电磁场绪论
与
数理预备知识回顾

蔡承颖[1]

华中科技大学电气与电子工程学院

[1]jcytsai@hust.edu.cn. http://faculty.hust.edu.cn/jcytsai/zh_CN/index.htm

注意事项

- 课程名称：电磁场与波，60(理论)+4(实验)。
- 上课时间：第二至十六周。
  每周二 1、2 节 (8:00-9:40)
  每周四 1、2 节 (8:00-9:40)
- 上课地点： 西十二楼 N203。
- 授课班级：电气 2111-2112 班。
- 中国大学 MOOC[2]：辅助教学。
  里面有关于电磁场课程组老师们录制的一些课件，MOOC 里的“测验与作业”要求修课学生作为课后作业。
  - 注册账号
  - 课程学习、作业
  - 讨论答疑
- 课堂布置的教科书后面作业题号也要做，并交回批改。

[2] https://www.icourse163.org/

评分标准

- 期末考试：60/100
- 网络考试：10/100 ⇒ 网络考试，暂定仍在期末阶段
- 作业：10/100 ⇒ 5 (书面) + 5 (MOOC，约 8 次)
- 讨论课：10/100 ⇒ 参考手边文件
- 实验：10/100
- 优秀加分：5 ⇒ 课堂期间提问、上课笔记突出者


icourse163.org/search.htm?search=电磁场与波#/
开学考试不用愁 2-4小时期末突击课
0基础也能行
中国大学MOOC
课程
学校
慕课堂
下载APP
电磁场与波
我的学校云
个人中心
共86条电磁场与波相关的结果
全部(86)
正在进行
即将开始
已结束
国家精品课
电磁场与波
西安交通大学 马西奎、邹建龙、杨黎晖
西安交通大学"电磁场与波"课程为国家精品课程。"电磁场与波"MOOC主讲人包括高等学校电磁场教学与教材研究会理事长马西奎教授和秘书长邹建龙等多位电磁场老...
1042人参加
已结束
电磁场与波
华中科技大学 叶齐政
【课程概述】课程定位："电磁场与波"是电气类专业的一门重要技术基础课，又称为"电磁场理论"、"工程电磁场基础"。课程目标：第一是对大学物理电磁学内容的知识深化、逻辑细化、方...
13人参加
2023-02-20 开课
工程电磁场与波
浙江大学 李玉玲、熊素铭、杨仕友、姚缨英
为你推荐
电磁场工程应用
湖南大学
谭阳红
已结束，可查看内容 5337人参加
4小时 突击课
Python
专为期末复习定制
Python期末冲刺-4小时突击Python
期末突击
大雨老师
3457人参加
期末突击 2-4小时 突击考试
同道计划
反馈
下载

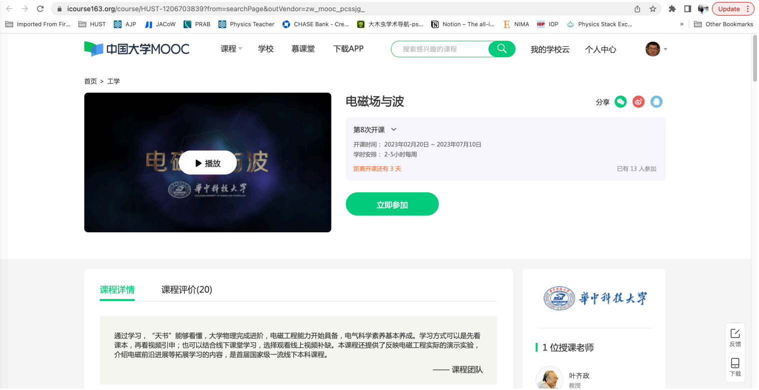

icourse163.org/course/HUST-1206703839?from=searchPage&outVendor=zw_mooc_pcssjg_
中国大学MOOC
课程
学校
慕课堂
下载APP
搜索感兴趣的课程
我的学校云
个人中心
首页 > 工学
播放
华中科技大学
电磁场与波
分享
第8次开课
开课时间： 2023年02月20日 ~ 2023年07月10日
学时安排： 2-5小时每周
距离开课还有 3 天
已有 13 人参加
立即参加
课程详情
课程评价(20)
通过学习，“天书”能够看懂，大学物理完成进阶，电磁工程能力开始具备，电气科学素养基本养成。学习方式可以是先看课本，再看视频引申；也可以结合线下课堂学习，选择观看线上视频补缺。本课程还提供了反映电磁工程实际的演示实验，介绍电磁前沿进展等拓展学习的内容，是首届国家级一流线下本科课程。
—— 课程团队
华中科技大学
1 位授课老师
叶齐政
教授
反馈
下载

图: 叶齐政，陈德智主编，**电磁场**，机械工业出版社 (2019)

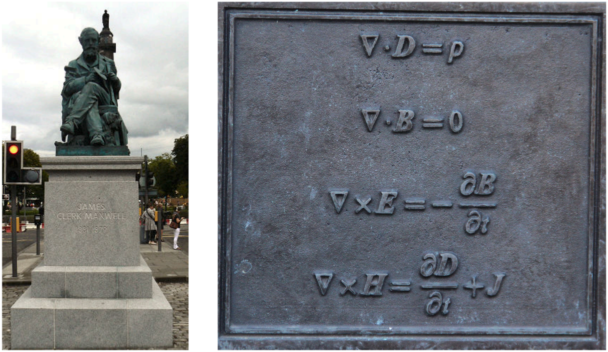


图: 左图: J.C. Maxwell (1831-1879)[3], 右图: Maxwell 方程[4]

[3] http://britainunlimited.com/james-clerk-maxwell/

[4] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:James_clerk_maxwell_statue_rear_equations.jpg

课程规划、讲义

- **课本为主**，讲义与参考书目为辅。许多细节需要同学们通过课前预习或课后复习吸收。
- 讲义使用的章节编号尽可能与使用的教科书一致。额外内容以编号 ♠ 表示。例题 & 练习题有些从教科书选取，有些来源于其它材料[5]。
- 学期末有分组报告，各组提交 PPT，并上台 10 分钟报告。
- 鼓励同学们写作业时：试着先写出解题思路 (why)、再写过程 (how)。直接照抄参考解答很多时候对学习将大打折扣，特别是对将来有计划继续读研究生的同学而言。建议用作业本交作业，并妥善保存。

[5]一般例题要求都能理解并正确解答，较深入的练习题按困难程度区分 ★(给对电磁学感兴趣的同学) 或 ★★(给想挑战难题或提早进入科研阶段的同学)。

一些学习建议

1. 课前预习 (主动) $\gg$ 课堂学习 (半主动、半被动) $\sim$ 课后复习 (被动) $\gg$ 考前复习 (被动)。
2. 提问发问 (主动): 还可以训练思考逻辑。如果还先预习了，那么问的问题对老师与同学都有助益。
3. 随机考试 (被动): 能选出平时就有用心复习的同学。
4. 安排作业 (被动): 因为作业题不分对象，对某些学生而言，最浪费时间的情况是，本来就会做的题目仍然会做且本来不会做的题目却抄解答。从作业中能受益的情况是，本来不会做的题目经过思考而做出来了。
5. 定期考试 (被动): 标准考试，打成绩用。

★ 找志同道合的同学们组团针对要点互相切磋、教学讨论 $\Rightarrow$ “以教促学”、费曼学习法

> One can only learn by teaching.
>
> John Archibald Wheeler (1911-2008)

课堂使用教材与部分电磁学参考书目♠

- 本学期使用的教科书：叶齐政，陈德智主编，**电磁场**，机械工业出版社 (2019)。勘误表发 QQ 群里
- 其它参考书目 (基础电磁理论)：
  1. 梁灿彬，秦光戎，梁竹健，电磁学
  2. 梁灿彬，曹周键，陈陟陶，电磁学 (拓展篇)
  3. W.K.H. Panofsky, M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, 2nd ed.
  4. R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, 费恩曼物理学讲义，第二卷
  5. D.J. Griffiths, *Classical Electrodynamics*
  6. E.M. Purcell and D. Morin, *Electricity and magnetism*, Berkeley Physics Course, 3rd ed.
- 其它参考书目 (进阶电磁理论)：
  1. J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*
  2. J. Schwinger, L.L. DeRaad, K.A. Milton, and W.Y. Tsai, *Classical Electrodynamics*

课堂使用教材与部分电磁学参考书目♠

- 其它参考书目 (科普类、交叉学科):
  1. 陈秉乾, 舒幼生, 胡望雨, 电磁学专题研究
  2. 田民波, 图解磁性材料
  3. 徐征, 吴嘉敏, 郭盼, 核磁共振中的电磁场问题
  4. R. Morrison, Grounding and Shielding 接地与屏蔽技术
  5. 罗会仟, 超导“小时代”
  6. 冯向前, 闫灵通, 李丽, 新型交叉学科 – 核考古
  7. 戴念祖, 中国古代物理学

概述

- 学习意义
  1. 电气科学与工程领域的核心问题是电磁场与物质的相互作用。
  2. 无论是电能传输、转换以及各种电磁现象都离不开电磁场理论对它们的建模、计算和分析。
  3. 电气科学与工程的两大基础理论:电磁场理论与电路理论。
  4. 电路理论也是研究电磁系统的理论，不过是用积分量描述特定模型 (例如准静态) 的理论，而且“场”是“路”的基础。

  ♠ “场”的概念还可以进一步升华，脱离“力”，形成一种新型物理定律的典范。麦克斯韦电磁场理论**结构**的提出是牛顿力学以来 (至量子力学之前) 的一个重要里程碑。场理论的描述对象是整个空间，而力学定律则是物理实体[6]。

[6] 关于机械观的衰落与场概念的提高，A. Einstein and L. Infeld, The evolution of physics (1967) 有简短清楚的描述。此书有多个版本的中译本“物理学的进化”。附带一提，将场概念成功应用到牛顿力学的成就–重力理论–的经典例子：(广义) 相对论。

概述

- 内容
  1. 电磁场的理论体系：静电场、恒定电场、恒定磁场、时变电磁场及电磁波。
  2. 本课程与大学物理中电磁学部分的关系：
     - 大学物理中着重解决是特殊问题的特殊解法：对称分布的源，利用积分方法。
     - 本课程针对一般问题的一般解法。
     - 但实际应用时又限于特殊问题的一般解法：对称分布的源、利用微分方法。

概述

- 学习方法
  1. 正确对待大量数学工具的引入
     - 既要认真对待，又不要过分纠缠而忽视了对物理本质问题的认识。
     - 书上数学虽多，但作业及考试中数学并不多。
     - ♠ 讲义中部分数学篇幅或许比教科书中稍多，提供给有志读研的同学进一步学习。
  2. 掌握理论的框架结构和原则
     - 需要提升到一定的高度来理解和掌握，通过了解电磁场理论的建立方法来理解它的美。
  3. 正确对待作业的困难
     - 类型不定，没有重复 ▷ 考试变化不大。
     - 需要掌握基本数学工具 ▷ 大部分并不需死记。

An advice to people with less intuition: Learn advanced mathematics in case you need it but use only the minimum necessary for any particular problem.

Hans Albrecht Bethe (1906-2005)

模型、方法和体系

- 基本模型
  1. 电荷模型和电流模型
  2. 电偶极子模型和磁偶极子模型
- 方法
  1. 解析：提供清晰的物理图像，与真实世界仍有一段距离，需要知道理论成立的适用范围。
  2. 数值计算：接近工程实际，有时计算结果仅适用于特定情况，较难获得普适性质。小心 garbage in, garbage out.
  3. 实验：最后的裁决者，需要精心设计。
- 体系
  1. 静态场
  2. 时变场

符号与术语使用规范

- 矢量
  - 印刷打印: $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{H}, \mathbf{F}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{J}, \mathbf{P}, \mathbf{M}, \mathbf{S}, \ldots$
  - 手写: $\vec{D}, \vec{E}, \vec{B}, \vec{H}, \vec{F}, \vec{r}, \vec{v}, \vec{J}, \vec{P}, \vec{M}, \vec{S}, \ldots$
- 标量
  - $\varphi, Q, q, \tau, \sigma, \rho, V, U, \epsilon_0, \mu_0, W, P, C, L, c, \ldots$
- 时域物理量一般用以上符号表示，对应的频域物理量在符号上方加上 $\tilde{f}$、$\tilde{\mathbf{F}}$ 或 $\dot{f}$、$\dot{\mathbf{F}}$ 表示
- 其它特殊符号，如 $\overleftrightarrow{\epsilon}, \overleftrightarrow{\mu}, \overleftrightarrow{\chi}$ (张量)，将在实际碰到时引入并介绍
- 沿 x 方向均匀 $\Rightarrow f(x, y, z) = f(y, z)$
  各向同性 $\Rightarrow f(\mathbf{r}) = f(r)$ 或 $f(\mathbf{r}) =$ 常数
  稳态 $\Rightarrow \partial/\partial t = 0$

标量场 scalar 和矢量场 vector field

标量如温度函数 $T(x, y, z; t) = T(\mathbf{r}; t)$、势函数 $\varphi(\mathbf{r}; t)$
矢量 $\mathbf{A}$ 的几种表示方式 (以直角坐标为例)

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= A_x\widehat{\mathbf{e}}_x + A_y\widehat{\mathbf{e}}_y + A_z\widehat{\mathbf{e}}_z \\
&= A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y + A_z\mathbf{e}_z \\
&= A\cos\alpha\widehat{\mathbf{e}}_x + A\cos\beta\widehat{\mathbf{e}}_y + A\cos\gamma\widehat{\mathbf{e}}_z \\
&= A_x\widehat{\mathbf{i}} + A_y\widehat{\mathbf{j}} + A_z\widehat{\mathbf{k}} \\
&= A_x\widehat{\mathbf{x}} + A_y\widehat{\mathbf{y}} + A_z\widehat{\mathbf{z}}
\end{aligned}$$

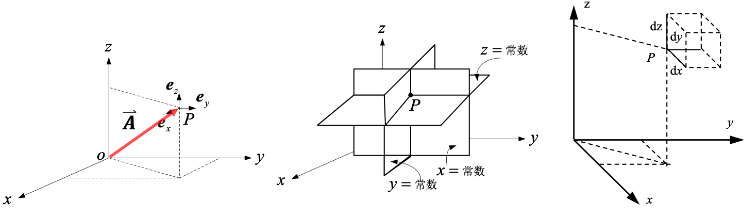
矢量 $\mathbf{A}$ 的大小或模

$$|\mathbf{A}| = A$$

矢量 $\mathbf{A}$ 的单位矢量

$$\frac{\mathbf{A}}{A} = \widehat{\mathbf{e}}_A = \widehat{\mathbf{A}}$$

直角坐标系 Cartesian coordinate[7]



(a) 单位矢量 (b)曲面 （c）微分元

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

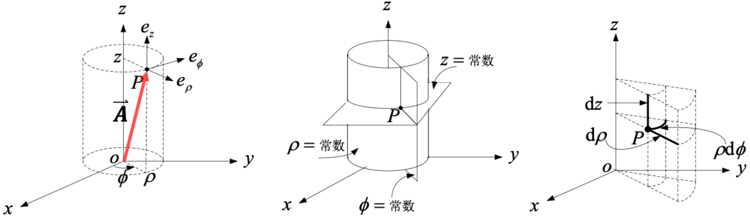
长度微分元 $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = (\mathrm{d}x)\,\mathbf{e}_x + (\mathrm{d}y)\,\mathbf{e}_y + (\mathrm{d}z)\,\mathbf{e}_z$

面积微分元 $\mathrm{d}\mathbf{S} = (\mathrm{d}y\mathrm{d}z)\,\mathbf{e}_x + (\mathrm{d}x\mathrm{d}z)\,\mathbf{e}_y + (\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\,\mathbf{e}_z$

体积微分元 $\mathrm{d}\mathcal{V} = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

[7]教科书图 2-2-1。

柱坐标系 Circular cylindrical coordinate[8]



(a) 单位矢量　　(b)曲面　　(c)微分元

$$\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{e}_\rho + A_\phi \mathbf{e}_\phi + A_z \mathbf{e}_z$$

$$A = \sqrt{A_\rho^2 + A_\phi^2 + A_z^2}$$

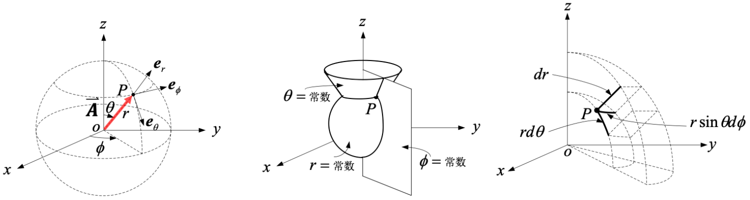
长度微分元　$\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = (\mathrm{d}\rho)\,\mathbf{e}_\rho + (\rho \mathrm{d}\phi)\,\mathbf{e}_\phi + (\mathrm{d}z)\,\mathbf{e}_z$

面积微分元　$\mathrm{d}\mathbf{S} = (\rho \mathrm{d}\phi \mathrm{d}z)\,\mathbf{e}_\rho + (\mathrm{d}\rho \mathrm{d}z)\,\mathbf{e}_\phi + (\rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\phi)\,\mathbf{e}_z$

体积微分元　$\mathrm{d}\mathcal{V} = \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\phi \mathrm{d}z$

[8]教科书图 2-2-2。

球坐标系 Spherical coordinate[9]



(a)单位矢量 (b)曲面 (c)微分元

$$\mathbf{A} = A_r\mathbf{e}_r + A_\theta\mathbf{e}_\theta + A_\phi\mathbf{e}_\phi$$

$$A = \sqrt{A_r^2 + A_\theta^2 + A_\phi^2}$$

长度微分元 $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = (\mathrm{d}r)\,\mathbf{e}_r + (r\mathrm{d}\theta)\,\mathbf{e}_\theta + (r\sin\theta\mathrm{d}\phi)\,\mathbf{e}_\phi$

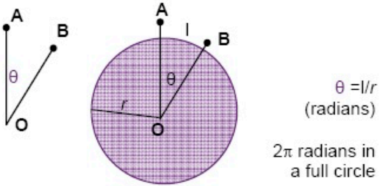
面积微分元 $\mathrm{d}\mathbf{S} = \left(r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\right)\mathbf{e}_r + (r\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi)\,\mathbf{e}_\theta + (r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta)\,\mathbf{e}_\phi$

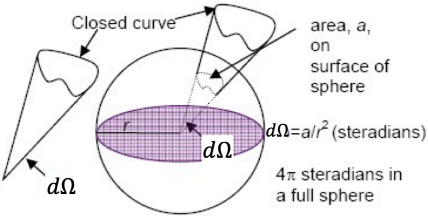
体积微分元 $\mathrm{d}\mathcal{V} = r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$, 立体角 $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi.$

9 教科书图 2-2-3。

球坐标系的立体角 (solid angle)

$$\mathrm{d}\Omega \equiv \frac{\widehat{\mathbf{r}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}}{r^2} \Rightarrow \Delta\Omega = \frac{\Delta A_1}{r_1^2} = \frac{\Delta A_2 \cos\theta}{r_2^2}$$





对于以球坐标圆心的立体角，有 $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$

不同坐标间的变换关系 & 矢量代数运算

- 一个特殊矢量: 位置矢量 (或距离矢量)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} &= x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \\
&= \rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z \\
&= r\mathbf{e}_r
\end{aligned}
$$

- 不同坐标间的变换关系见表 2-2-1、矢量代数运算见 §2.3
- 关于不同坐标间微分量的变换，有

$$
\begin{bmatrix} \mathrm{d}\rho \\ \rho\mathrm{d}\phi \\ \mathrm{d}z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{bmatrix}
$$

方向矢量的微分关系

与

$$
\begin{bmatrix} \mathrm{d}r \\ r\mathrm{d}\theta \\ r\sin\theta\mathrm{d}\phi \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{bmatrix}
$$

- 方向矢量的微分关系，有

$$
\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \rho} & \frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \rho} & \frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{e}_\phi \\ 0 & -\mathbf{e}_\rho \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} & \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} & \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} & \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} & \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial r} & \frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \theta} & \frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{e}_\theta & \sin\theta\mathbf{e}_\phi \\ 0 & -\mathbf{e}_r & \cos\theta\mathbf{e}_\phi \\ 0 & 0 & \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\phi \end{pmatrix}
$$

梯度 gradient

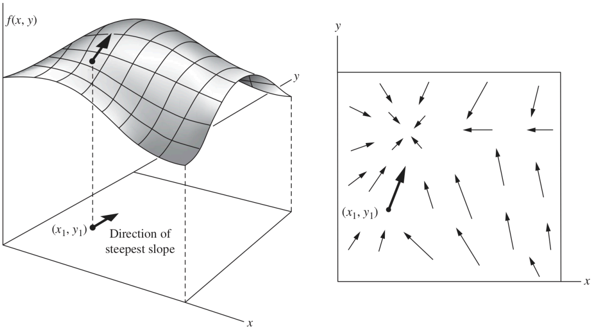


图: 取自 E.M. Purcell, Electricity and magnetism, 3rd ed.

梯度 gradient

令

$$f(x, y, z) = f(\mathbf{r}),$$

定义

$$\mathbf{G} = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z = \nabla_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r}) = \nabla f$$

有时又写成 grad f。其中,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_z.$$

类似地，可以在其它坐标系写下 ∇ 的表示式 (附录 A)。

梯度表征标量场的最大变化率及其方向。

Example: 位置矢量函数的梯度, **例 2.4.1**。

散度 divergence

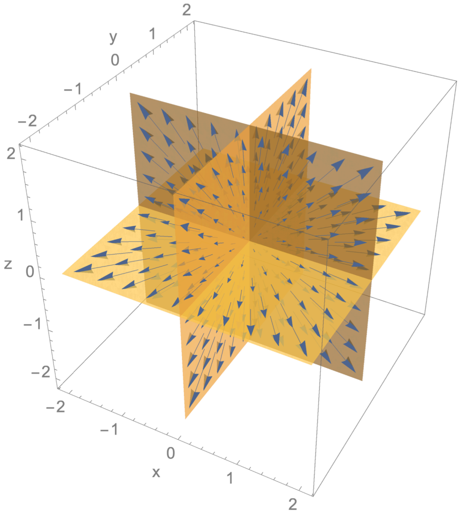


图: 矢量函数 $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$

散度 divergence

定义通量 (flux) 为

$$\psi = \iint \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}}$$

其中, $\mathbf{A}$ 可以是 $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{J}, \ldots$。$\mathbf{A}$ 的散度定义为

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &\equiv \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oiint \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}}}{\Delta V} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_z \right) \cdot (A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y + A_z\mathbf{e}_z) \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.\end{aligned}$$

有时又写成 div $\mathbf{A}$。Example: **例 2.5.3, 例 2.5.2**。

(高斯 Gauss) 散度定理: (§2.5.3)

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{A})\, \mathrm{d}\mathcal{V} = \oiint_A \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}}$$

旋度 curl

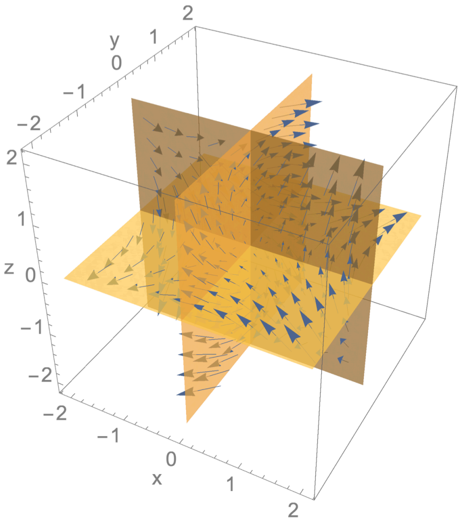


图: 矢量函数 $\mathbf{r} = y\mathbf{e}_x + z\mathbf{e}_y + x\mathbf{e}_z$

旋度 curl

定义环量 (circulation) 为

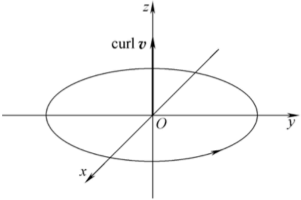
$$\Gamma = \oint \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$$

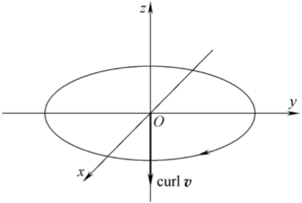
其中, $\mathbf{A}$ 可以是 $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{J}, \ldots$。$\mathbf{A}$ 的旋度定义为

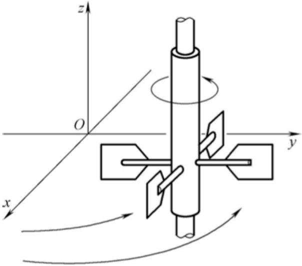
$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{A} &\equiv \left[\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}}{\Delta S}\right] \widehat{\mathbf{n}} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_z\right) \times (A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y + A_z\mathbf{e}_z) \\ &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

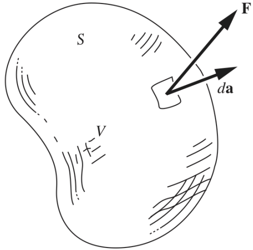
有时又写成 curl $\mathbf{A}$。Example: **例 2.6.2**。
(斯托克斯 Stokes) 旋度定理: (§2.6.2)

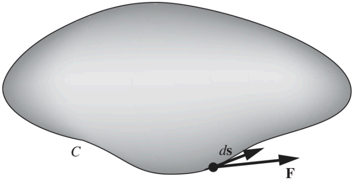
$$\iint_A (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}} = \oint_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$$

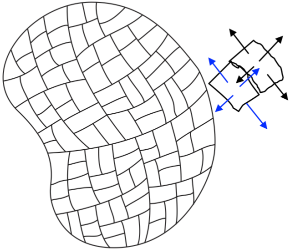

z
curl $\boldsymbol{v}$
O
y
x

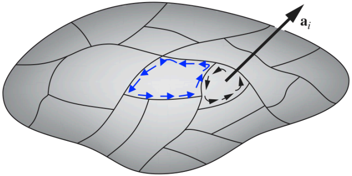

z
y
O
x
curl $\boldsymbol{v}$


z
O
y
x









$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{A})\, d\mathcal{V} = \oiint_A \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\mathcal{S}}$$

$$\iint_A (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}} = \oint_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$$

拉普拉斯 Laplace 算子

- 定义 Laplace 算子为 (§2.5.4)

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f = \Delta f = \nabla \cdot (\nabla f) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_z\right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z\right) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}
\end{aligned}
$$

♠ 与此相关的有格林第一公式 (Green's first identity) 与第二公式或格林互易定理 (Green's reciprocity theorem)[10]

$$
\iiint\limits_V \left(\psi\nabla^2\varphi + \nabla\psi\cdot\nabla\varphi\right) \mathrm{d}\mathcal{V} = \oiint\limits_A (\psi\nabla\varphi)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}}
$$

$$
\iiint\limits_V \left(\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi\right) \mathrm{d}\mathcal{V} = \oiint\limits_A (\psi\nabla\varphi - \varphi\nabla\psi)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{S}}.
$$

[10] 格林公式给出区域 V 中的场与边界面 A 上的场之间的关系。对于求解电磁场问题是非常有用的工具。注意，以上的格林公式为标量形式，还有矢量格林公式，鼓励有兴趣的同学自行查找相关文献。

Dirac delta 函数

- Dirac delta 函数 (或 delta 函数) 在描述点电荷时，有时候非常方便，一维函数定义为

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases}\infty & \text{if } x=x_0\\ 0 & \text{if } x\neq x_0\end{cases}$$

且

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=1.$$

- 以上可推广到高维情况[11]，三维 Dirac delta 函数的定义为

$$\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)=\begin{cases}0,\mathbf{r}\neq\mathbf{r}'\\ \infty,\mathbf{r}=\mathbf{r}'\end{cases},\quad 与\quad \iiint_V\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)\mathrm{d}\mathcal{V}'=\begin{cases}1,\mathbf{r}\subset V\\ 0,\mathbf{r}\not\subset V\end{cases}$$

[11] 注意因次。

Dirac delta 函数 (续)

对于有源时变电磁场问题，Dirac delta 函数在数学描述中扮演重要角色，以下列出该函数的几个重要特性

- 在球坐标系中有以下结果:

$$\nabla\cdot\frac{\mathbf{e}_r}{r^2}=4\pi\delta(\mathbf{r})\text{ 与 }\nabla\times\frac{\mathbf{e}_r}{r^2}=\mathbf{0}(r\neq 0)$$

$$\nabla\cdot\frac{\mathbf{e}_R}{R^2}=4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\text{ 与 }\nabla\times\frac{\mathbf{e}_R}{R^2}=\mathbf{0}\ \ (\mathbf{R}=\mathbf{r}-\mathbf{r}',R\neq 0)$$

- 为偶函数 $\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)=\delta\left(\mathbf{r}'-\mathbf{r}\right)$
- 缩放特性 $\delta\left(\alpha\mathbf{r}\right)=\frac{\delta(\mathbf{r})}{|\alpha|}$，$\alpha\neq 0$
- $\iiint\limits_V f(\mathbf{r}')\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)\mathrm{d}\mathcal{V}'=f(\mathbf{r}),\mathbf{r}\subset V$
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta\left(\xi-x\right)\delta\left(x-\eta\right)\mathrm{d}x=\delta\left(\xi-\eta\right)$

Helmholtz 定理

- Helmholtz 定理: 若一个矢量场 $\mathbf{F}$ 的散度和旋度仅在有限区域内不为零[12]，则该矢量场 $\mathbf{F}$ 可由其散度和旋度唯一确定，且该矢量场可写做

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla_{\mathbf{r}}\varphi(\mathbf{r}) + \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_V \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}\mathcal{V}'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_V \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}\mathcal{V}'.$$

- 又称 Helmholtz 分解，其中第一项 $-\nabla_{\mathbf{r}}\varphi(\mathbf{r})$ 称为 longitudinal or irrotational field，第二项 $\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ 称为 transverse or solenoidal field。注意上式中 $\nabla_{\mathbf{r}'}$ 通过适当调整，可以移到积分外。
- 重要应用: 静电场 $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ 及 φ 的积分表示式，与静磁场 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 及 $\mathbf{A}$ 的积分表示式。

[12] 要求 $\nabla \cdot \mathbf{F}$ 与 $\nabla \times \mathbf{F}$ 衰减比 $1/r^2$ 快，或有 $1/r^{\lambda+2}(\lambda > 0)$ 的衰减。

几个常用关系式

$$\nabla\cdot\spadesuit=0\Leftrightarrow\spadesuit=\nabla\times\clubsuit,\qquad \nabla\times\spadesuit=0\Leftrightarrow\spadesuit=\nabla\clubsuit$$

$$\nabla\cdot\bigstar=f(\mathbf{r})\Leftrightarrow\bigstar=\frac{1}{4\pi}\mathbf{e}_R\int_{V,A,C}\frac{f(\mathbf{r}')}{R^2(\mathbf{r},\mathbf{r}')}\mathrm{d}(\mathcal{V},\mathcal{S},\ell)'$$

$$\nabla\times\bigstar=\mathbf{F}(\mathbf{r})\Leftrightarrow\bigstar=\frac{1}{4\pi}\int_{V,A,C}\frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})\times\mathbf{e}_R}{R^2(\mathbf{r},\mathbf{r}')}\mathrm{d}(\mathcal{V},\mathcal{S},\ell)'$$

$$\nabla^2\blacksquare=-f(\mathbf{r})\Leftrightarrow\blacksquare=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\iiint_V\dfrac{f(\mathbf{r}')}{R(\mathbf{r},\mathbf{r}')}\mathrm{d}\mathcal{V}'\\[2ex]\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\iiint_V\dfrac{f(\mathbf{r}')}{R(\mathbf{r},\mathbf{r}')}\mathrm{d}\mathcal{V}'+\dfrac{1}{4\pi}\oiint_A\left[\dfrac{1}{R(\mathbf{r},\mathbf{r}')}\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\dfrac{\partial}{\partial n}\dfrac{1}{R(\mathbf{r},\mathbf{r}')}\right]\mathrm{d}\mathcal{S}'\end{cases}$$

物理意义：等式右边第一项表示 V内包含的场源$f(\mathbf{r})$对■的贡献。叠加原理。

等式右边第二项则表示 V外场源$f(\mathbf{r})$对■的贡献。惠更斯原理 (Huygens principle)。

$$\nabla^2\blacksquare-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\blacksquare=-f(\mathbf{r},t)\Leftrightarrow\blacksquare=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\iiint_V\dfrac{f\left(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{R(\mathbf{r},\mathbf{r}')}\mathrm{d}\mathcal{V}'\mathrm{d}t'\\ \cdots\end{cases}$$

物理意义：推迟效应，当$c\to\infty, f\left(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)\to f(\mathbf{r}')$

常见的 $r, \mathbf{r}, R, \mathbf{R}$ 相关运算公式

$$\nabla r^n = n r^{n-1} \mathbf{e}_r$$

$$\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{e}_r, \nabla R = \frac{\mathbf{R}}{R} = \mathbf{e}_R$$

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \nabla \frac{1}{R} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3}$$

$$\nabla' R = -\mathbf{e}_R \quad \text{其中，} R = |\mathbf{R}| = \left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right|$$

$$\nabla' \frac{1}{R} = -\nabla \frac{1}{R} = \frac{\mathbf{R}}{R^3} = \frac{1}{R^2} \mathbf{e}_R$$

$$\nabla f(r) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} \mathbf{e}_r$$

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$$

$$\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$$

$$\nabla \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{0}$$

$$\nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{a} \quad \text{其中，}\mathbf{a}\text{为常矢量}$$

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -4\pi\delta(\mathbf{r})$$

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} = 4\pi\delta(\mathbf{r}), \nabla \times \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} = \mathbf{0}$$

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{e}_R}{R^2} = 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \nabla \times \frac{\mathbf{e}_R}{R^2} = \mathbf{0}$$

例题 1: 麦克斯韦方程组

利用本章介绍的矢量分析，列写在直角坐标、圆柱坐标、球坐标下的微分与积分形式的麦克斯韦方程组。

▷ 在直角坐标下

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_f\Rightarrow\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=\rho_f$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0\Rightarrow\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial E_z}{\partial y}-\dfrac{\partial E_y}{\partial z}=-\dfrac{\partial B_x}{\partial t}\\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z}-\dfrac{\partial E_z}{\partial x}=-\dfrac{\partial B_y}{\partial t}\\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x}-\dfrac{\partial E_x}{\partial y}=-\dfrac{\partial B_z}{\partial t}\end{cases}$$

$$\nabla\times\mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{J}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial H_z}{\partial y}-\dfrac{\partial H_y}{\partial z}=\dfrac{\partial D_x}{\partial t}+J_x\\ \dfrac{\partial H_x}{\partial z}-\dfrac{\partial H_z}{\partial x}=\dfrac{\partial D_y}{\partial t}+J_y\\ \dfrac{\partial H_y}{\partial x}-\dfrac{\partial H_x}{\partial y}=\dfrac{\partial D_z}{\partial t}+J_z\end{cases}$$

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho_f}{\epsilon}\Rightarrow\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=-\frac{\rho_f}{\epsilon}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{J}+\frac{\partial\rho_f}{\partial t}=0\Rightarrow\frac{\partial J_x}{\partial x}+\frac{\partial J_y}{\partial y}+\frac{\partial J_z}{\partial z}+\frac{\partial\rho_f}{\partial t}=0$$

例题 1: 麦克斯韦方程组

▷ 在圆柱坐标下

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_f\Rightarrow\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho D_\rho\right)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(D_\phi\right)}{\partial\phi}+\frac{\partial\left(D_z\right)}{\partial z}=\rho_f$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0\Rightarrow\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho B_\rho\right)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(B_\phi\right)}{\partial\phi}+\frac{\partial\left(B_z\right)}{\partial z}=0$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(E_z\right)}{\partial\phi}-\frac{\partial\left(E_\phi\right)}{\partial z}=-\frac{\partial B_\rho}{\partial t}\\ \frac{\partial\left(E_\rho\right)}{\partial z}-\frac{\partial\left(E_z\right)}{\partial\rho}=-\frac{\partial B_\phi}{\partial t}\\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho E_\phi\right)}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(E_\rho\right)}{\partial\phi}=-\frac{\partial B_z}{\partial t}\end{cases}$$

$$\nabla\times\mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{J}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(H_z\right)}{\partial\phi}-\frac{\partial\left(H_\phi\right)}{\partial z}=\frac{\partial D_\rho}{\partial t}+J_\rho\\ \frac{\partial\left(H_\rho\right)}{\partial z}-\frac{\partial\left(H_z\right)}{\partial\rho}=\frac{\partial D_\phi}{\partial t}+J_\phi\\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho H_\phi\right)}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(H_\rho\right)}{\partial\phi}=\frac{\partial D_z}{\partial t}+J_z\end{cases}$$

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho_f}{\epsilon}\Rightarrow\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=-\frac{\rho_f}{\epsilon}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{J}+\frac{\partial\rho_f}{\partial t}=0\Rightarrow\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho J_\rho\right)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(J_\phi\right)}{\partial\phi}+\frac{\partial\left(J_z\right)}{\partial z}+\frac{\partial\rho_f}{\partial t}=0$$

例题 1：麦克斯韦方程组

▷ 在球坐标下

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_f\Rightarrow\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2D_r\right)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta D_\theta\right)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(D_\phi\right)}{\partial\phi}=\rho_f$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0\Rightarrow\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2B_r\right)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta B_\theta\right)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(B_\phi\right)}{\partial\phi}=0$$

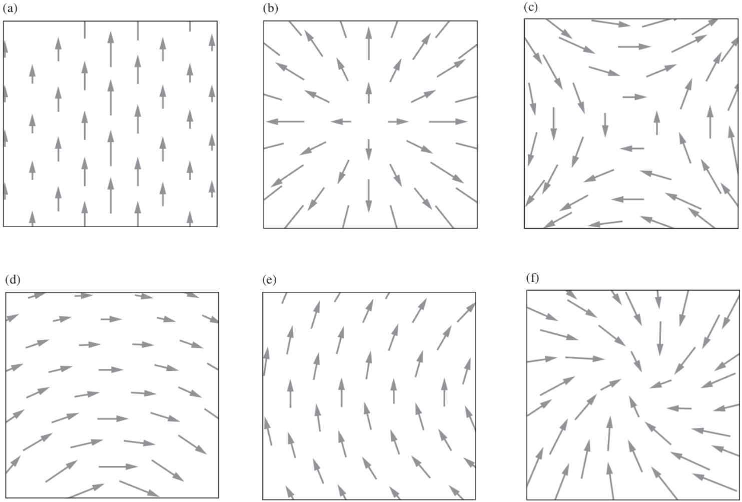
$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{r\sin\theta}\left[\dfrac{\partial\left(\sin\theta E_\phi\right)}{\partial\theta}-\dfrac{\partial\left(E_\theta\right)}{\partial\phi}\right]=-\dfrac{\partial B_r}{\partial t}\\ \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial\left(E_r\right)}{\partial\phi}-\dfrac{\partial\left(rE_\phi\right)}{\partial r}\right]=-\dfrac{\partial B_\theta}{\partial t}\\ \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial\left(rE_\phi\right)}{\partial r}-\dfrac{\partial\left(E_r\right)}{\partial\theta}\right]=-\dfrac{\partial B_\phi}{\partial t}\end{cases}$$

$$\nabla\times\mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{J}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{r\sin\theta}\left[\dfrac{\partial\left(\sin\theta H_\phi\right)}{\partial\theta}-\dfrac{\partial\left(H_\theta\right)}{\partial\phi}\right]=\dfrac{\partial D_r}{\partial t}+J_r\\ \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial\left(H_r\right)}{\partial\phi}-\dfrac{\partial\left(rH_\phi\right)}{\partial r}\right]=\dfrac{\partial D_\theta}{\partial t}+J_\theta\\ \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial\left(rH_\phi\right)}{\partial r}-\dfrac{\partial\left(H_r\right)}{\partial\theta}\right]=\dfrac{\partial D_\phi}{\partial t}+J_\phi\end{cases}$$

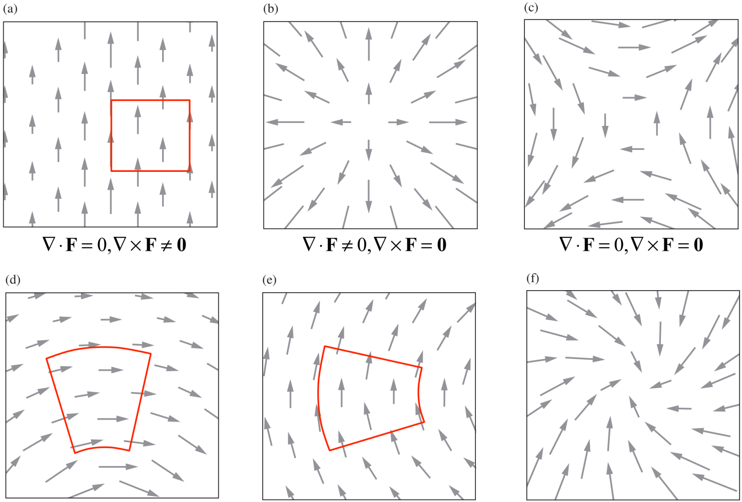
$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho_f}{\epsilon}\Rightarrow\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}=-\frac{\rho_f}{\epsilon}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{J}+\frac{\partial\rho_f}{\partial t}=0\Rightarrow\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2J_r\right)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta J_\theta\right)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(J_\phi\right)}{\partial\phi}+\frac{\partial\rho_f}{\partial t}=0$$

例题 2: 判断下列矢量场的散度或旋度



例题 2: 判断下列矢量场的散度或旋度



(a) $\nabla\cdot\mathbf{F}=0, \nabla\times\mathbf{F}\neq\mathbf{0}$

(b) $\nabla\cdot\mathbf{F}\neq 0, \nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{0}$

(c) $\nabla\cdot\mathbf{F}=0, \nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{0}$

(d) $\nabla\cdot\mathbf{F}=0, \nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{0}$

(e) $\nabla\cdot\mathbf{F}=0, \nabla\times\mathbf{F}\neq\mathbf{0}$

(f) $\nabla\cdot\mathbf{F}\neq 0, \nabla\times\mathbf{F}\neq\mathbf{0}$

例题 3: 为什么麦克斯韦的电磁理论这么难?♠

大哉问! 根据英裔美国物理学家弗里曼戴森 (Freeman J. Dyson, 1923-2020)，或许这个问题可能归因于以下几点:

- 数学上的困难: 早期数学表述过于复杂，相对于人们熟知的牛顿力学 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$。多亏后来的数学物理学家，麦克斯韦的电磁理论通过矢量分析已大大化简。
- 直觉上的困难: 早期发展的电磁理论仍不脱离机械观，因此时常可见将电场、磁场与电荷、电流等物理量与机械应力对照。一直要到后来人们接受放弃机械观，而采取“场”的思维时，麦克斯韦的电磁理论才开始变得较容易理解。
- 结构上的困难: Dyson 提出的“双层结构理论 (two-layer structure)”: 第一层是物质世界的基本组成，由场建构。第二层则是人们能触及、测量的，以力、能量等方式呈现。第二层的物理量可以视为是第一层物理量的 (双) 线性或二次式组成的形式。

类似的困难也出现在量子力学的理论。拿以奥地利物理学家薛定谔 (Erwin Schroedinger, 1887-1961) 提出的波函数 Ψ 为概念的量子力学，普通物理学过，只有当波函数平方 $|\Psi|^2$ 才有实质的物理意义，隐含了上述的“双层结构”。而这不再能简单以日常使用的文字描述了。

从前沿角度看，麦克斯韦电磁理论的影响不仅能用来解释电与磁现象，更深远的影响在于它提升了过去牛顿力学的机械观，成为以“场”为中心的理论架构与“双层结构”的分析观点。后来二十世纪的相对论、量子力学、与规范场论等都是在这种思维下获得成功的例子。

> Mathematics is the language that nature speaks. The language of mathematics makes the world of Maxwell fields and the world of quantum processes equally transparent.
>
> Freeman J. Dyson (1923-2020)

from *Why is Maxwell's theory so hard to understand?* An essay by Professor Freeman J. Dyson, Institute of Advanced Study, Princeton

作业

- 2.2, 2.3
- 2.5, 2.6

Work hard to find something that fascinates you.

Richard Feynman (1918-1988)