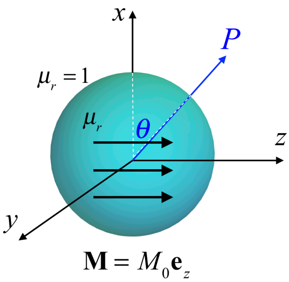
注意，以上电位表示式中的第一项源自外部电场，第二项相当于导体球被激发的电偶极子产生的电位，其中等效电偶极矩为 $\varphi_{\text{电偶极子}} = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2} \Rightarrow p = 4\pi\epsilon_0 E_0 a^3$。

★ 试利用镜像法求此题。

★ 本例题求解的是在外加电场下激发极化球，例题 2 是磁化球在空间中的磁场。试交换电场与磁场的角色，求解极化球内外的电场。

例题 2: 磁化球在空间一点的磁场 ♠ ◂ 返回

求解半径 a 磁化球 ($\mathbf{M} = M_0\mathbf{e}_z$) 内外任一点 P 的磁场。



由题意，磁场、标量磁位与 ϕ 无关，写出球坐标下 $\nabla^2\varphi_m = 0$ 的通解 (注意与前题形式的差异)

$$\varphi_m(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}\right)P_n(\cos\theta) \Rightarrow \varphi_m(r,\theta) = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta), r < a \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta), r > a \end{cases}$$

本题可列写以下两分界面边界条件

$$\begin{cases} \varphi_{m,<}(r=a) = \varphi_{m,>}(r=a) \\ \left.\dfrac{\partial \varphi_{m,<}}{\partial r}\right|_{r=a} - \left.\dfrac{\partial \varphi_{m,>}}{\partial r}\right|_{r=a} = \sigma_m = \mathbf{M}\cdot\widehat{\mathbf{e}}_r = M_0\cos\theta = M_0 P_1(\cos\theta) \end{cases}$$

本题不需用到正交关系，直接比较系数可得

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{1}{3}M_0,\, B_1 = \dfrac{1}{3}M_0 a^3 \\ A_{n\neq 1} = B_{n\neq 1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_{m,<} = \dfrac{1}{3}M_0 r\cos\theta \\ \varphi_{m,>} = \dfrac{1}{3}M_0\dfrac{a^3}{r^2}\cos\theta = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\mathbf{m}\cdot\mathbf{e}_r}{r^2} \end{cases}$$

其中，$\mathbf{m} = \frac{4\pi}{3}a^3\mathbf{M}$。磁化球内外磁场有

$$\begin{cases} \mathbf{H}_< = -\dfrac{1}{3}M_0(\cos\theta\mathbf{e}_r - \sin\theta\mathbf{e}_\theta) = -\dfrac{1}{3}M_0\widehat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{H}_> = -\dfrac{1}{3}M_0 a^3\left(-2\dfrac{\cos\theta}{r^3}\mathbf{e}_r - \dfrac{\sin\theta}{r^3}\mathbf{e}_\theta\right) = \dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{3\mathbf{m}\cdot\mathbf{e}_r}{r^3}\mathbf{e}_r - \dfrac{\mathbf{m}}{r^3}\right)\widehat{\mathbf{z}} \end{cases}$$

★ 试求 $\mathbf{B}_<$ 与 $\mathbf{B}_>$。(注意，μ_r 目前未知)

★ 本题除利用拉普拉斯方程求解之外，还可通过以下方法:

- 由给定的 $\mathbf{M}$ 可求得等效磁化电流 $\mathbf{J}_m=\mathbf{0}, \mathbf{K}_m=M_0\sin\theta\mathbf{e}_\phi$，然后利用 Biot-Savart 定律求球内外的 $\mathbf{B}$(或求 $\mathbf{A}$，再求 $\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$)，再利用 $\mathbf{H}=\mathbf{B}/\mu_0-\mathbf{M}$ 求 $\mathbf{H}$。磁化媒质存在的场域中，空间中任一点矢量磁位与磁场可以如下方式求得

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\iiint\limits_V\frac{\mathbf{J}_f+\mathbf{J}_m}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}\mathcal{V}'+\oint\!\!\!\oint\limits_S\frac{\mathbf{K}_f+\mathbf{K}_m}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}\mathcal{S}'\right]$$

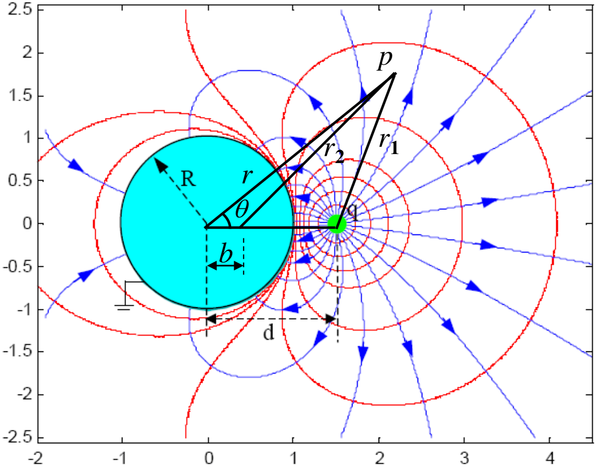
$$\mathbf{B}(\mathbf{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\iiint\limits_V\frac{(\mathbf{J}_f+\mathbf{J}_m)\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\mathrm{d}\mathcal{V}'+\oint\!\!\!\oint\limits_S\frac{(\mathbf{K}_f+\mathbf{K}_m)\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\mathrm{d}\mathcal{S}'\right]$$

- 由给定的 $\mathbf{M}$ 可求得等效磁化电荷 $\rho_m=-\nabla\cdot\mathbf{M}=0$, $\sigma_m=\mathbf{M}\cdot\hat{\mathbf{n}}=M_0\cos\theta$，然后可以求得标量磁位，再利用 $\mathbf{H}=-\nabla\varphi_m$ 可得磁场 $\mathbf{H}$ 与 $\mathbf{B}=\mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M})$。

$$\varphi_m(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi}\left[\oint\!\!\!\oint\limits_A\frac{\mathbf{M}\cdot\widehat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}\mathcal{S}'-\iiint\limits_V\frac{\nabla\cdot\mathbf{M}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}\mathcal{V}'\right]$$

例题 3: 导体球附近点电荷产生的电场 ♠ ◂ 返回

如图[8]，求导体球附近点电荷产生的电场。



[8] 图例取自叶齐政教授上课 ppt。

本题宜通过叠加原理[9]，先将电位的贡献拆成 $\varphi = \varphi_q + \varphi_{\text{sphere}}$，其中 $\varphi_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1}$。接下来我们将注意力放在计算球面上非均匀[10]感应电荷产生的电场。由问题的对称性可知，电位将与 ϕ 无关。因此，在球坐标下，$\nabla^2\phi_{\text{sphere}} = 0$ 的通解可以写成

$$\varphi_{\text{sphere}}(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}\right) P_n(\cos\theta)$$

列写边界条件，有

$$\begin{cases} \varphi(r=R) = 0 \\ \varphi(r\to\infty) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2+d^2-2Rd\cos\theta}} + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} B_n R^{-(n+1)} P_n(\cos\theta) = 0 \\ A_n = 0 \end{cases}$$

要通过比较系数得 B_n，必须利用以下勒让德恒等式

$$\frac{1}{\sqrt{R^2+d^2-2Rd\cos\theta}} = \frac{1}{d}\frac{1}{\sqrt{1-2\left(\frac{R}{d}\right)\cos\theta+\left(\frac{R}{d}\right)^2}} = \frac{1}{d}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{R}{d}\right)$$

[9] 如果打算避开使用叠加原理，那么就要解泊松方程 $\nabla^2\varphi = -q\delta(r-d)\delta(\theta=0)\delta(\phi=0)/\epsilon_0$。

[10] 可以想象，非均匀性与 d 有关，但是我们还要将 r_1 关联起来。

有

$$B_n = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R^{2n+1}}{d^{n+1}}$$

代回电位的通解，则有

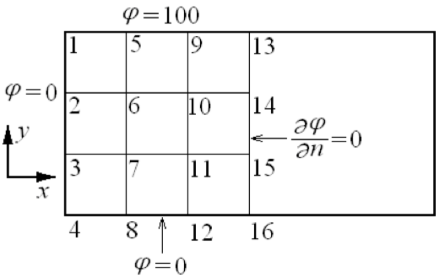
$$\begin{aligned}\varphi = \varphi_q + \varphi_{\text{sphere}} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R^{2n+1}}{r^{n+1}d^{n+1}}P_n(\cos\theta) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q\left(\frac{R}{d}\right)}{4\pi\epsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R^{2n}}{r^{n+1}d^{n}}P_n(\cos\theta) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{\left[-q\left(\frac{R}{d}\right)\right]}{4\pi\epsilon_0 r_2}\end{aligned}$$

最后一式的形式可与镜像法比较，注意分母 r_2

$$\frac{1}{r_2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{R^{2n}}{r^{n+1}d^{n}}P_n(\cos\theta) = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{R^2}{d}\right)^n}{r^n}P_n(\cos\theta) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R^2}{d}\right)^2 + r^2 - 2br\cos\theta}}$$

例题 4: 有限差分法玩具模型 (例 6.4.1) 返回

如下图，对于给定的网格，利用有限差分法计算电位分布。



作业

- 6.1, 6.5
- 6.3, 6.11