

电磁辐射与加速器束流动力学导论

**Introduction to Accelerator Beams, Collective Dynamics,
Electromagnetic Radiation and Free-electron Lasers**

作者：蔡承颖 (Cheng-Ying Tsai, C.-Y. Tsai)

特别声明

此笔记/讲义非最终版，内容可能存在笔误、谬误，仍在迭代修改中。此讲义不定期更新。

第十六章 高亮度电子微束团动力学¹

内容提要

- 直线加速器微束团不稳定性
- 激光-波荡器微束团串不稳定性
- 储存环微束团不稳定性
- 稳态微聚束工作原理

前一章讨论相干同步辐射尾场与阻抗时，采用偏向“粒子”观点的分析，这么做的一部分动机其实是为了这一章即将讨论的主题——微束团动力学 (microbunch dynamics) 所做的准备。顾名思义，“微”表示动力学发生在束团内部，因此，驱动源应为短程尾场或高频宽带阻抗。相干同步辐射场是导致电子微束团不稳定性的一种驱动源。此外，空间电荷效应或其它短程尾场²也可能同样导致电子微束团不稳定性。在这一章最后，考虑一个有趣的情况：当电子束长足够短，并且这些极短的电子束团们形成束团串时，称微束团串 (microbunch train)，此时短程尾场在概念上不再是“短程”，而可能形成影响临近电子微束团动力学的驱动源。此崭新的电子束参数是近年提出的一种新型储存环相干光源“稳态微聚束”(steady-state microbunching, SSMB) 的电子束形态。

16.0 问答预览

1. 什么是高亮度电子束？有什么特点？

⇒ 高亮度电子束指的是束团相空间密度较大，或者说，在相同的相空间体积里具有更多电子。其特点包括：

- 辐射强度高；
- 束团品质容易受集体效应影响而变差，比如：束长增加、能散增加、横向发射度增加等；
- 容易产生相干同步辐射。

2. 什么是微束团不稳定性？对电子束有什么影响？

⇒ 微束团不稳定性指的是电子束中的微束团由于短程尾场或高频宽带阻抗的作用，在传输过程中对束团产生能量调制和密度调制。当两者形成正反馈时，导致束团内局部电荷密度放大，产生更强的相干同步辐射与进一步能量调制。是一把双刃剑，其影响包括：

- 辐射强度增加，可用于自由电子激光或产生相干光源等应用；
- 束团品质恶化，影响电子束的使用。

3. 单次经过加速器的微束团不稳定性是如何产生的？

¹这一章部分内容受国家自然科学基金青年项目资助，项目名称“高亮度电子束相空间调制、传输与微束团不稳定性研究”(11905073) 与面上项目资助，项目名称“面向极紫外相干光源应用的高亮度电子稳态微聚束集体效应基础理论研究”(12275094)。

²回忆一下，第 10 章介绍的高增益自由电子激光机制，电子束从 unbunched beam 形成微束团，驱动源是波荡器辐射尾场或阻抗。

- ⇒ 单次经过加速器的微束团不稳定性类似于速调管放大器的工作原理，电子束在短程尾场或高频宽带阻抗的作用下，产生能量调制和密度调制，两者形成正反馈，导致微束团放大。
4. 如何分析单次经过加速器的微束团不稳定性？
- ⇒ 可利用线性化 Vlasov 方程进行分析，通过迭代法求解积分方程，得到微束团增益函数和增益频谱，从而判断是否存在微束团不稳定性。
5. 如何抑制单次经过加速器的微束团不稳定性？
- ⇒ 可以通过激光加热器、通过磁聚焦结构优化、通过束团分布调控等方法抑制。
6. 储存环微束团不稳定性有哪些分析方法？
- ⇒ 可以利用色散方程、模式分解、数值求解 Vlasov-Fokker-Planck 方程等方法分析储存环微束团不稳定性。
7. 什么是稳态微聚束？
- ⇒ 稳态微聚束是一种新型的电子储存环，能够产生高平均功率的相干辐射源。不同于传统电子同步辐射储存环，稳态微聚束储存环利用激光调制器产生微束团脉冲串，在辐射波荡器中产生相干辐射。

16.1 高亮度电子束：双面刃

从第 9 章、第 10 章与第 13 章的讨论知道，由于短程尾场驱动的微束团集体不稳定性产生的电子束密度调制或群聚因子放大可以是“双面刃”：

- 好的一面：辐射强度增加 $\Rightarrow \left. \frac{d^2\mathcal{W}}{d\omega d\Omega} \right|_{\text{束团}} = \frac{d^2\mathcal{W}_1}{d\omega d\Omega} \Big|_{\text{单电子}} [N + N^2 F(\omega)]$ 或 FEL \Rightarrow 进一步优化设计，使辐射强度再提高，即从电子束“榨取”更多能量。
- 坏的一面：束团品质恶化 \Rightarrow 纵向束长拉伸、能散增加、横向发射度增加等 \Rightarrow 想办法抑制、消灭。

好、坏、左右为难？ \Rightarrow 榨取或抑制 \Rightarrow 随心所欲的控制才是王道。

前面第 13 章介绍几种基于线性化 Vlasov 方程的求解时，讨论了三种不同思路。以下将进一步细化讨论，针对两种不同加速器形态中的微束团动力学，应用三种思路分析。对单次经过加速器的分析较为详细；对储存环的分析，篇幅相对较少，仅着重对物理图像的解释。

16.2 单次经过加速器的微束团不稳定性理论

这里的单次经过加速器可以是直线加速器 (linear accelerator, linac), 也可以是能量循环加速器 (recirculating accelerator) 或能量回收加速器 (energy recovery linac, ERL)。由于电子束在这类加速器中的动力学问题都可视为初始值问题 (initial value problem, IVP), 因此称单次经过 (single-pass)。

此节介绍单次经过加速器的微束团不稳定性理论, 分析基于第13章讨论的动理学理论的积分方程 (思路一)。对于 C 型磁压缩结构 (chicane), 利用迭代法, 积分方程存在解析解, 因此提供了考虑微束团不稳定性情况下, 设计、优化 C 型磁压缩结构的一大利器。

16.2.1 比拟: 一种“速调管”放大器

单次经过加速器的电子束微束团不稳定性类似于高功率真空微波器件“速调管”(klystron) 的工作原理, 可以视为一种微波放大器, 用于产生和放大微波信号。最早由 E.L. Saldin 等人提出³。其工作原理如图 16.1, 基于电子束的互相作用和微波波导的导波特性的, 简要描述如下:

- 阴极: 速调管的基本部件之一是阴极 (cathode), 它是一个热电子发射器。当电流通过阴极时, 它加热并释放电子, 这些电子形成了一个未聚束 (unbunched) 电子束⁴。
- 调制电场: 在速调管的电子束路径中, 有一个调制电场。这个电场会周期性地改变电子束的能量, 即电子的速度⁵。这是通过在电子束路径中引入一定的电场变化来实现的, 这个电场通常是一个交变电场或时变电磁场, 由图 16.1 的 Microwave Input 馈入。
- 电子束的速度调制: 电子束经过调制电场后, 其速度会受到调制, 这导致了电子密度的周期性调制。这个调制的频率通常与所需的微波频率一致。此过程发生在图 16.1 的 Buncher Cavity。
- 电子束的密度调制: 经过速度调制后的电子束进入真空漂移段 (drift space), 速度大的后方电子赶上速度小的前方电子, 即速度调制转变为密度调制。这个调制的频率通常与所需的微波频率一致。
- 微波放大: 在下游微波腔 Catcher Cavity 内, 电子束由于调制频率与微波频率一致, 当相位恰当时, 电子束转移能量给同频率的微波, 导致微波电场的放大。这是通过电子束中的电子与微波电场相互作用来实现的, 导致微波信号的能量增加。
- 输出耦合: 放大的微波信号最终从速调管的输出口耦合出来, 以供后续用途, 如: 通信、雷达等应用。

³E.L. Saldin, E.A. Schneidmiller and M.V. Yurkov, Klystron instability of a relativistic electron beam in a bunch compressor, Nucl. Instru. Methods A **490**, 1 (2002). [https://doi.org/10.1016/S0168-9002\(02\)00905-1](https://doi.org/10.1016/S0168-9002(02)00905-1)

⁴微波器件的电子束一般对束团品质的要求没那么高, 因此热阴极产生的电子束已经足够。目前多数高亮度电子束的产生来自光阴极电子枪, 产生的电子束品质好得多。关于粒子源的介绍, 可参考 D.C. Faircloth, Particle Sources, CERN-CAS (2019). <https://inspirehep.net/literature/1853277>。

⁵这里改变能量即改变速度, 因此可以推知电子还不处于相对论速度。

总体来说，速调管的工作原理涉及将电子束的速度调制与微波电场的相互作用相结合，以放大微波信号。速调管通常用于高频微波通信和雷达系统中，因为它们可以提供高功率和频率调谐特性。

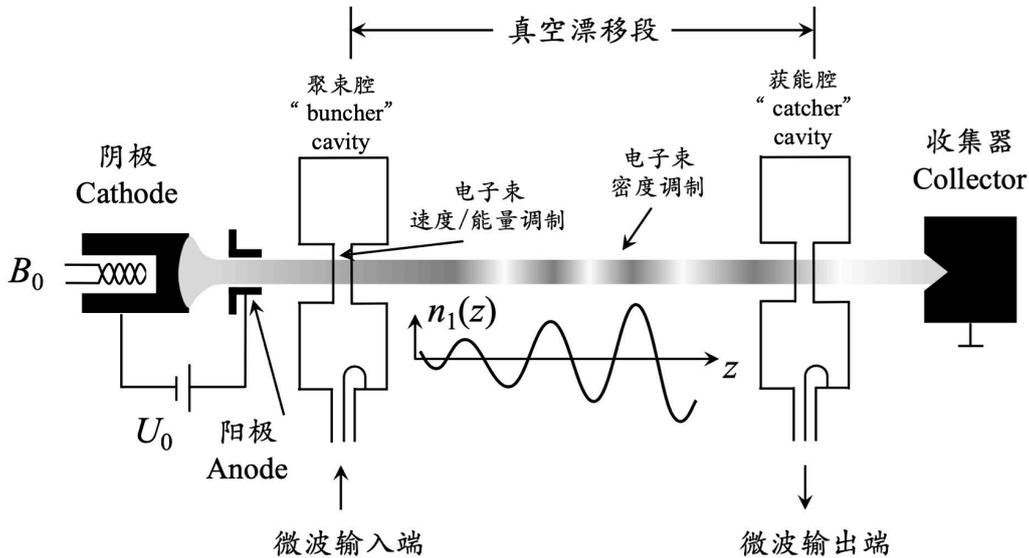


图 16.1: 速调管工作原理示意图。均匀灰色为未聚束电子束，灰色渐层为电子束受到调制电场影响后，从速度调制变为密度调制的过程。

对单次经过加速器的微束团动力学来说，与上述的速调管工作原理几乎存在一一对应：

- 一开始假设电子束为未聚束，称 **unbunched beam** 或 **coasting beam**。
- 调制电场为短程尾场或宽带阻抗，作用在电子束上，形成能量调制⁶。
- 尾场、阻抗 \Rightarrow 能量调制 $\Rightarrow R_{56} \Rightarrow$ 密度调制 \Rightarrow 尾场、阻抗 \Rightarrow 能量调制 $\Rightarrow \dots$ 当形成正向反馈 (**positive feedback**) 时，密度调制与能量调制不断被放大，即微束团不稳定性。
- 受到密度调制后的电子束，称微束团，会自发地发出恰好满足该调制频率的相干同步辐射，导致辐射信号的能量增加。换句话说，相干同步辐射尾场或阻抗调制电子束，使增加能量调制幅度。
- 后续用途即“双面刃”：好 \Rightarrow 产生相干光；坏 \Rightarrow 束团品质恶化。

以上过程可用如图 16.2 的单次经过加速器微束团不稳定性工作原理示意图描绘。

下一小节将从线性化 **Vlasov** 方程出发，介绍单次经过加速器的微束团不稳定性理论。

⁶这里我们舍弃“速度调制”用词，改用“能量调制”，因为现在假设电子为高能量相对论电子。

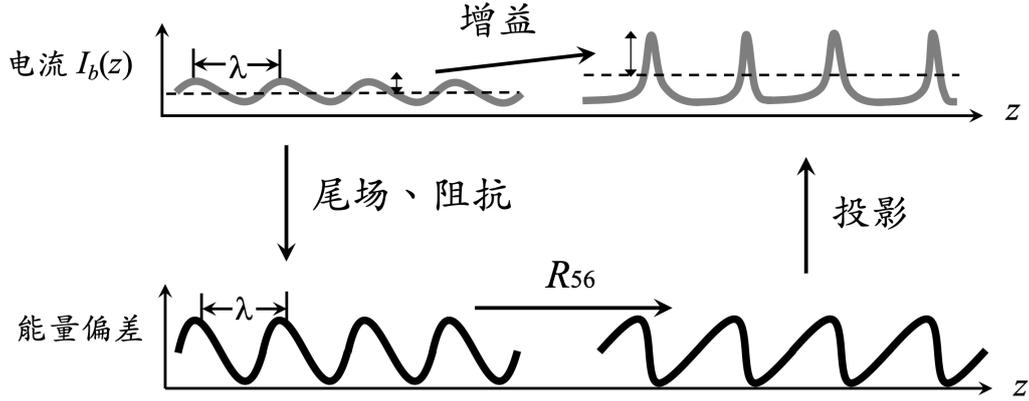


图 16.2: 基于单次经过加速器微束团不稳定性机制。

16.2.2 积分方程

§13.4 简短介绍了利用积分方程分析的思路，当时仅考虑纵向二维 (z, δ) 动力学。现在，考虑四维 $\mathbf{X} = (x, x', z, \delta)$ 情况，对六维情况，可依样画葫芦推广。忽略纵向同步振荡，假设尾场的特征长度 $\ll \sigma_z$ ，即 **coasting beam** 近似。一般对直线加速器或单次经过加速器大致成立。成立前提：相比于集体不稳定性增长的时间，纵向同步振荡时间长得多， $\tau_{\text{coll}} < T_s$ 。

现在，假设“纯光学”情况下的单电子轨迹已经得到，由磁聚焦结构传输段 τ 位置传输至 s 位置的相空间坐标可写成⁷

$$\mathbf{X}_s = \mathbf{R}(\tau \rightarrow s)\mathbf{X}_\tau \quad (16.1)$$

其中， $\mathbf{R}(\tau \rightarrow s)$ 为 4×4 线性传输矩阵。对一般线性磁聚焦结构传输段， $\mathbf{R}(\tau \rightarrow s)$ 可写为

$$\mathbf{R}(\tau \rightarrow s) = \begin{pmatrix} C(\tau \rightarrow s) & S(\tau \rightarrow s) & 0 & \eta(\tau \rightarrow s) \\ C'(\tau \rightarrow s) & S'(\tau \rightarrow s) & 0 & \eta'(\tau \rightarrow s) \\ R_{51}(\tau \rightarrow s) & R_{52}(\tau \rightarrow s) & 1 & R_{56}(\tau \rightarrow s) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (16.2)$$

其中，横向分量函数 $C(\tau \rightarrow s), S(\tau \rightarrow s)$ 满足齐次 Hill 方程⁸ $x'' + K_x(s)x = 0$ ，色散函数 $\eta(\tau \rightarrow s), \eta'(\tau \rightarrow s)$ 满足非齐次 Hill 方程

$$\eta'' + K_x(s)\eta = \frac{1}{\rho(s)} \quad (16.3)$$

利用高等数学学过的常数变易法 (variation of constants)⁹，有

$$\eta(\tau \rightarrow s) = S(\tau \rightarrow s) \int_\tau^s d\zeta \frac{C(\tau \rightarrow \zeta)}{\rho(\zeta)} - C(\tau \rightarrow s) \int_\tau^s d\zeta \frac{S(\tau \rightarrow \zeta)}{\rho(\zeta)} \quad (16.4)$$

⁷这里 $\mathbf{R}(0 \rightarrow s) = \mathbf{R}(s)$ 。为什么要保留 τ 而大费周章写成 $\mathbf{R}(\tau \rightarrow s)$? 往下看就知道。根本原因是，这里讨论的物理效应的“起点”并不总是对应到磁聚焦结构的起点 $\tau = 0$ 。所以，一般保留 τ 可以在任意位置，以利后面分析。

⁸假设初始条件为 $C(\tau \rightarrow \tau) = 1, S(\tau \rightarrow \tau) = 0, \eta(\tau \rightarrow \tau) = 0, \eta'(\tau \rightarrow \tau) = 0$ 。

⁹参考此讲义 §7.10。

其中, $\eta(\tau \rightarrow s), \eta'(\tau \rightarrow s)$ 有时又可写成 $R_{16}(\tau \rightarrow s), R_{26}(\tau \rightarrow s)$ 或 $D(\tau \rightarrow s), D'(\tau \rightarrow s)$, 且 $C(\tau \rightarrow s), S(\tau \rightarrow s), C'(\tau \rightarrow s), S'(\tau \rightarrow s)$ 有时也可写成 $R_{11}(\tau \rightarrow s), R_{12}(\tau \rightarrow s), R_{21}(\tau \rightarrow s), R_{22}(\tau \rightarrow s)$ ¹⁰。根据 §8.1 的讨论, 有

$$(R_{51}, R_{52}, R_{56})(\tau \rightarrow s) = \int_{\tau}^s \frac{d\zeta}{\rho(\zeta)} (-C, -S, -\eta)(\tau \rightarrow \zeta) \quad (16.5)$$

按线性传输矩阵, 单粒子的四维相空间坐标有

$$\begin{aligned} x_s &= C(\tau \rightarrow s)x_{\tau} + S(\tau \rightarrow s)x'_{\tau} + R_{16}(\tau \rightarrow s)\delta_{\tau} \\ x'_s &= C'(\tau \rightarrow s)x_{\tau} + S'(\tau \rightarrow s)x'_{\tau} + R_{26}(\tau \rightarrow s)\delta_{\tau} \\ z_s &= R_{51}(\tau \rightarrow s)x_{\tau} + R_{52}(\tau \rightarrow s)x'_{\tau} + z_{\tau} + R_{56}(\tau \rightarrow s)\delta_{\tau} \\ \delta_s &= \delta_{\tau} \end{aligned} \quad (16.6)$$

以上为四维相空间单粒子运动轨迹的解。

好, 现在单粒子运动轨迹有了, 在利用一阶、线性 Vlasov 方程分析前, 还需要知道零阶 Vlasov 方程的解。根据定理 13.5, 对“纯光学”情况, 哈密顿量与时间无明显相关, 此时零阶相空间分布函数的暂态解可“回溯历史”写成

$$f(\mathbf{X}; s) = f[\mathbf{R}^{-1}(0 \rightarrow s)\mathbf{X}; 0] = f_0(\mathbf{X}_0) \quad (16.7)$$

其中, 下标 0 表示该物理量在初始位置计。注意, $f_0(\mathbf{X}_0)$ 是初始分布函数, 不是未扰动函数, 也就是说, $f_0(\mathbf{X}_0) = \bar{f}_0(\mathbf{X}_0) + \hat{f}_0(\mathbf{X}_0)$, 其中, \bar{f}_0 为未扰动解, \hat{f}_0 为一阶微扰量, $\hat{f}_0 \ll \bar{f}_0$ 。

根据 §13.4, 一阶、线性 Vlasov 方程可写成如下积分形式为

$$f(\mathbf{X}; s) = f_0(\mathbf{X}_0) - \int_0^s d\tau \frac{\partial f(\mathbf{X}_{\tau}; \tau)}{\partial \delta_{\tau}} \frac{d\delta}{d\tau} \quad (16.8)$$

其中, 积分内包含集体效应的项

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{d\tau} &= 0 - \frac{4\pi\epsilon_0 r_e c}{\gamma} \int \frac{dk_1}{2\pi} Z_{\parallel}(k_1; \tau) N b(k_1; \tau) e^{ik_1 z_{\tau}} \\ &= -\frac{4\pi|e|c}{\gamma Z_0 I_A} \int \frac{dk_1}{2\pi} Z_{\parallel}(k_1; \tau) N b(k_1; \tau) e^{ik_1 z_{\tau}} \end{aligned} \quad (16.9)$$

其中, 等式右边 0 项为零阶项, 剩余为一阶项。式中的密度调制函数

$$b(k; s) = \frac{1}{N} \int d\mathbf{X} e^{-ikz_s} f(\mathbf{X}; s) \quad (16.10)$$

其中, $k = 2\pi/\lambda$ 为调制波数 (modulation wavenumber)。注意, 此处积分为四重积分¹¹

$$\int d\mathbf{X} = \int_{-\infty}^{\infty} dx_s \int_{-\infty}^{\infty} dx'_s \int_{-\infty}^{\infty} dz_s \int_{-\infty}^{\infty} d\delta_s$$

¹⁰在粒子能量固定情况下, 写成 η, η' 或 R_{16}, R_{26} 无异, 但是, 当粒子经历的传输段包含时变部件时, 如: RF 腔, 则 η, η' 或 R_{16}, R_{26} 将出现差异。此差异源于 η, η' 的定义属于局部的色散, 而 R_{16}, R_{26} 的定义恒以起点 $s = 0$ 为取值的参考零点。更多讨论可参考 A. Wolski 一书的 §5.1.1。

¹¹如果包含 y, y' , 则为六重积分。

现在，将线性 Vlasov 方程 $f(\mathbf{X}; s)$ 代入上面密度调制函数定义式，将有

$$\begin{aligned} b(k; s) &= \frac{1}{N} \int d\mathbf{X}_0 e^{-ikz} f_0(\mathbf{X}_0) - \frac{1}{N} \int d\tau \int d\mathbf{X}_\tau e^{-ikz(\mathbf{X}_\tau)} \frac{\partial f(\mathbf{X}_\tau; \tau)}{\partial \delta_\tau} \frac{d\delta}{d\tau} \\ &= b_0(k; s) - \frac{ik}{N} \int d\tau R_{56}(\tau \rightarrow s) \int d\mathbf{X}_\tau e^{-ikz(\mathbf{X}_\tau)} f(\mathbf{X}_\tau; \tau) \frac{d\delta}{d\tau} \end{aligned} \quad (16.11)$$

其中，第二个等号利用了分部积分法。现在打算继续化简标注红色的两项，然后积分。这里采取的策略：

设法将相空间坐标以起点处的初始坐标表示， $\int d\mathbf{X}_\tau \rightarrow \int d\mathbf{X}_0$

即

$$\int d\mathbf{X}_\tau \bar{f}(\mathbf{X}_\tau) e^{-ikz_s(\mathbf{X}_\tau) + ik_1 z_\tau} = \int d\mathbf{X}_0 \bar{f}(\mathbf{X}_0) e^{-ikz_s(\mathbf{X}_0) + ik_1 z_\tau(\mathbf{X}_0)} \quad (16.12)$$

则上面 $b(k; s)$ 积分方程可以写为

$$\begin{aligned} b(k; s) &= b_0(k; s) + ik \frac{4\pi\epsilon_0 r_e c}{\gamma} \times \\ &\int d\tau R_{56}(\tau \rightarrow s) \int \frac{dk_1}{2\pi} Z_{\parallel}(k_1; \tau) b(k_1; \tau) \int d\mathbf{X}_0 e^{-ikz(\mathbf{X}_0) + ik_1 z_\tau(\mathbf{X}_0)} f_0(\mathbf{X}_0) \\ &= b_0(k; s) + ik \frac{4\pi r_e}{\gamma Z_0} \times \\ &\int d\tau R_{56}(\tau \rightarrow s) \int \frac{dk_1}{2\pi} Z_{\parallel}(k_1; \tau) b(k_1; \tau) \int d\mathbf{X}_0 e^{-ikz(\mathbf{X}_0) + ik_1 z_\tau(\mathbf{X}_0)} f_0(\mathbf{X}_0) \\ &= b_0(k; s) + ik \frac{4\pi|e|c}{\gamma Z_0 I_A} \times \\ &\int d\tau R_{56}(\tau \rightarrow s) \int \frac{dk_1}{2\pi} Z_{\parallel}(k_1; \tau) b(k_1; \tau) \int d\mathbf{X}_0 e^{-ikz(\mathbf{X}_0) + ik_1 z_\tau(\mathbf{X}_0)} f_0(\mathbf{X}_0) \end{aligned} \quad (16.13)$$

其中， $I_A = |e|c/r_e$ 为一物理常数，称 Alfvén 电流。上面化简用了定理 $f(\mathbf{X}_\tau; \tau) \stackrel{!}{=} f_0(\mathbf{X}_0)$ ，

$$\begin{aligned} z(\mathbf{X}_0) &= R_{51}(s)x_0 + R_{52}(s)x'_0 + z_0 + R_{56}(s)\delta_0 \\ z_\tau(\mathbf{X}_0) &= R_{51}(\tau)x_0 + R_{52}(\tau)x'_0 + z_0 + R_{56}(\tau)\delta_0 \end{aligned} \quad (16.14)$$

注意， $b(k; s)$ 是个积分方程，不是积分式，因为等式右边被积分函数包含 $b(k; \tau)$ 。现在，我们准备代入一个特定的相空间分布函数 $f_0(\mathbf{X}_0)$ 以“化简”此积分方程。考虑 $f_0(\mathbf{X}_0) = \bar{f}_0(\mathbf{X}_0) + \hat{f}_0(\mathbf{X}_0)$ ，其中¹²

$$\begin{aligned} \bar{f}_0(\mathbf{X}_0) &= \frac{n_0}{(2\pi)^2 \sqrt{\det \Sigma_0}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{X}_0^T \Sigma_0^{-1} \mathbf{X}_0 \right\} \\ &= \frac{n_0}{2\pi\epsilon_{x0} \sqrt{2\pi\sigma_{\delta_0}}} \exp \left[-\frac{x_0^2 + (\beta_{x0}x'_0 + \alpha_{x0}x_0)^2}{2\epsilon_{x0}\beta_{x0}} - \frac{(\delta_0 - hz_0)^2}{2\sigma_{\delta_0}^2} \right] \end{aligned} \quad (16.15)$$

其中， $\mathbf{X}_{2D,0}^T \Sigma_{2D,0}^{-1} \mathbf{X}_{2D,0} = \frac{x_0^2 + (\beta_{x0}x'_0 + \alpha_{x0}x_0)^2}{\epsilon_{x0}\beta_{x0}}$ ， β_{x0}, α_{x0} 为束团的初始 Courant-Snyder 参数。此为横向相空间 (x, x') 高斯分布、能量偏差 δ 高斯分布、纵向 z 平项分布（因此看不

¹²这里 $\frac{n_0}{(2\pi)^2 \sqrt{\det \Sigma_0}}$ 的分母可写成线密度 n_0 ，也可写成束团总粒子个数 N ，只要规定相空间分布函数的归一化条件即可。由于以下采用 coasting beam 近似，分布函数无纵向 z 的依存关系，因此 n_0 为一常数，用 n_0 或 N 不影响结果，前后保持一致就行。

到明显 z 坐标依存关系) 的四维相空间分布函数¹³。代入上面看似可怕的 $b(k; s)$ 积分方程等式右边的被积分函数中, 经过稍微繁琐的计算, 最终可以化简成如下形式的积分方程

$$b[k(s); s] = b_0[k(s); s] + \int_0^s d\tau K(\tau, s)b[k(\tau); \tau] \quad (16.16)$$

其中, 与阻抗无关的“纯光学”密度调制

$$b_0[k(s); s] = b_0[k_0; 0] e^{-k^2(s)R_{56}^2(s)\sigma_{s0}^2/2} \times \exp\left[-\frac{k^2(s)\epsilon_{x0}\beta_{x0}}{2}\left(R_{51}(s) - \frac{\alpha_{x0}}{\beta_{x0}}R_{52}(s)\right)^2 - \frac{k^2(s)\epsilon_{x0}}{2\beta_{x0}}R_{52}^2(s)\right] \quad (16.17)$$

其中, $b_0[k_0; 0]$ 为初始由于 $\hat{f}_0(\mathbf{X}_0)$ 导致的微小但非零的密度调制¹⁴。积分方程中的核函数 (kernel function)

$$K(\tau, s) = ik(s)R_{56}(\tau \rightarrow s) \frac{4\pi I_b(\tau)Z_{||}[k(\tau); \tau]}{Z_0 \gamma I_A} e^{-\frac{k_0^2}{2}U^2(s, \tau)\sigma_{s0}^2} \times \exp\left[-\frac{k_0^2\epsilon_{x0}\beta_{x0}}{2}\left(V(s, \tau) - \frac{\alpha_{x0}}{\beta_{x0}}W(s, \tau)\right)^2 - \frac{k_0^2\epsilon_{x0}}{2\beta_{x0}}W^2(s, \tau)\right] \quad (16.18)$$

其中, 已知 $\mathbf{R}(\tau \rightarrow s) = \mathbf{R}(0 \rightarrow s)\mathbf{R}^{-1}(0 \rightarrow \tau) = \mathbf{R}(s)\mathbf{R}^{-1}(\tau)$, 展开并取其“56”元素

$$R_{56}(\tau \rightarrow s) = R_{56}(s) - R_{56}(\tau) + R_{51}(\tau)R_{52}(s) - R_{51}(s)R_{52}(\tau) \quad (16.19)$$

且

$$\frac{k(\tau)}{C(\tau)} = \frac{k(s)}{C(s)} = k_0, \quad C(s) = \frac{1}{1 + hR_{56}(s)} \quad (16.20)$$

其中, $C(s)$ 称束团压缩因子 (bunch compression factor)¹⁵, k_0 为起点处的初始调制波长, $I_b(\tau) = |e|cn_0C(\tau)$ 在 τ 位置的束团 (峰值) 电流, $I_A = 17045$ A, 为一常数。此外, 由于束团有限发射度与有限能散导致的朗道阻尼 (Landau damping) 项为

$$\begin{aligned} U(s, \tau) &= C(s)R_{56}(s) - C(\tau)R_{56}(\tau) \\ V(s, \tau) &= C(s)R_{51}(s) - C(\tau)R_{51}(\tau) \\ W(s, \tau) &= C(s)R_{52}(s) - C(\tau)R_{52}(\tau) \end{aligned} \quad (16.21)$$



笔记 以上积分方程体现的物理图像: 存在密度调制的电子束在 τ 受短程尾场或宽带阻抗影响, 引起当下在 τ 的能量调制。此在 τ 的能量调制通过磁聚焦结构传输段的非零动量紧缩因子 $R_{56}(\tau \rightarrow s)$, 最终在 s 处转变为电子束的密度调制。

定义 16.1. 微束团增益函数与增益频谱

由于 $b(k; s) \in \mathbb{C}$, 定义增益函数 (gain function) 为自 $s = 0$ 至 s 位置的放大比例, 即

$$G(s) = \left| \frac{b(k(s); s)}{b(k(0); 0)} \right| \quad (16.22)$$

¹³分布函数归一化系数的分母少了 $\sqrt{2\pi}$ 是由于采用 coasting beam 近似。

¹⁴在实际数值计算时, $b_0(k_0; 0)$ 可以用任意非零值代入无妨, 因为我们真正关心的物理量是增益函数, 即 $G = |b(k; s)/b(k(0); 0)|$ 。只要 $b_0[k_0; 0] \neq 0$ 就行。

¹⁵传输矩阵 R_{11} 元素有时也写成 $C(s)$, 这里不要混淆。以下已经尽量避免使用 $C(s), S(s)$ 代表 $R_{11}(s), R_{12}(s)$ 。

当 $G(s) \gg 1$ 时, 表示存在微束团不稳定性。由于 $G(s)$ 本身为初始调制波数 k_0 的函数, 因此还定义增益频谱 (gain spectrum) 为

$$G_f(\lambda) = G(s_f; \lambda = 2\pi/k) = \left| \frac{b(k(s_f); s_f)}{b(k(0); 0)} \right| \quad (16.23)$$

一般选磁聚焦结构传输段末尾出口处 $s = s_f$ 。

□

定理 16.1. 微束团不稳定性的 Volterra 积分方程

利用微扰理论求解 Vlasov 方程时, 对于单次经过、单束团集体效应, 可以通过将束团分布函数拆为 $f = f_0 + f_1$, 其中, f_0 为无微扰背景分布函数 (unperturbed background distribution), $|f_1| \ll f_0$ 为叠加在背景上的一阶微扰分布 (perturbed distribution)。 f_1 以密度调制 (density modulation) 函数量化, 数学上即其投影相空间分布沿 z 的傅里叶变换

$$b(k; s) = \frac{1}{N} \int d\mathbf{X} e^{-ikz_s} f_1(\mathbf{X}; s) \quad (16.24)$$

则线性化 Vlasov 方程可以写成第二类 Volterra 积分方程, 有

$$b(k; s) = b_0(k; s) + \int_0^s d\tau K(\tau, s) b(k(\tau); \tau) \quad (16.25)$$

其中, $b_0(k; s)$ 为不存在集体效应时 (即“纯光学”情况) 束团本身可能携带的密度调制函数, K 为核函数, 包含集体效应与朗道阻尼 (Landau damping) 效应, 有

$$K(\tau, s) = ik(s) \frac{I_b(\tau)}{\gamma I_A} R_{56}(\tau \rightarrow s) \frac{4\pi}{Z_0} Z_{\parallel}(k; \tau) \{L.D.; s, \tau\} \quad (16.26)$$

其中, 朗道阻尼效应源于束团发射度 $\epsilon_{x0, y0}$ 与能散 σ_δ

$$\{L.D.; s, \tau\} =$$

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \epsilon_{x0} \beta_{x0} \left(R_{51}(s, \tau) - \frac{\alpha_{x0}}{\beta_{x0}} R_{52}(s, \tau) \right)^2 + \frac{\epsilon_{x0}}{\beta_{x0}} R_{52}^2(s, \tau) + \\ \epsilon_{y0} \beta_{y0} \left(R_{53}(s, \tau) - \frac{\alpha_{y0}}{\beta_{y0}} R_{54}(s, \tau) \right)^2 + \frac{\epsilon_{y0}}{\beta_{y0}} R_{54}^2(s, \tau) + \\ \sigma_{\delta 0}^2 R_{56}^2(s, \tau) \end{bmatrix} \right\}$$

$$R_{5j}(s, \tau) = k(s) R_{5j}(s) - k(\tau) R_{5j}(\tau) = k_0 [C(s) R_{5j}(s) - C(\tau) R_{5j}(\tau)]$$

$$R_{56}(\tau \rightarrow s) = R_{56}(s) - R_{56}(\tau)$$

$$+ R_{51}(\tau) R_{52}(s) - R_{51}(s) R_{52}(\tau) + R_{53}(\tau) R_{54}(s) - R_{53}(s) R_{54}(\tau)$$

其中, $C(s) = \frac{1}{1+hR_{56}(s)}$ 为束团压缩因子 (bunch compression factor)。

注 以上是研究单次经过、单束团不稳定性的一种标准分析方式, 将束团分布量化为密度调制函数, 属于频域分析。阻抗函数通过对束团产生能量调制, 束团传输过程经历动量紧缩/纵向色散, 能量调制形成密度调制。当这种能量调制与密度调制形成正反馈, 束团将变得不稳定, 又称微束团不稳定性 (microbunching instability) 或自由电子激光不稳定性 (free electron laser instability)。

注 对推导细节感兴趣的读者，可参考 Z. Huang and K.-J. Kim, Formulas for coherent synchrotron radiation microbunching in a bunch compressor chicane, Phys. Rev. ST Accel. Beams **5**, 074401 (2002).
<https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.5.074401>

注 数值算例可参考 §13.4.1。 □

以上介绍的是初始密度调制在传输过程中，受到短程尾场等集体效应影响，形成能量调制，再通过动量紧缩效应，最终形成(可能放大)的密度调制。这个密度-能量调制变换在束团经过磁聚焦结构过程中为连续变换过程；当转换成密度调制后，在相空间仍存在能量调制，参考图 16.2。前面介绍了密度调制函数 $b(k; s)$ 应满足的积分方程，那么，能量调制函数如何定义，它满足的方程形式又是什么？

先思考一下，密度调制相空间分布怎么描述？对一初始未扰动的相空间分布函数 $\bar{f}_0(\mathbf{X}_0)$ ，经过密度调制后，扰动的相空间分布函数有

$$f_0(\mathbf{X}_0) = \frac{n_0 + \Delta n_0(z_0)}{(2\pi)^2 \sqrt{\det \Sigma_0}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{X}_0^T \Sigma_0^{-1} \mathbf{X}_0 \right\} = \bar{f}_0(\mathbf{X}_0) + \hat{f}_0(\mathbf{X}_0) \quad (16.27)$$

其中，当 $\Delta n(z_0) \propto \sin k z_0$ 或 $\cos k z_0$ 时，对应到傅里叶变换的基底函数。于是，扰动的部分可写成

$$\hat{f}_0^{(z)}(\mathbf{X}_0) = \frac{\Delta n_0}{(2\pi)^2 \sqrt{\det \Sigma_0}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{X}_0^T \Sigma_0^{-1} \mathbf{X}_0 \right\} = \left(\frac{\Delta n_0(z_0)}{n_0} \right) \bar{f}_0(\mathbf{X}_0) \quad (16.28)$$

这里为了清楚起见，我们在密度调制相空间分布函数加一上标 (z) ，表示调制发生在 z 维度。对如图 16.2 左下图的能量调制，思考一下，将发现可以通过下式描述其相空间分布

$$f_1^{(\delta, z)}(\mathbf{X}_0) = \Delta \delta(z_0) \cdot \left. \frac{\partial f_0}{\partial \Delta \delta} \right|_{\Delta \delta=0} = \frac{(\delta_0 - h z_0) \Delta \delta(z_0)}{\sigma_{\delta 0}^2} \bar{f}_0(\mathbf{X}_0) \quad (16.29)$$

其中， h 为能量啁啾。现在有了能量调制的相空间分布后，定义如下能量调制函数 (energy modulation)，

$$p(k; s) = \frac{1}{N} \int d\mathbf{X} e^{-ikz_s} (\delta_s - h z_s) f_1(\mathbf{X}; s) \quad (16.30)$$

其中， $k = 2\pi/\lambda$ 为调制波数，也是密度调制波数。既然有了能量调制函数的定义，依样画葫芦，其满足的积分方程也可以得到。此处略去推导，仅给出结果：

$$p[k(s); s] = p_0[k(s); s] + \int_0^s d\tau [M(\tau, s) - L(\tau, s)] b[k(\tau); \tau] \quad (16.31)$$

其中， p_0 为纯光学情况下，初始能量调制的影响。上式中，核函数有

$$\begin{aligned} M(\tau, s) &= \frac{I_b(\tau)}{\gamma I_A} \{ ik^2(s) \sigma_{\delta 0}^2 R_{56}(\tau \rightarrow s) U(s, \tau) \} \frac{4\pi}{Z_0} Z_{\parallel}(k; \tau) \{ \text{L.D.}; s, \tau \}, \\ L(\tau, s) &= \frac{I_b(\tau)}{\gamma I_A} \frac{4\pi}{Z_0} Z_{\parallel}(k; \tau) \{ \text{L.D.}; s, \tau \} \end{aligned} \quad (16.32)$$

一般情况下，主导项为 $L(\tau, s)$ 。

 **练习 16.1** 试推导能量调制应满足的积分方程。 ■

注 对多维度调制的影响感兴趣的读者，可参考 C.-Y. Tsai, Concatenated analyses of phase space microbunching in high brightness electron beam transport, Nucl. Instru. Methods A **940**, 462-474 (2019). <https://doi.org/10.1016/j.nima.2019.06.061>

朗道阻尼 (Landau damping) 的物理图像 在第13章与这一章的讨论中，一个专有名词“朗道阻尼”零星出现了几次。这里给出一个模糊的、定性的解释：首先，在加速器中，朗道阻尼效应发生在为数众多的粒子形成的束团中，每个粒子可视为一个谐振子。由于每个粒子与参考粒子存在一点点能量差异，因此，每个谐振子受到四极铁的横向聚焦/散焦或 RF 腔的纵向聚焦/散焦就有些微区别，于是每个粒子的横向 betatron 或纵向 synchrotron 振荡频率也稍有区别

$$\begin{aligned}\nu_{\beta} &\propto \sqrt{K} \propto \frac{1}{\sqrt{E_0}} \\ \nu_s &\propto \frac{1}{\sqrt{E_0}}\end{aligned}\quad (16.33)$$

同时，朗道阻尼效应发生在束团整体正在经历集体振荡的过程。换句话说，朗道阻尼效应发生在：束团整体经历集体振荡，因此有个集体振荡频率。同时，束团内每个粒子的振荡频率又稍有区别。因此，虽然束团整体看起来存在集体振荡频率，同时又不像集体，因为每个个别粒子的振荡频率有些差异。一个生动的比喻为：想像一群士兵经过一座桥，如果每个士兵踏步走的步调完全一致，则一群士兵无异于一个具有体重和的巨型士兵，在桥上走的每一步对桥体都是“沉重 (完全相干)”的碰撞，很容易使桥振幅过大而断裂。如果每个士兵错开踏步频次，则经过桥上时，对桥体的冲击将由于不那么一致的步调而分散，就可能免于桥体断裂。在这种情况下就有朗道阻尼效应，这里“稍有区别”的程度将决定朗道阻尼的强度。

另一种从不同视角看朗道阻尼效应，理想情况时束团整体有一个未受扰动的振荡频率，写成 ω 。束团里不同粒子 (视为不同振荡子) 的稍微不同的振荡频率形成非相干频散 (incoherent frequency spread)，写成 $\Delta\omega$ 。当束团受尾场、阻抗等导致集体振荡时，如果将束团整体的相干振荡频率写为 Ω ，则当满足以下条件时

$$|\Omega - \omega| < \Delta\omega \quad (16.34)$$

朗道阻尼效应能发挥有效抑制作用。当上式不满足时，朗道阻尼效应不再能有效抑制集体不稳定性，有时称朗道阻尼丢失 (loss of Landau damping, LLD)。当一束团亮度非常高时，意味着束团内的粒子彼此间的运动很一致，即 $\Delta\omega$ 很小，这时候可以说束团容易受到微小扰动后就产生集体不稳定性，也可以说，由于束团的 $\Delta\omega$ 很小，因此，朗道阻尼效应并不总是能发挥有效抑制集体不稳定性的能力。对不同分布形态的束团，表征不同的 $\Delta\omega$ ，意味着具有不同朗道阻尼能力，可参考附录 A.6。

束团能散 σ_{δ} 本身就是一个提供朗道阻尼效应的源，可直接用来抑制纵向集体效应。对横向集体效应，可以通过引入色品 ξ ，间接提供横向 betatron 振荡的频散 $\Delta\nu = \xi\delta$ 。如

“顾此失彼”：有的加速器抑制了纵向不稳定性之后，反而出现横向不稳定

果不通过色品，也可以通过增加纵向同步振荡振幅，使束团内不同粒子在相空间中经历不同振幅的振荡，就有不太一样的振荡频率，于是引入频散。直接增加横向 betatron 振荡振幅可能不容易，可通过横纵向 synchro-betatron 耦合 (synchro-betatron coupling) 效应，将纵向大振幅同步振荡效应转移到横向 betatron 振荡。

 **笔记** 朗道阻尼与第 8 章讨论的同步辐射阻尼不一样。同步辐射阻尼涉及电子由于同步辐射而损失能量，但是朗道阻尼 不涉及 束团整体的能量净损失。

 **笔记** 朗道阻尼效应最早由物理学家朗道 (L.D. Landau) 在 1946 年提出，当时考虑的对象不是粒子加速器，而是等离子体。随后，在 1955 年由 van Kampen 用更严谨的数学完善此理论。直到 1959 年，由 A. Sessler 首次引入到粒子加速器集体效应分析中。

此讲义将在此打住，不介绍更多“朗道阻尼”效应的具体细节。原因有二：

1. 不同专家的解释方式不太一样；有些细微处在这里未必能说清楚。例如：在加速器中，朗道阻尼效应与拍频 (beating) 导致的去相干 (decoherence) 效应的区别。有些文献认为两者为一回事，有些文献则认为两者为不同效应。
2. 目前加速器教科书对朗道阻尼效应的解释不只一种，且部分解释或许存在歧义或尚未定论。

目前只需要知道，在加速器束流动力学研究中，朗道阻尼效应大多数时候是一种“好”的效应，此效应是倾向于使束团整体稳定的机制。

关于朗道阻尼效应的物理解释，可参考以下文献：

- A.W. Chao, *Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators*, John Wiley & Sons (1993) 一书的 Chapter 5 (§5.1)
- H.G. Hereward, The elementary theory of Landau damping, CERN-65-20 (1965). <https://cds.cern.ch/record/276334/files/CERN-65-20.pdf>
- A. Hofmann, Landau damping, CERN Accelerator School. <https://cds.cern.ch/record/941315/files/p271.pdf>
- W. Herr, Introduction to Landau Damping, CAS-CERN Accelerator School. <https://cds.cern.ch/record/1982428/files/377-404%20Herr.pdf>

16.2.3 四弯铁磁压缩结构的微束团不稳定性

图 16.3 的四弯铁磁聚焦结构为电子加速器中常见的插入节。如果束团没有能量啁啾，则称旁路传输 (bypass transport)。当束团存在能量啁啾，且将此磁聚焦结构用来压缩束团时，称磁压缩器 (bunch compressor) 或称 chicane。

 **笔记** 关于磁压缩器的更多介绍，可参考 Handbook 的 §4.5。

在直线加速器中，相干同步辐射导致的微束团不稳定性最可能出现在四弯铁磁压缩结构 (four-dipole chicane)，因为经过 chicane 之后，压缩后的束团峰值电流可能高达 $\sim \text{kA}$ ，容易产生足够强度的相干同步辐射。因此，分析四弯铁磁压缩结构的微束团不稳定性成为重要课题。以下介绍在 chicane 磁聚焦传输结构为已知前提下，以上积分方程的解。很幸运地，对此种相对简单的磁聚焦传输结构，积分方程存在解析解。

四弯铁磁压缩结构示意图如图 16.3 所示。以下将先求解负责单粒子轨迹运动的几个光学函数，再继续求解积分方程的密度调制函数。

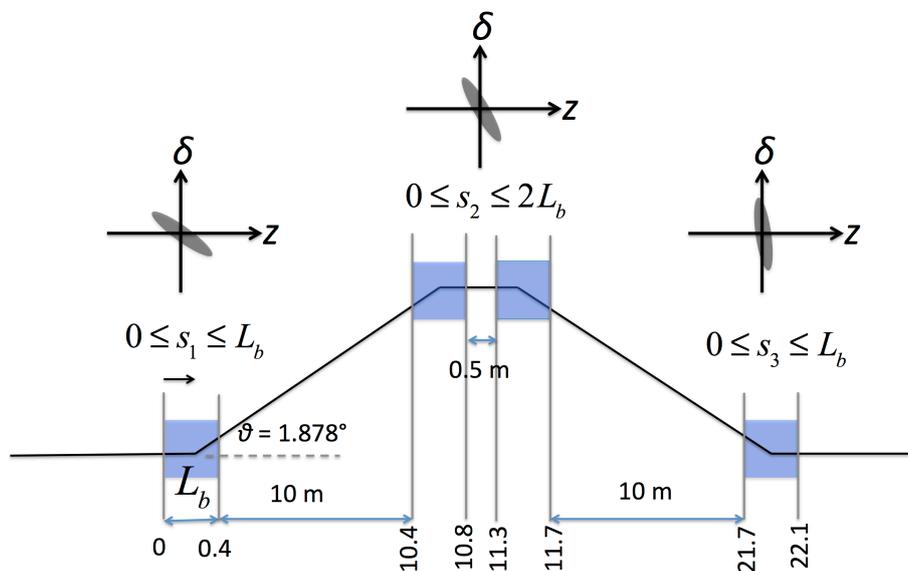


图 16.3: 四弯铁磁压缩结构示意图。图中给出四块弯铁的参数，包含长度、弯转角度、坐标位置 (以 m 为单位) 等。四块弯铁长度完全一样，其参数大致基于 LCLS BC2，参考表 16.1。图中还给出在经历磁压缩结构时，束团的纵向相空间分布随不同位置改变的过程。由于 chicane 的 R_{56} 为正，因此要求初始能量啁啾为负，才能达到束团压缩。

由图 16.4 可以看出，与“纵向”相关的传输矩阵函数 R_{5j} 仅在弯铁内改变。求解负责

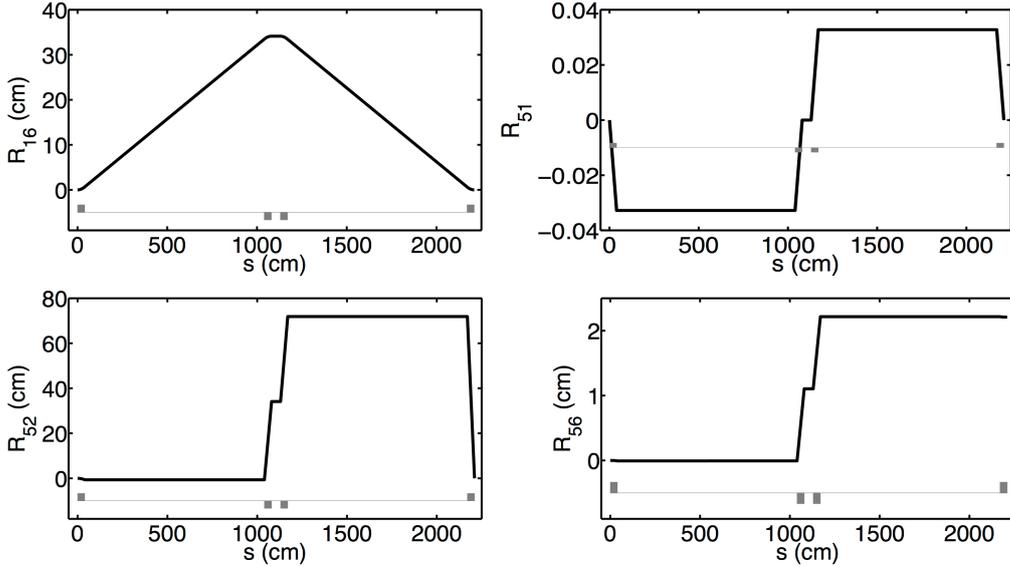


图 16.4: 四弯铁磁压缩结构的几个线性传输矩阵函数。横轴上的灰色方块表征弯铁所在位置。

单粒子轨迹运动的几个光学函数，有¹⁶

$$\begin{aligned}
 R_{51}(s_1) &= -\frac{s_1}{\rho_0}, & R_{52}(s_1) &= -\frac{s_1^2}{2\rho_0}, & R_{56}(s_1) &= -\frac{s_1^3}{6\rho_0^2}, \\
 R_{51}(s_2) &= -\frac{L_b - s_2}{\rho_0}, & R_{52}(s_2) &\approx \frac{\Delta L s_2}{\rho_0}, & R_{56}(s_2) &\approx \frac{\Delta L L_b}{\rho_0^2} s_2, \\
 R_{51}(s_3) &= \frac{L_b - s_3}{\rho_0}, & R_{52}(s_3) &\approx -\frac{2\Delta L (s_3 - L_b)}{\rho_0}, & R_{56}(s_3) &\approx \frac{2\Delta L L_b^2}{\rho_0^2} \equiv R_{56}, \quad (16.35) \\
 R_{56}(s_1 \rightarrow s_2) &\approx \frac{\Delta L}{\rho_0^2} (L_b - s_1) s_2, & R_{56}(s_2 \rightarrow s_3) &\approx \frac{\Delta L}{\rho_0^2} (2L_b - s_2) s_3, \\
 R_{56}(s_1 \rightarrow s_3) &\approx \frac{2\Delta L}{\rho_0^2} [(L_b - s_1) L_b + s_1 s_3]
 \end{aligned}$$

其中， $\rho_0 > 0$ 为弯转半径， L_b 为二极铁长度， ΔL 为第一块与第二块 (中间) 弯铁距离，也是第二块 (中间) 弯铁与最后一块弯铁距离。



笔记 眼尖的读者也许发现上面虽名为四弯铁磁压缩结构，但其实分析时已将中间两块弯铁“粘”在一起，所以整体可视为近似的“三”弯铁磁压缩结构。



练习 16.2 试着根据上面介绍的定义推导以上传输矩阵函数。 ■



练习 16.3 维持纵向一维分析，当考虑高阶非线性效应时，仅有 R_{56} 不够。此时，压缩前后束长改变可写成

$$\Delta z = z(s_2) - z(s_0) = R_{56}\delta_0 + T_{566}\delta_0^2 + U_{5666}\delta_0^3 + \dots \quad (16.36)$$

¹⁶留意，原始论文 Z. Huang and K.-J. Kim, Formulas for coherent synchrotron radiation microbunching in a bunch compressor chicane, Phys. Rev. ST Accel. Beams **5**, 074401 (2002) 的 Eq. (30) 有些正负号与此处结果有些差异，这是因为对束团头部粒子与尾部粒子的定义及能量啁啾符号定义有关。按此讲义定义与所采用的惯例，此处结果已经验证为正确。

其中, T_{566} 表征二阶效应, U_{5666} 表征三阶效应。对四块弯铁组成的磁压缩器, 有

$$\begin{aligned} T_{566} &= -\frac{3}{2}R_{56} \\ U_{5666} &= +2R_{56} \end{aligned} \quad (16.37)$$

■

零阶解准备就绪后, 现在考查如下积分方程

$$b[k(s); s] = b_0[k(s); s] + \int_0^s d\tau K(\tau, s)b[k(\tau); \tau] \quad (16.38)$$

先不纠结看似复杂的核函数, 仅看此积分方程的形式。如果核函数在被积分函数里的贡献不是太大的话, 那么此方程可通过迭代法求解。思路如下:

1. 当 $K \rightarrow 0$ 时, “纯光学”解即最终解, 即零阶迭代解有

$$b_{[0]}(k; s) = b_0(k; s) \quad (16.39)$$

2. 但是, $K \neq 0$, 因此一阶迭代解为

$$b_{[1]}(k; s) = b_0(k; s) + \int_0^s d\tau K(\tau, s)b_{[0]}(k(\tau); \tau) \quad (16.40)$$

3. 后见之明¹⁷, 对多弯铁结构, 一阶迭代解不够, 因此有二阶迭代解

$$\begin{aligned} b_{[2]}(k; s) &= b_0(k; s) + \int_0^s d\tau K(\tau, s)b_{[1]}(k(\tau); \tau) \\ &= b_0(k; s) + \int_0^s d\tau K(\tau, s)b_{[0]}(k(\tau); \tau) \\ &\quad + \int_0^s d\tau K(\tau, s) \left\{ \int_0^\tau dt K(t, s)b_{[0]}(k(t); t) \right\} \end{aligned} \quad (16.41)$$

4. 当仅考虑稳态 CSR 尾场或阻抗时, 核函数只在弯铁内有非零值, 上面迭代解里的积分存在解析解。单位长度、一维、稳态 CSR 阻抗有

$$Z_{\text{CSR}}^{\text{s.s.UR}}(k(s); s) = -\frac{iZ_0 k^{1/3}(s)A}{4\pi|\rho_x(s)|^{2/3}} \quad (16.42)$$

其中, $A \approx -0.94 + 1.63i$, $\rho_x(s)$ 为在 s 处的弯转半径。

好, 现在根据以上思路, 迭代解里的几个积分式可以继续化简, $\int_0^s d\tau$ 的积分变成只在三个弯铁内的积分 $\int_0^{L_b} ds_1$ 或 $\int_0^{2L_b} ds_2$ 。在磁压缩结构出口处, 有

$$\begin{aligned} b_{[2]}(k; s_f) &= b_0(k; s_f) \\ &\quad + \int_0^{L_b} ds_1 K(s_1, s_f)b_{[0]}(k(s_1); s_1) + \int_0^{2L_b} ds_2 K(s_2, s_f)b_{[0]}(k(s_2); s_2) \end{aligned} \quad (16.43)$$

$$+ \int_0^{2L_b} ds_2 K(s_2, s_f) \left\{ \int_0^{L_b} ds_1 K(s_1, s_2)b_{[0]}(k(s_1); s_1) \right\} \quad (16.44)$$

¹⁷对“三”弯铁磁压缩结构, 迭代到二阶恰恰好。其物理图像为: 第一个弯铁的 CSR 场对电子产生能量调制, 转变为第二个弯铁的密度调制; 第二个弯铁的 CSR 场对电子再产生能量调制 (包含来自第一个弯铁产生的已被放大的密度调制与电子束在第二个弯铁的新鲜的未被放大的密度调制), 转变为第三个弯铁的密度调制。对越多弯铁, 就要迭代到越高阶。更多讨论可参考 C.-Y. Tsai, An alternative view of coherent synchrotron radiation induced microbunching development in multibend recirculation arcs, Nucl. Instru. Methods A **943**, 162499 (2019). <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168900219310423>

多级放大的物理图像如图 16.5 所示。

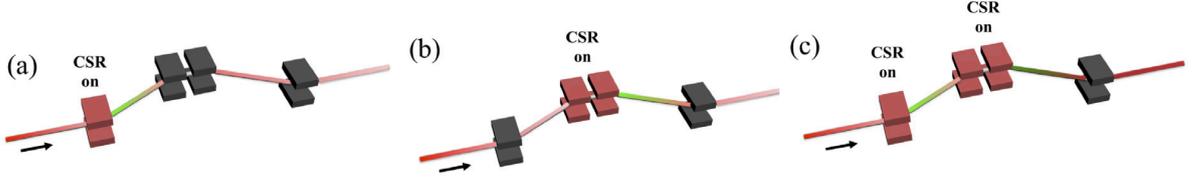


图 16.5: 一维、稳态 CSR 阻抗引起的微束团不稳定性多级放大机制。(a) 对应到上式积分的第二项；(b) 对应到上式积分的第三项；(c) 对应到上式积分的第四项。上式第一项为“纯光学”贡献。对高电流或高增益情况，(c) 为主要贡献。

将以上传输矩阵元素的解析表示式代入以上几个积分式，考虑一维、稳态 CSR 阻抗，最终的增益函数或增益频谱有如下总结的解析公式：

定理 16.2. 四弯铁磁压缩结构的解析公式

仅考虑一维、稳态 CSR 尾场或阻抗时，当电子束经过 chicane 磁压缩结构，在出口处的微束团增益频谱可写成

$$G_f(\lambda = 2\pi/k) \approx \left| \tilde{G}_0 + \tilde{G}_1 I_{b,f} + \tilde{G}_2 I_{b,f}^2 \right| \quad (16.45)$$

其中， $I_{b,f} = C(s_f)I_{b,0}$ 为束团在 chicane 出口处的峰值电流，

$$\tilde{G}_0 = \exp \left[-\frac{\bar{\sigma}_\delta^2}{2(1-hR_{56})^2} \right] \quad (16.46)$$

其中， $\bar{\sigma}_\delta = k_0 R_{56} \sigma_{\delta 0}$ ， $k_0 = k(s=0)$ 为初始调制波数

$$\tilde{G}_1 = \frac{Z_0 A k_0^{4/3} R_{56} L_b}{4\pi\gamma_0 I_A \rho_x^{2/3}} \times \left[\left(F_0(\bar{\sigma}_x) + \frac{1-e^{-\bar{\sigma}_x^2}}{2\bar{\sigma}_x^2} \right) e^{-\bar{\sigma}_\delta^2/2(1-hR_{56})^2} + F_1(hR_{56}, \bar{\sigma}_x, \alpha_{x0}, \phi, \bar{\sigma}_\delta) \right] \quad (16.47)$$

其中， $\bar{\sigma}_x = k_0 L_b \sqrt{\epsilon_{x0} \beta_{x0}} / \rho_{x0}$ ， $\phi = \rho_x^2 R_{56} / \beta_{x0} L_b^2$ ，且

$$\tilde{G}_2 = \left(\frac{Z_0 A k_0^{4/3} R_{56} L_b}{4\pi\gamma_0 I_A \rho_x^{2/3}} \right)^2 F_0(\bar{\sigma}_x) F_2(hR_{56}, \bar{\sigma}_x, \alpha_{x0}, \phi, \bar{\sigma}_\delta) \quad (16.48)$$

$$F_0 = \frac{e^{-\bar{\sigma}_x^2} + \bar{\sigma}_x \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\bar{\sigma}_x) - 1}{2\bar{\sigma}_x^2}, \quad \operatorname{erf}(\zeta) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\zeta dt e^{-t^2} \quad (16.49)$$

其中，

$$F_1 = 2 \int_0^1 dt \frac{(1-t)H(t)}{(1-hR_{56}t)^{4/3}}, \quad F_2 = 2 \int_0^1 dt \frac{(1-t)t(1-hR_{56}t)H(t)}{(1-hR_{56}t)^{7/3}} \quad (16.50)$$

$$H(t) = \exp \left\{ -\frac{\bar{\sigma}_x^2 (1-2t + \alpha_{x0} \phi t)^2 + \phi^2 t^2}{(1-hR_{56}t)^2} - \frac{\bar{\sigma}_\delta^2}{2(1-hR_{56}t)^2} \left[t^2 + \frac{(1-t)^2}{(1-hR_{56})^2} \right] \right\} \quad (16.51)$$

证明 对推导细节感兴趣的读者，可参考 Z. Huang and K.-J. Kim, Formulas for coherent

synchrotron radiation microbunching in a bunch compressor chicane, Phys. Rev. ST Accel. Beams **5**, 074401 (2002). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.5.074401> □

🔥 **练习 16.4** 类似如上思路，推导束团经历以下磁聚焦结构的微束团增益频谱公式：

- S-type chicane: 至少需要考虑四块弯铁
- dogleg
- DBA
- TBA

■

🔥 **练习 16.5** 重复以上推导，考虑磁聚焦结构传输段允许存在四极铁的情况对微束团增益函数的影响。 ■

作为四弯铁磁压缩结构的微束团不稳定性实例，以下给出基于 LCLS BC2 的计算结果。初始电子束团参数与 chicane 参数如表 16.1 总结。

表 16.1: LCLS BC2 的初始模拟参数。

参数名称	数值	单位
参考能量	4.54	GeV
峰值电流 [压缩前, 压缩后]	480, 4000	A
初始 beta 函数 (β_{x0}, β_{y0})	105, 22	m
初始 alpha 函数 (α_{x0}, α_{y0})	5, 0	
初始能量啁啾	-39.83	m^{-1}
矩形磁铁弯转半径 ρ_x	12.2	m
磁压缩器总长度	22.1	m
非相干能散 (方均根)	3×10^{-6}	
横向归一化发射度	1	μm
压缩因子	8.32	

图 16.6 分别利用积分方程与粒子跟踪模拟程序计算在 chicane 不同位置的增益函数，两者结果一致。参考图 16.4，可以看到，由于 chicane 中间两块弯铁处在横向色散段，束团中能量偏差 δ 的粒子将通过 R_{16}, R_{26} 导致横向尺寸 $|\langle \Delta x^2 \rangle|$ 或横向角散 $|\langle \Delta x'^2 \rangle|$ 增加，从而增加横向朗道阻尼效应，抑制增益函数。同样参考图 16.4，也可以解释为在中间两块弯铁处， R_{51}, R_{52} 的改变，结合有限束团横向尺寸 $\sigma_x, \sigma_{x'}$ ，使束团纵向 z 坐标“散开”，导致密度调制或群聚因子在第三个弯铁减小。最终在 chicane 出口处，由于横向消色散，前述的效应消失，于是密度调制或群聚因子又“恢复”。但是，这时候比起入口处设定的 $G = 1$ ，在出口处明显增加些。这是由于在四块弯铁里 CSR 产生的能量调制与传输过程

R_{56} 导致密度调制，彼此间形成正向反馈导致，即微束团不稳定性。

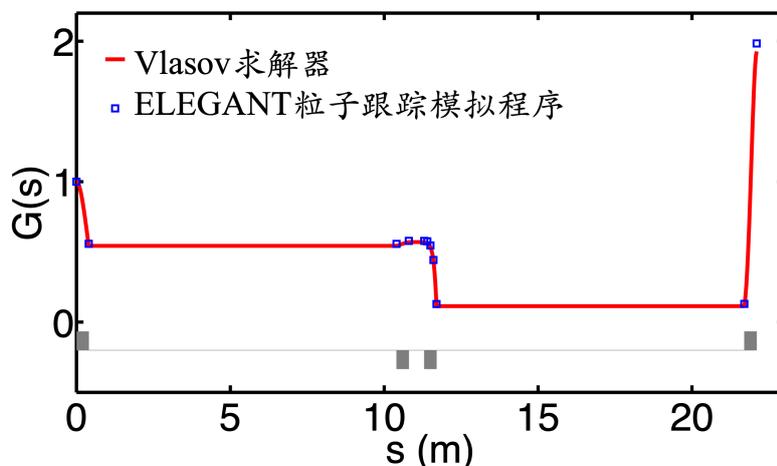


图 16.6: 一维、稳态 CSR 阻抗引起的微束团不稳定性增益函数随 chicane 的演化过程。此处假设初始调制波长 $\lambda = 20 \mu\text{m}$ 。其余参数按表 16.1。

图 16.7 给出对不同初始调制波长情况，微束团不稳定性增益频谱的样貌。可以看到，在初始调制波长 $\lambda \approx 20 \mu\text{m}$ 附近，会导致最终在 chicane 出口处有最大的增益 $G_{f,\text{max}} \approx 2$ 。这表示，对初始未聚束电子束，如果粒子的散粒噪声包含各种波长，则最终最容易被放大的将是 $\lambda \approx 20 \mu\text{m}$ 的波长成分。这种“选择”是由于 CSR 阻抗本身特性与磁聚焦结构特性合在一起导致的结果。

回忆一下，在积分方程中，核函数 $K(\tau, s)$ 决定该方程的解最终是否增长或衰减，对不同调制波长，即不同 k ，核函数 $K(\tau, s)$ 有不同取值，即

$$K(\tau, s) = ik(s) \frac{I_b(\tau)}{\gamma I_A} \frac{4\pi}{Z_0} R_{56}(\tau \rightarrow s) Z_{\parallel}(k; \tau) \{ \text{L.D.}; s, \tau \} \propto k^{1/3}(s) e^{-k^2(s)} \quad (16.52)$$

由此可以看出，当调制波长很短时， k 很大，朗道阻尼效应明显，磁聚焦结构的 R_{5j} 很容易就把电子束内 z 方向调制波长很短的微结构“洗”掉，对应到 $e^{-k^2(s)} \rightarrow 0$ 。当调制波长较长时， k 很小，朗道阻尼效应可以忽略不计， $e^{-k^2(s)} \rightarrow 1$ ，因此增益频谱的长波长 $G \propto k^{1/3}$ 段将逐渐减小。注意到，1/3 次方关系是由于 CSR 阻抗特性造成，如果不是 CSR 阻抗而是其它宽带阻抗，则未必遵从 1/3 次方关系。当调制波长不幸落在“三不管”地带时，既没有足够的朗道阻尼效应，CSR 阻抗的贡献也还不到能被忽略的程度，此时增益值最大，束团微结构在“三不管”地带被最大程度放大。

注 能不能解释为什么在 $\lambda \approx 10 \mu\text{m}$ 附近有个局部平坦区域？

作为参考，图 16.8 更全面地展示微束团不稳定性增益体现在时域 s 与频域 λ 的样貌。

结束此小节前，值得说明一下，单纯由于 chicane 中四弯铁的 CSR 阻抗导致的微束团不稳定性对束团的影响并不严重，充其量，其最大增益大约 $G_{f,\text{max}} \approx 2$ 。在 chicane 上

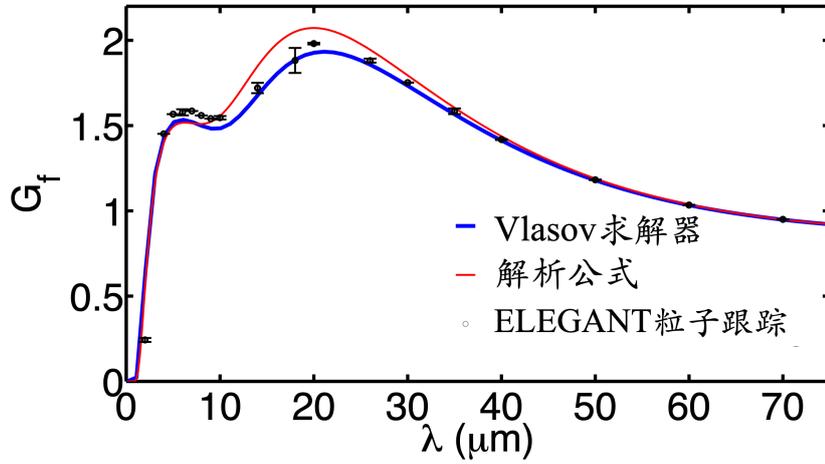


图 16.7: 一维、稳态 CSR 阻抗引起的微束团不稳定性增益频谱随不同初始波长的依赖关系。参数按表 16.1。

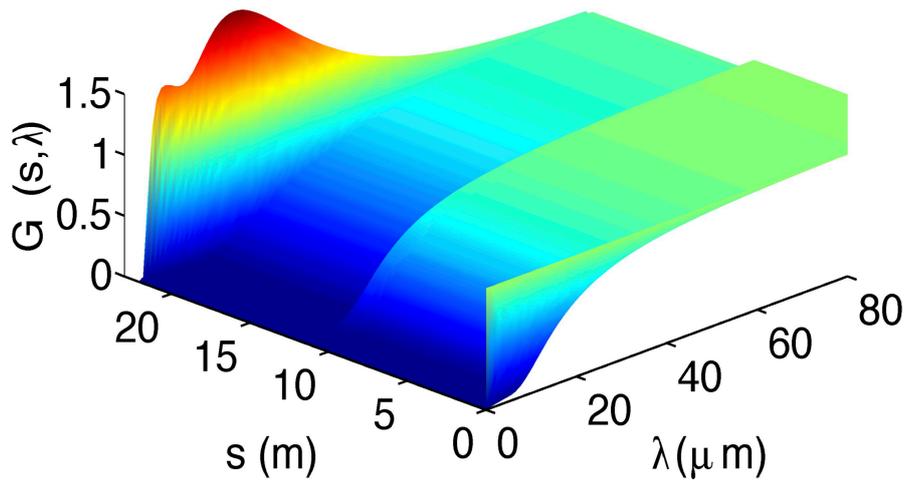


图 16.8: 结合图 16.6 的增益函数与 16.7 的增益频谱随的二维呈现。

游一般是很长(如:几百米)的传输段,可能包含直线加速腔。一般来说,现在比较关心的是电子束在 chicane 上游可能积累了能量调制。参考 §11.7.2 列表,这些能量调制的来源众多,比如:上游直线加速腔中的短程尾场 (linac wakefield)、纵向空间电荷场 (longitudinal space charge, LSC) 等。以一维空间电荷尾场或阻抗为例,在上游 L 长的传输段中,积累的能量调制可以写成¹⁸

$$\Delta\gamma(k_i) = -\frac{I_0 b_0(k_i)}{I_A} \int_0^L ds \frac{4\pi Z_{\text{LSC}}(k_i; s)}{Z_0} \quad (16.53)$$

其中, k_i 表示初始调制波数, $b_0(k_i)$ 为初始密度调制,假设此过程不存在束团压缩。当这些积累的能量调制的电子束即将经过 chicane 时,其动量紧缩因子 R_{56} 将可能导致一场“噩梦”,因为有可能把这些积累的能量调制转换为密度调制,于是形成微束团不稳定性!这个过程的增益频谱可以写为如下公式

$$G \approx \frac{I_0}{\gamma I_A} \left| k_f R_{56} \int_0^L ds \frac{4\pi Z_{\text{LSC}}(k_i; s)}{Z_0} \right| \exp\left(-\frac{k_f^2 R_{56}^2 \sigma_E^2 / E^2}{2}\right) \quad (16.54)$$

其中, $k_f = k_i C(s_f)$ 为束团经过 chicane 后被压缩的调制波数。单位长度 LSC 阻抗在第11章的 §11.7.1 给出。



笔记 尽管没有经过严谨推导,上式仍多被应用于估算纵向空间电荷导致的微束团不稳定性的许多场合。

尽管此讲义没有具体介绍利用粒子跟踪模拟分析束流动力学的专题,下图 16.9 给出了基于真实电子直线加速器参数 LCLS 的粒子跟踪模拟结果与实验上实际量测到的束团相空间分布结果的比较,可以看到,两者高度一致。

16.2.4 研究现状总论

目前对单次经过加速器微束团不稳定性的研究多半集中在直线加速器驱动的自由电子激光装置,对能量循环加速器或能量回收加速器相对较少。从工程上看,目前国际上开展的加速器大装置项目多为直线加速器驱动的自由电子激光装置,而能量循环加速器或能量回收加速器相对较少。但是,从物理上看,后者的课题相对丰富,也更具挑战性。

如上一小节介绍,目前来说,基于直线加速器磁聚焦结构传输段,如:四弯铁磁压缩结构 (chicane) 或是下游用来分配电子束驱动不同高增益自由电子激光的分束器 (spreader),可能遭遇的微束团不稳定性机制已经被研究地较清楚。因此,抑制纵向微束团不稳定性的方案也就相对成熟,整理如下表 16.2:

几种方案对应的代表性文献整理如下:

¹⁸Z. Huang et al., Suppression of microbunching instability in the linac coherent light source, Phys. Rev. ST Accel. Beams 7, 074401 (2004). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.7.074401>

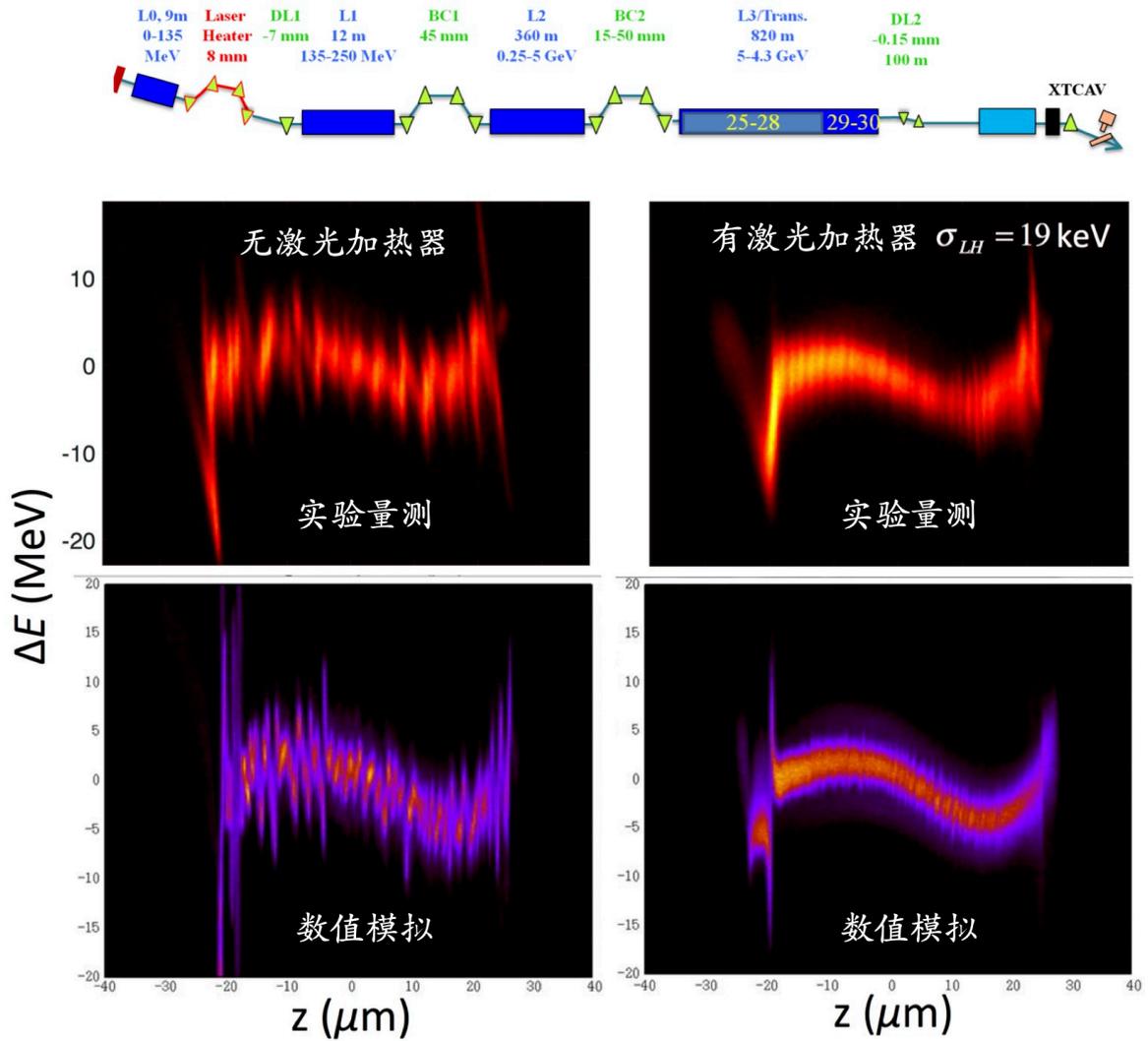


图 16.9: 基于 LCLS 从头到尾 (start-to-end) 模拟与实验量测结果对比。左排为没有激光加热器情况, 在 XTCAV 处的纵向相空间分布; 右排为考虑激光加热器情况, 在 XTCAV 处的纵向相空间分布。可以看到, 模拟与实验量测结果两者高度一致。图例取自 J. Qiang et al., Phys. Rev. Accel. Beams **20**, 054402 (2017). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevAccelBeams.20.054402>。

表 16.2: 几种用来抑制或缓解 CSR 或 LSC 导致的纵向微束团不稳定性方案。

维度	抑制方案	备注
纵向	A) Laser heating (Saldin <i>et al.</i> , Huang <i>et al.</i>)	通过增加投影能散 σ_δ 增强朗道阻尼效应
	B) Magnetic mixing chicane (Di Mitri <i>et al.</i>)	
	C) Reversible electron beam heating (Behrens <i>et al.</i>)	
	D) Insertion of dipole pair in an accelerator system (Qiang <i>et al.</i>)	通过 R_{51}, R_{52} 增加投影 ϵ_{x0} 增强朗道阻尼效应
	E) Optical balance (Douglas <i>et al.</i> , Tsai <i>et al.</i>)	局域等时性磁聚焦传输结构 small R_{56}
	F) Transverse gradient undulator (Feng <i>et al.</i>)	利用横向束团角散 $\sigma_{x'}$ 耦合到纵向 z

- A1) E.L. Saldin, E.A. Schneidmiller, and M.V. Yurkov, Longitudinal space charge-driven microbunching instability in the TESLA Test Facility linac, Nucl. Instru. Methods A **528**, 355-359 (2004). <https://doi.org/10.1016/j.nima.2004.04.067>
- A2) Z. Huang et al., Suppression of microbunching instability in the linac coherent light source, Phys. Rev. ST Accel. Beams **7**, 074401 (2004). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.7.074401>

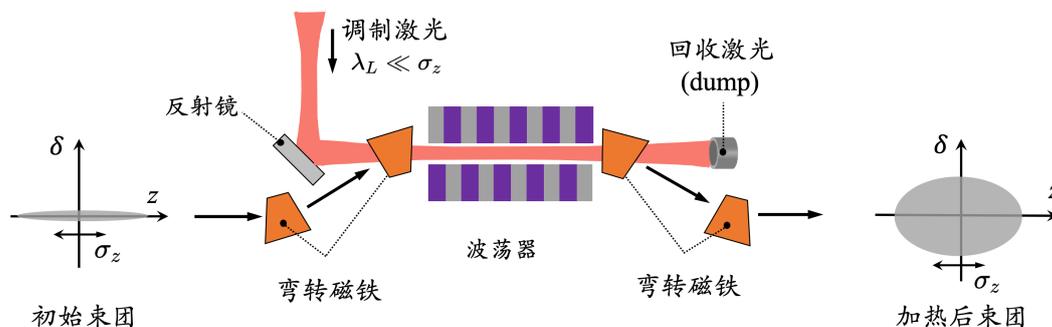


图 16.10: 激光加热器 (laser heater) 示意图。一般放在电子束低能段, 为了使电子束与激光能更有效作用, 让两者在波荡器中并行前进, 在波荡器出口处, 电子束获得激光的能量调制, 因此有效能散增加, 从而增加朗道阻尼效应。

 **笔记** 激光加热器会增加束团的等效能散, 对高增益 FEL 谐波产生方案不利。因为谐波产生方案一般要求束团的切片能散尽可能小。

- B) S. Di Mitri and S. Spampinati, Microbunching Instability Suppression via Electron-Magnetic-Phase Mixing, Phys. Rev. Lett. **112**, 134802 (2014). <https://journals.aps.org/prl/pdf/10.1103/PhysRevLett.112.134802>
- C) C. Behrens, Z. Huang, and D. Xiang, Reversible electron beam heating for suppression of microbunching instabilities at free-electron lasers, Phys. Rev. ST Accel. Beams **15**, 022802 (2012). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.15.022802>
- D) J. Qiang, C.E. Mitchell, and M. Venturini, Suppression of Microbunching Instability Using Bending Magnets in Free-Electron-Laser Linacs, Phys. Rev. Lett. **111**, 054801 (2013). <https://journals.aps.org/prl/pdf/10.1103/PhysRevLett.111.054801>
- E1) D. Douglas et al., Control of coherent synchrotron radiation and microbunching effects during transport of high brightness electron beams, arXiv: 1403.2318v1. <https://arxiv.org/abs/1403.2318>
- E2) C.-Y. Tsai et al., Conditions for coherent-synchrotron-radiation-induced microbunching suppression in multibend beam transport or recirculation arcs, Phys. Rev. Accel. Beams **20**, 024401 (2017). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevAccelBeams.20.024401>
- F) C. Feng et al., Suppression of microbunching instability via a transverse gradient undulator, New J. Phys. **17**, 073028 (2015). <https://iopscience.iop.org/article/10.>

1088/1367-2630/17/7/073028/pdf

以下简要总结几个可能的研究面向：

- 上面提到的抑制微束团不稳定性方案适用于直线加速器，但是对能量循环加速器或能量回收加速器，目前以上方案仅 E1)、E2) 实际可行。是否还有其它尚未发掘，但适用于能量循环加速器或能量回收加速器的抑制微束团不稳定性方案，值得琢磨。

定理 16.3. 抑制一般多弯铁磁聚焦结构微束团不稳定性充分条件

可大致总结为如下条件：

- 在弯转磁铁中，Courant-Snyder β_x 函数应保持较小值，即直线段有较强的聚焦磁场；
- 在弯转磁铁中，Courant-Snyder α_x 函数应避免接近零，即 β_x 函数在弯转磁铁中应随 s 改变；
- 任意相邻两块弯转磁铁间，betatron 相位超前 $\psi(\tau \rightarrow s)$ 接近 π 或其整数倍。

以上条件适用于多弯铁周期性或非周期性消色散等时性磁聚焦结构。当应用到非零色散段或非等时性磁聚焦结构时，最后一个条件可适当放宽。

注 原则上，思路为尽量最小化以下参数

$$\xi = \left| \max \{R_{56}^{\tau \rightarrow s}\} \frac{k_0^{1/3}}{\rho^{2/3}} \Delta L \right| \quad (16.55)$$

其中， τ 为 lattice 中粒子产生 CSR 位置， s 为束团感受 CSR 场位置。更多讨论可参考 E2)。

注 此处总结的条件与抑制或消除 CSR 导致的投影发射度增加的条件是否一致，值得琢磨。

- 上面介绍的密度调制函数 $b(k; s)$ 遵循的积分方程

$$b[k(s); s] = b_0[k(s); s] + \int_0^s d\tau K(\tau, s) b[k(\tau); \tau]$$

要求磁聚焦结构传输段的线性光学函数为已知。对于仍在设计阶段，如尚未有完整的磁聚焦结构传输段的设计参数，是否能够发展一套简化的理论模型，从 s -dependent model 至 element-by-element model，提供设计时的理论指导，将是重要且具有现实意义的课题。

- 目前的微束团不稳定性理论假设磁聚焦传输结构为横向非耦合情况 (transverse uncoupled lattice)，对于横向耦合的磁聚焦传输结构，采用矩阵对角化思路，以上理论模型可以推广。可参考 C.-Y. Tsai et al., Vlasov analysis of microbunching instability for magnetized beams, Phys. Rev. Accel. Beams **20**, 054401 (2017). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevAccelBeams.20.054401>。仍可

再推广至考虑磁聚焦传输结构为横纵向全耦合情况，如：发射度交换磁聚焦传输结构 (emittance exchange beamline)。

⇒ 横向耦合的束团又称磁化束 (magnetized beam) 或涡旋束 (vortex beam)，在 §14.3.4 介绍过。

- 目前基于积分方程的微束团动力学理论为单频理论，并假设了初始束团的 z 分布为平顶分布，因此调制波数 $k = 2\pi/\lambda$ 彼此之间互不影响。但从粒子跟踪模拟显示，当电子束经过直线加速器后，正弦形式的 RF 场不可避免地导致下游的非线性束团压缩。虽然在上游直线加速段未必显现，即使初始调制波长为单一波长，到了下游磁压缩段或弯转段时，RF 场的非线性特性将导致在束团内形成不同调制波长，如图 16.11。因此，如何推广既有理论模型，将是重要且具有现实意义的课题。

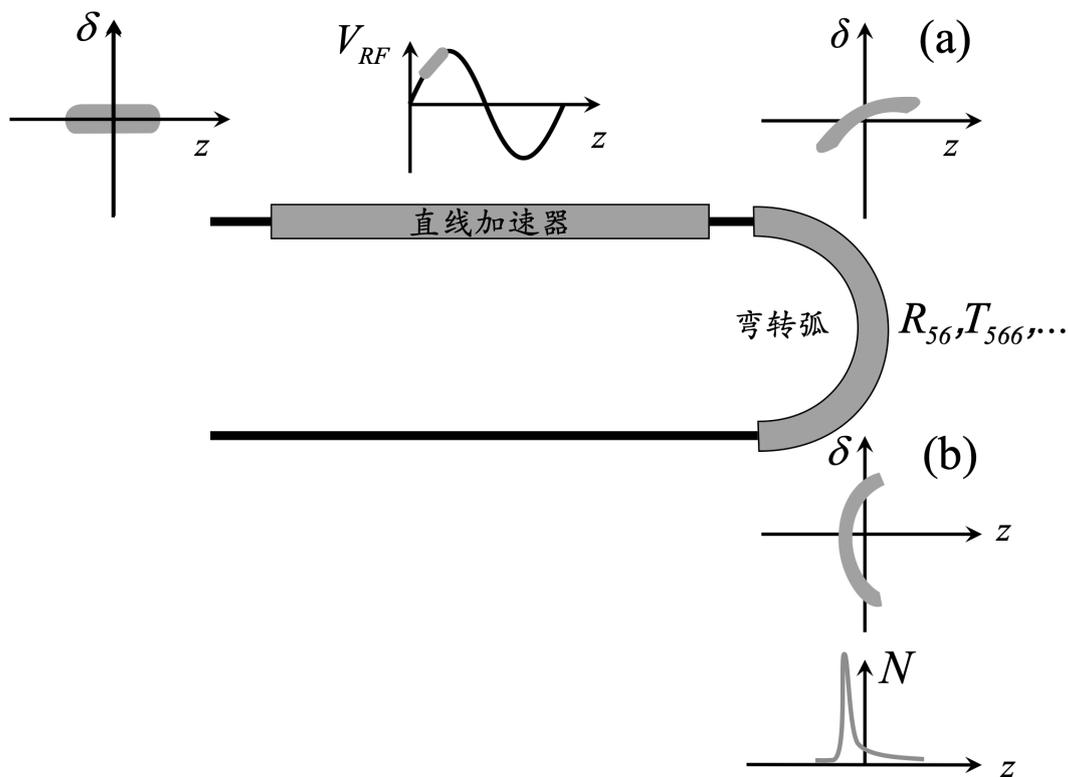


图 16.11: 束团经历单次经过直线加速器加速腔后，其纵向相空间分布演变。(a) 为直线加速器出口处，由于正弦形式 RF 场，束团分布产生非线性啁啾；(b) 为经历 180° 弯转弧之后的纵向相空间分布。图中所画仅是“纯光学”情况，当考虑 CSR 后，束团分布形态可能改变。

- 由于电子微束团能够更容易产生相干辐射，因此，目前许多高增益自由电子激光装置的前端常设法产生足够好的电子微束团，用来缩短后端的波荡器长度，以降低设计成本。目前产生的电子微束团多为 z 方向的密度调制，部分潜在应用为产生螺旋状微束团调制，称螺旋微束团 (vortex microbunching 或 helical microbunching)，如图 16.12。目前提出的方案多数为计算螺旋微束团的相干辐射功率谱，均未考虑微束团不稳定性的影响，故无法评估其实际可行性。
- 承上，还可以推而广之，考虑一般六维相空间的微束团动力学，定义广义调制函数

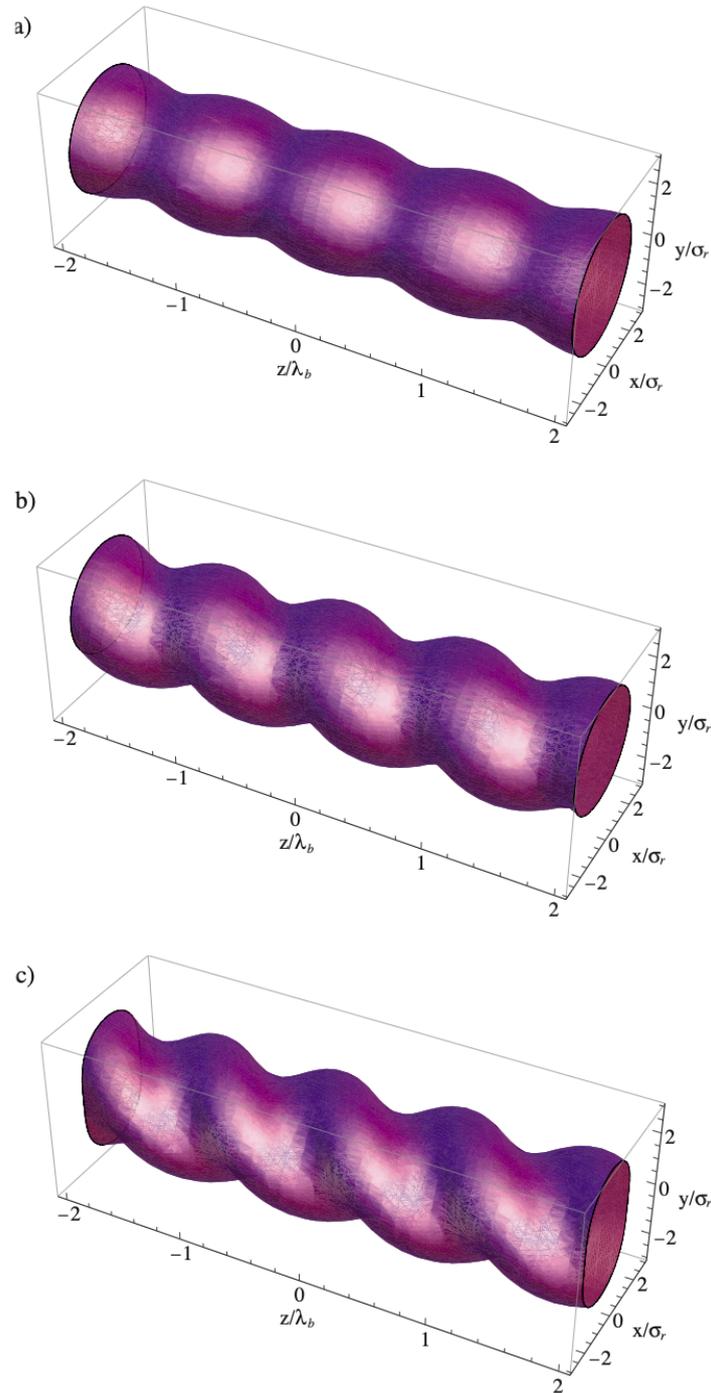


图 16.12: 螺旋微束团实空间密度调制分布样貌, 其中, (a,b,c) 有不同的横向角向指标 (azimuthal index) l , 图 (a) 的角向指标为 $l = 0$, 图 (b) 的 $l = -1$, 图 (c) 的 $l = -2$ 。束团横向分布 $f_{\perp} \propto e^{-il\phi}$ 。这里演示的三种情况的群聚因子皆为 0.4。图例取自 E. Hemsing and J.B. Rosenzweig, Coherent transition radiation from a helically microbunched electron beam, J. App. Phys. **105**, 093101 (2009). <https://doi.org/10.1063/1.3121207>

如下

$$f_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}, s) = \int f(\zeta, s) e^{-i\mathbf{k}^T \zeta} d^6 \zeta \quad (16.56)$$

其中, $\zeta = [x \ x' \ y \ y' \ z \ \delta]^T$ 。当 $\mathbf{k} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ k_z \ 0]^T$ 时, 上面定义退化为熟悉的密度调制函数。目前有在“纯光学”情况下, 对六维相空间的微束团动力学的一般理论, 但同上, 目前未考虑短程尾场导致的微束团不稳定性影响。

- 上面的介绍仅考虑了弯转段的 CSR 场导致微束团不稳定。在波荡器中, 微束团不稳定性即第 10 章介绍的自由电子激光不稳定性。但是, 两种理论框架看似存在差异, 如果调解这两个模型, 给出自洽的分析, 将是一个有趣的课题。
- 目前的微束团不稳定理论为线性理论, 即基于线性 Vlasov 方程得到。当此不稳定性严重时, 调制振幅增加, 很快将饱和。此时线性理论不再适用, 估算的线性增益函数也将偏离实际情况。如何推广目前的线性微束团不稳定理论至准线性区间, 将是重要且具有现实意义的课题。

16.2.5 浅谈: 不同信号类型的频域描述

回顾一下, 基于 Vlasov 理论的结果 — 图 16.7 — 与基于粒子跟踪模拟或在实际机器上的量测结果 — 图 16.9 — 两者存在一个根本的区别: 前者分析的初始设置考虑的是微扰 (perturbation); 后者的初始设置为散粒噪声 (shot noise)¹⁹。下图 16.13 为包含了散粒噪声的微束团不稳定性增益频谱的样貌, 可以看到与图 16.7 的本质区别。这一小节简短讨论不同信号类型的频域描述。

首先, 按信号的频率成分, 可以分为周期信号与包含随机过程 (比如: 散粒噪声) 的随机信号。在时域, 周期信号一般用正弦函数描述; 在频域, 用傅立叶变换 (或快速傅立叶变换) 生成的频谱描述。随机信号用正弦函数描述不再方便, 甚至无法通过明确的数学表达式描述。一般来说, 对随机信号, 我们更关心的是它的一些“特性”如何随时间演化, 一般用功率谱密度 (power spectral density, PSD) 描述, 又称功率谱 (power spectrum)。当信号 — 无论是周期信号或随机信号 — 为瞬时、随时间动态演变时, 一般用能量谱密度 (energy spectral density, ESD) 描述, 定义为功率谱密度对时间长度的积分。以上几个量的定义整理如下:

定义 16.2. 功率谱密度、能量谱密度

将时域信号函数写成 $x(t)$, 对应的傅立叶变换函数写为 $\tilde{X}(f)$ 。将信号功率写为

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{X}(f)|^2 df \quad (16.57)$$

其中, 第二个等号用了 Parseval 定理。

¹⁹在 §10.6.1 讨论过散粒噪声。

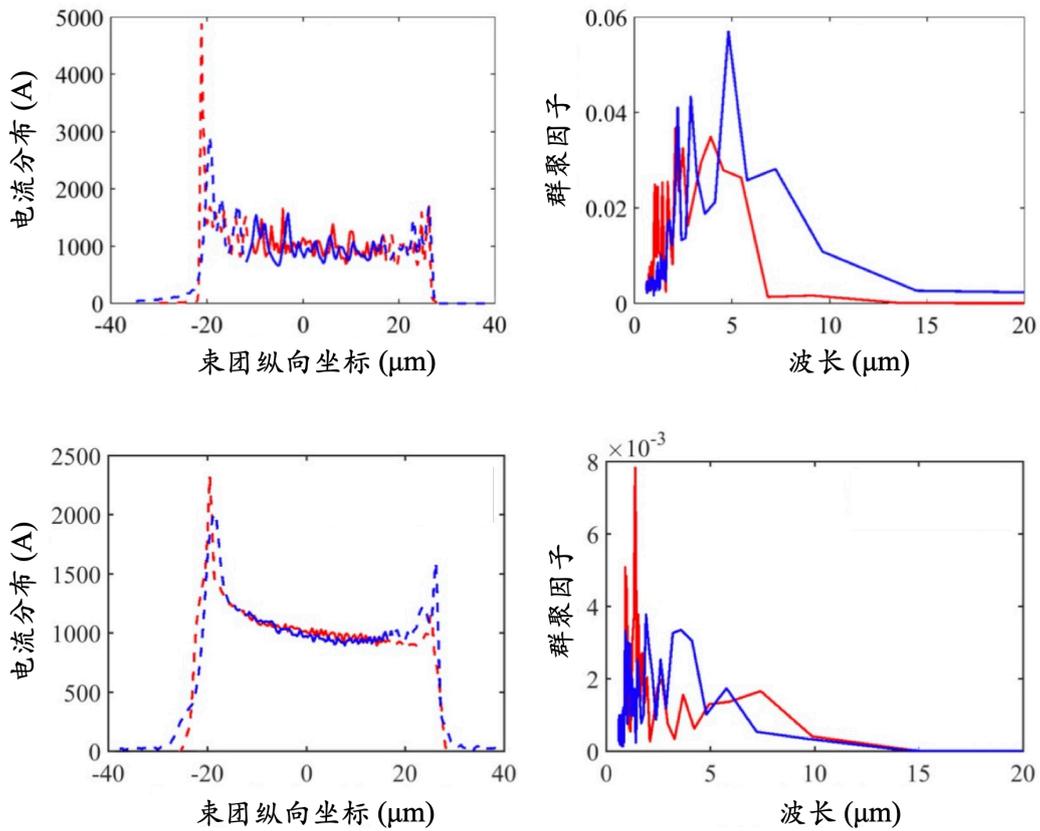


图 16.13: 图 16.9 相空间分布对应的电荷分布与频谱, 上排对应无 laser heater 情况, 下排对应 laser heater 情况。红线为粒子跟踪模拟结果, 蓝线为实验测量结果。图例取自 J. Qiang et al., Phys. Rev. Accel. Beams **20**, 054402 (2017). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevAccelBeams.20.054402>。

功率谱密度定义为

$$S_{xx}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |\tilde{X}(f)|^2 \quad (16.58)$$

能量谱密度定义为

$$\bar{S}_{xx}(f) = |\tilde{X}(f)|^2 \quad (16.59)$$

注 $x(t)$ 未必直接对应平时熟悉的物理量, 比如, 如果直接把 $x(t)$ 当成电场函数 $E(t)$, 那么上式等号不成立, 应该乘上修正项 $1/Z_0$ 。

笔记 不难证明, 能量谱密度函数 $\bar{S}_{xx}(f)$ 与 $x(t)$ 的自相关函数 $C(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(\tau-t)d\tau$ 互为傅立叶变换, 又称 Wiener-Khinchin 定理。 □

性质 16.1. 功率谱密度函数的几个特性

功率谱密度函数

- 为非负实函数, 即 $S_{xx}(f) \in \mathbb{R}$ 且 $S_{xx}(f) \geq 0$
- 为频率的偶函数, 即 $S_{xx}(-f) = S_{xx}(f)$ 。
- 可与自相关函数 $C(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(\tau-t)d\tau$ 的逆傅立叶变换关联
- 对全范围频率积分后, 为信号函数 $x(t)$ 的方差, 即

$$\text{Var}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f)df \quad (16.60)$$

- 对部分范围频率积分后, 为信号函数 $x(t)$ 的累积均方值, 即

$$F(f) = 2 \int_0^f S_{xx}(f')df' \quad (16.61)$$

有时候, 信号既不是明显的周期信号, 也不是明显的随机信号, 而是二者的混合。这种情况下, 可以通过累积均方值获取周期信号的方均根值。 □

以上介绍的是单个信号 $x(t)$ 的辅助函数。对两个信号 $x(t), y(t)$ 或以上, 可以定义互功率谱密度函数 (cross power spectral density, CPSD), 细节此处不论。感兴趣的读者请自行查找相关教科书。

16.3 储存环微束团不稳定性理论

上一节讨论的单次经过加速器微束团不稳定性理论，假设电子束单次或少数几次经历磁聚焦结构传输段。在不考虑集体效应影响下，束团的初始状态被视为“未扰动”状态，即

$$\begin{aligned} \bar{f}_0(\mathbf{X}_0) &= \frac{n_0}{(2\pi)^3 \sqrt{\det \boldsymbol{\Sigma}_0}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{X}_0^T \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \mathbf{X}_0 \right\} \\ &= \frac{n_0}{2\pi \epsilon_{x0} \sqrt{2\pi} \sigma_{\delta 0}} \exp \left[-\frac{x_0^2 + (\beta_{x0} x_0' + \alpha_{x0} x_0)^2}{2\epsilon_{x0} \beta_{x0}} - \frac{(\delta_0 - h z_0)^2}{2\sigma_{\delta 0}^2} \right] \end{aligned} \quad (16.62)$$

与之相对，第 8 章的 §8.4 介绍过，对同步加速器或储存环，在不考虑集体效应影响下，电子束参数——束长、能散、发射度等——不是由初始条件决定的，而是结合磁聚焦结构设计参数，由同步辐射阻尼效应与量子激发效应平衡后决定的：在不考虑集体效应影响下，储存环中束团的状态属于“平衡”状态。这里的初始状态可以是平衡状态；如果不是，那么经过一段时间——一般大约三个阻尼时间——初始状态将趋紧于平衡状态。

- 单次经过加速器：初始状态 = “未扰动”状态
- 储存环：初始状态 = “平衡”状态

以下储存环的分析，篇幅相对上一节较少，仅着重对物理图像的解释。

16.3.1 两种观点

这一节介绍储存环微束团不稳定性理论，将基于第 13 章讨论的动理学理论的色散方程(思路二)与模式分解(思路三)。两种观点的物理图像总结如下：

对色散方程：数学本质与积分方程无异，动力学系统的特性由核函数特性决定。与积分方程的差异体现在，色散方程更着重动力学系统的本征特性，而积分方程则更侧重于初始值问题。色散方程

$$1 = \frac{i4\pi\epsilon_0 r_e c Z_{\parallel}(k)}{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\omega + ck\eta\delta} \frac{\partial f_0}{\partial \delta} \right] d\delta \equiv f(k, \omega) \quad (16.63)$$

其“解”在复 ω 平面上随不同束团参数 $\gamma, \sigma_{\delta 0}$ 或磁聚焦结构集总参数 η ²⁰ 会移动。给定不同初始调制波数 k ，求 $\omega(k) \in \mathbb{C}$ 。当这些“解”移动到上半复平面时，即 $\text{Im} \omega > 0$ ，动力学系统不稳定。注意到，此思路适用于 **coasting beam**，或当纵向同步振荡可忽略时。

注意，基于色散方程，微束团不稳定性存在阈值 (threshold)。超过阈值后，“解”被推到 ω 的上半复平面，系统不稳定。

当 $\text{Im} \omega > 0$ 时，系统不稳定。

²⁰这里的 η 是滑相因子，不要与上一节色散函数 η 混淆。

对“模式分解”：适用于 **bunched beam**，物理图像包含纵向同步振荡效应。参考 §8.2，假设 **above transition** ($\eta = \alpha_c - \gamma^{-2} > 0$)，不考虑集体效应时，想像电子束团纵向相空间分布函数随着时间的在相空间逆时针旋转。相空间分布函数可以按一组完备基底展开，即模式分解。不考虑集体效应，当系统处于平衡态时，束团相空间分布就像“洋葱圈”，以原点为中心，一层一层按各自的纵向同步振荡频率 $\omega_s(J)$ 选择。当存在集体效应时，由于考虑的是短程尾场或宽带阻抗，一开始相空间分布出现“微结构”，如图 16.14 左排给出。由于“微结构”对相空间分布不对称，因此仅有部分基底或部分模式被不幸“选中”。随后，由于存在纵向同步振荡，电子束相空间分布开始“旋转”，其中，这些“微结构”开始受到“挤压”而变形。最终，这些“微结构”成丝 (**filamentation**) 分散在束团相空间分布中，导致束团非相干能散增加。

随着时间演化，束团由于过大的能散，同步辐射阻尼效应开始冷却束团，根据 §8.4，

$$\sigma_\delta^2(t) = \sigma_\delta^2(0)e^{-2t/\tau_\epsilon} + \sigma_{\delta 0}^2 \left(1 - e^{-2t/\tau_\epsilon}\right) \quad (16.64)$$

经过几个阻尼时间 τ_ϵ 后，束团能恢复其平衡时的能散 $\sigma_{\delta 0}$ 。然后再经历加热-冷却-加热-冷却... 过程。按模式分解思路，微束团不稳定性存在阈值 (**threshold**)，当某个或某几个模式超过阈值后，束团内对应的模式分布将经历如上描述的动力学过程。可以预见，此阈值随不同模式取值不同。不稳定性通常涉及不同模式之间互相简并、碰撞而引起。

当 $\text{Im} \Omega(\ell, \alpha) > 0$ 时，发生模式耦合，系统不稳定。

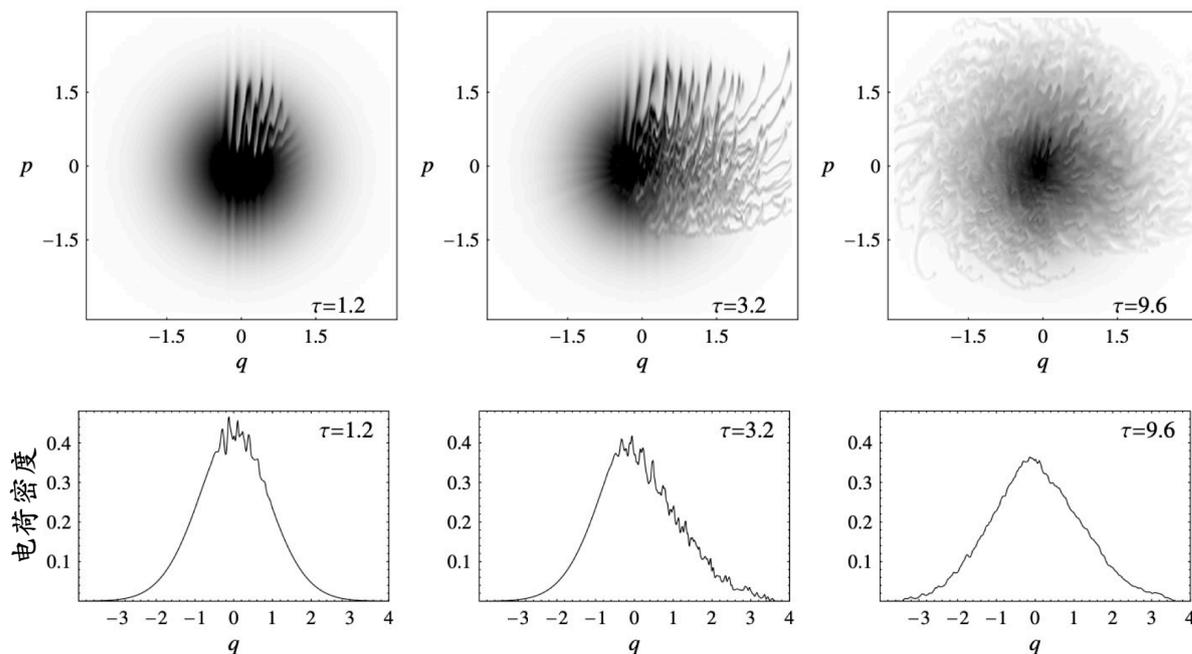


图 16.14: 储存环微束团不稳定性机制示意图。此为根据 Vlasov-Fokker-Planck 方程，按全数值求解相空间分布函数得到。图例取自 M. Venturini et al., PRST-AB 8, 014202 (2005)。

16.3.2 色散方程

由 §13.5, 按

$$1 = \frac{i4\pi\epsilon_0 r_e c Z_{\parallel}(k)}{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\omega + ck\eta\delta} \frac{\partial f_0}{\partial \delta} \right] d\delta \equiv f(\omega; k) \quad (16.65)$$

对一维、稳态 CSR 阻抗, 其解与稳定性区域可以划分如图 16.15。

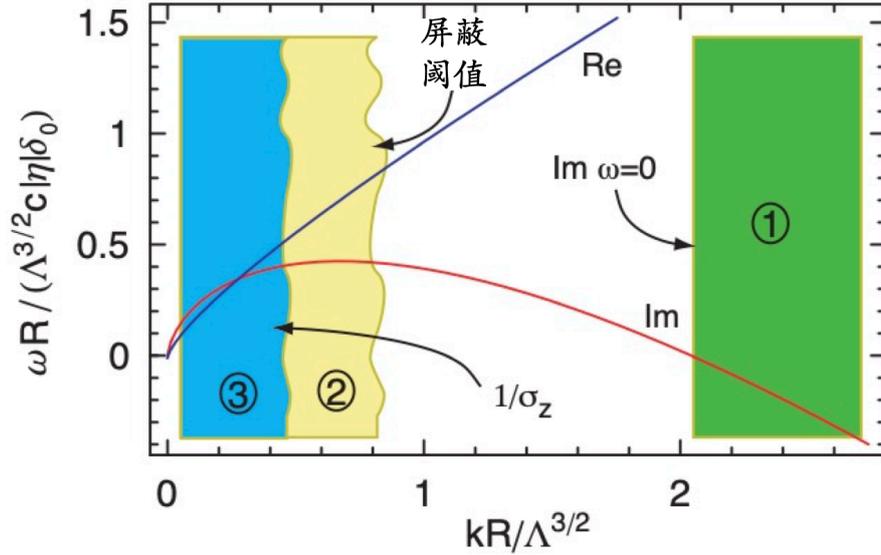


图 16.15: 白色区域为不稳定区间。区域①为稳定区间 (由于朗道阻尼效应), 区域②为部分金属真空管屏蔽抑制, 区域③为长波长段 $\sigma_z \leq \lambda_{\text{coll}}$, 不满足 coasting beam 近似。图例取自 Stupakov, Theory and observation of microbunching instability in electron machines, Proc. PAC 2003 (TOAA002). <https://accelconf.web.cern.ch/p03/PAPERS/TOAA002.PDF>

定理 16.4. 储存环 coasting beam 的 CSR 稳定性条件

基于色散方程思路, 对相干同步辐射 (coherent synchrotron radiation, CSR) 阻抗引起的微束团不稳定性, 在 $k\sigma_z \gg 1$ 情况下 (即 coasting beam 近似) 存在近似的解析解。如图 16.15 的白色 (不稳定) 区域将满足以下两条件

$$\sigma_z \geq \frac{\rho}{2\Lambda^{3/2}} \quad \text{与} \quad \frac{\rho}{b} \leq \Lambda \quad (16.66)$$

其中, $\Lambda = \frac{I_{b,\text{peak}}\rho}{|\eta|\gamma I_A \sigma_{\delta 0}^2 \langle R \rangle}$

- $I_{b,\text{peak}}$ 为束团峰值电流
- ρ 为二极铁弯转半径
- $\langle R \rangle = C/2\pi$ 为储存环平均弯转半径
- η 为滑相因子
- $I_A = 17045 \text{ A}$ 为 Alfvén 电流, 为一常数
- $\sigma_{\delta 0}$ 为束团平衡时的能散

证明 参考 G. Stupakov and S. Heifets, Beam instability and microbunching due to coherent synchrotron radiation, Phys. Rev. ST Accel. Beams **5**, 054402 (2002). <https://doi.org/10.1103/PhysRevSTAB.5.054402>

//journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.5.054402 □

前面提到，色散方程的数学本质与积分方程无异。根据 §16.2.2 的积分方程，以下试着从单次经过加速器的积分方程出发，经过平滑近似，过渡到储存环，看看是否能得到色散方程？

在储存环中，假设纵向弱聚焦，电子束绕行一周后，束长几乎不变，故 $h = 0$ 与 $C \equiv 1$ 。此外，假设粒子参考能量不变。由 §7.10，按平滑近似，有 $2\pi\nu_x \approx \int_s^{s+L} \beta_x^{-1}(\zeta) d\zeta \approx L/\bar{\beta}_x$ ，其中， $\bar{\beta}_x$ 为储存环的平均 betatron 函数。此外，假设储存环的弯转半径即为全环半径，即假设等磁环 (isomagnetic ring)，有 $L = 2\pi\rho_x$ 。因此，betatron tune 可以写成 $\nu_x = \rho_x/\bar{\beta}_x$ 。根据平滑近似概念，以下物理量可以进一步化简，有

$$\bar{\beta}_x = \frac{\rho_x}{\nu_x}, \quad \bar{\alpha}_x = -\bar{\beta}'_x/2 = 0, \quad \psi_x = 2\pi\nu_x \frac{s}{L} = \nu_x \frac{s}{\rho_x}, \quad \epsilon_{x0} = \frac{\sigma_{x0}^2}{\bar{\beta}_x}$$

$$R_{16} = \frac{\rho_x}{\nu_x^2}, \quad R_{26} = 0$$

$$R_{51}(s) = R_{16}R_{21} - R_{26}R_{11} = -\frac{1}{\nu_x} \sin \frac{\nu_x s}{\rho_x}$$

$$R_{52}(s) = R_{16}R_{22} - R_{26}R_{12} = \frac{\rho_x}{\nu_x^2} \cos \frac{\nu_x s}{\rho_x}$$

$$R_{56}(s) = \int \frac{R_{16}}{\rho_x} ds = \frac{s}{\nu_x^2}, \quad \eta = \alpha_c - \frac{1}{\gamma_0^2} = \frac{1}{L} \oint ds \frac{R_{16}}{\rho_x} \approx \frac{1}{\nu_x^2}$$

$$\begin{aligned} R_{56}(\tau \rightarrow s) &= R_{56}(s) - R_{56}(\tau) + R_{51}(\tau)R_{52}(s) - R_{51}(s)R_{52}(\tau) \\ &= \frac{s - \tau}{\nu_x^2} + \frac{\rho_x}{\nu_x^3} \sin \frac{\nu_x(s - \tau)}{\rho_x} \end{aligned}$$

先将以上表示式代入朗道阻尼项，有

$$\begin{aligned} \{L.D.; s, \tau\} &= \{L.D.; s - \tau\} \\ &= \exp \left\{ -k^2 \left[\frac{\sigma_{x0}^2}{\nu_x^2} \left(1 - \cos \frac{\nu_x(s - \tau)}{\rho_x} \right) + \frac{\sigma_{\delta 0}^2}{2\nu_x^4} (s - \tau)^2 \right] \right\} \end{aligned}$$

再代入核函数项，有

$$\begin{aligned} K(\tau, s) &= K_1(s - \tau) \\ &= \frac{ik(s)I_0}{\gamma_0 I_A} \frac{4\pi}{Z_0} \left[\frac{s - \tau}{\nu_x^2} + \frac{\rho_x}{\nu_x^3} \sin \frac{\nu_x(s - \tau)}{\rho_x} \right] Z_{\parallel}(k; \tau) \{L.D.; s - \tau\} \end{aligned}$$

积分方程可写成如下简化形式，留意核函数里的宗量变量关系

$$b(k; s) = b_0(k; s) + \int_0^s d\tau K_1(s - \tau) b(k; \tau); \tau \quad (16.67)$$

为得到色散方程，对等式做如下拉普拉斯变换

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \hat{b}(k; \mu) \\ \hat{b}_0(k; \mu) \\ \hat{K}_1(\mu) \end{array} \right\} &\equiv \mathcal{L} \left\{ \begin{array}{l} b(k; s) \\ b_0(k; s) \\ K_1(s) \end{array} \right\} = \int_0^{\infty} ds \left\{ \begin{array}{l} b(k; s) \\ b_0(k; s) \\ K_1(s) \end{array} \right\} e^{-\mu s} \end{aligned} \quad (16.68)$$

利用拉普拉斯变换的卷积定理

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^s d\tau K(s-\tau)b(k(\tau); \tau) \right\} = \mathcal{L} \{ K_1 * b(k(\tau); \tau) \} = \hat{K}_1(\mu)\hat{b}(k; \mu) \quad (16.69)$$

则, 积分方程变为如下代数方程

$$\hat{b}(k; \mu) = \hat{b}_0(k; \mu) + \hat{K}_1(\mu)\hat{b}(k; \mu) \quad (16.70)$$

移项后, 有

$$\hat{b}(k; \mu) = \frac{\hat{b}_0(k; \mu)}{1 - \hat{K}_1(\mu)} \quad (16.71)$$

分母为零时对应色散方程, 有

$$1 - \hat{K}_1(\mu) = 0 \quad (16.72)$$

一般来说, 给定 k 后, 求解 $\mu \in \mathbb{C}$, 有 $\mu(k) = \mu_R + i\mu_I$ 。当存在 $\mu_R > 0$ 时, 系统不稳定; 或者, 系统稳定条件要求对所有 k , 有 $\mu_R(k) \leq 0$ 。当束团不稳定时, 其增长率为 $\tau^{-1} \approx \max \{ \mu_R(k) \}$ 。



笔记 这里得到的色散方程比此小节前面介绍的更具一般性, 因为包含了横向动力学。

现在, 我们考虑将此色散方程化简为一维情况。要求 $\sigma_{x0} \rightarrow 0$, 且忽略 R_{51}, R_{52} , 则核函数退化为

$$K(\tau, s) = K_1(s-\tau) = \frac{ik(s)I_0\eta}{\gamma_0 I_A} (s-\tau) \frac{4\pi}{Z_0} Z_{\parallel}(k; \tau) \exp \left\{ -\frac{k^2 \sigma_{\delta 0}^2 \eta^2}{2} (s-\tau)^2 \right\} \quad (16.73)$$

注意, 滑相因子 $\eta \approx \nu_x^{-2}$ 出现在核函数中。同上做法, 应用拉普拉斯变换与卷积定理, 有一维色散方程

$$\hat{K}_1(\mu) = \frac{ikI_b\eta}{\gamma I_A} \frac{4\pi}{Z_0} Z_{\parallel}(k) \int_0^{\infty} ds e^{-\mu s} (s) e^{-\frac{k^2 \sigma_{\delta 0}^2 \eta^2}{2} (s)^2} = 1 \quad (16.74)$$

利用如下积分恒等式

$$\int_0^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2} - i\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p e^{-p^2/2}}{p + \Omega} dp \quad (16.75)$$

令 $t = k\sigma_{\delta 0}\eta s$ 与 $\Omega = -i\mu/k\sigma_{\delta 0}\eta$, 色散方程可写为

$$\hat{K}_1(\mu) = \frac{iI_b Z_{\parallel}(k)}{\sqrt{2\pi}\gamma I_A k\sigma_{\delta 0}^2 \eta} \frac{4\pi}{Z_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p e^{-p^2/2}}{p + \Omega} dp = 1 \quad (16.76)$$

此为纵向一维模型的储存环色散方程。可以证明, 此式与前面给出的

$$\frac{i4\pi\epsilon_0 r_e c Z_{\parallel}(k)}{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\omega + ck\eta\delta} \frac{\partial f_0}{\partial \delta} \right] d\delta = 1 \quad (16.77)$$

对高斯分布束团, 结果一致。

练习 16.6 假设 $f_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\delta 0}} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma_{\delta 0}^2}\right)$, 验证以上两色散方程形式完全一致。 ■

注 以上分析都基于 Vlasov 方程, 忽略同步辐射阻尼与量子激发效应。一般同步辐射阻尼时间比量子激发短些, 所以, 在不改变理论框架前提下, 可以直接将不稳定性增长率与

同步辐射阻尼率相减即可，即

$$\tau^{-1} \approx \tau_{\text{coll}}^{-1} - \tau_{\epsilon}^{-1} \quad (16.78)$$

如果要更自洽地考虑这些效应，则应由 Vlasov-Fokker-Planck (VFP) 方程出发。对储存环基于色散方程的分析，可参考 S. Heifets and G. Stupakov, Derivation of microwave instability dispersion relation with account of synchrotron damping and quantum fluctuations, SLAC-PUB-8803 (2002). <https://inspirehep.net/literature/554861>

16.3.3 特征方程

按 §13.6，线性化 Vlasov 方程从 (z, δ) 经作用量-角度正则变换至 (ϕ, J) ，再经过两次模式分解，分别对应角方向与半径方向，最终得到一组无穷多线性方程组

$$\frac{\Omega}{\omega_s} a_{\alpha}^{\ell} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{\infty} M_{\ell, m}^{\alpha, \beta} a_{\beta}^m \Leftrightarrow \mathbf{M}(\ell, \alpha) \mathbf{a} = \frac{\Omega(\ell, \alpha)}{\omega_s} \mathbf{a} \quad (16.79)$$

对于此线性方程组，给定两个方向的基底指标 ℓ, α ，待解的物理量为同步振荡复频率 $\Omega(\ell, \alpha) \in \mathbb{C}$ 。

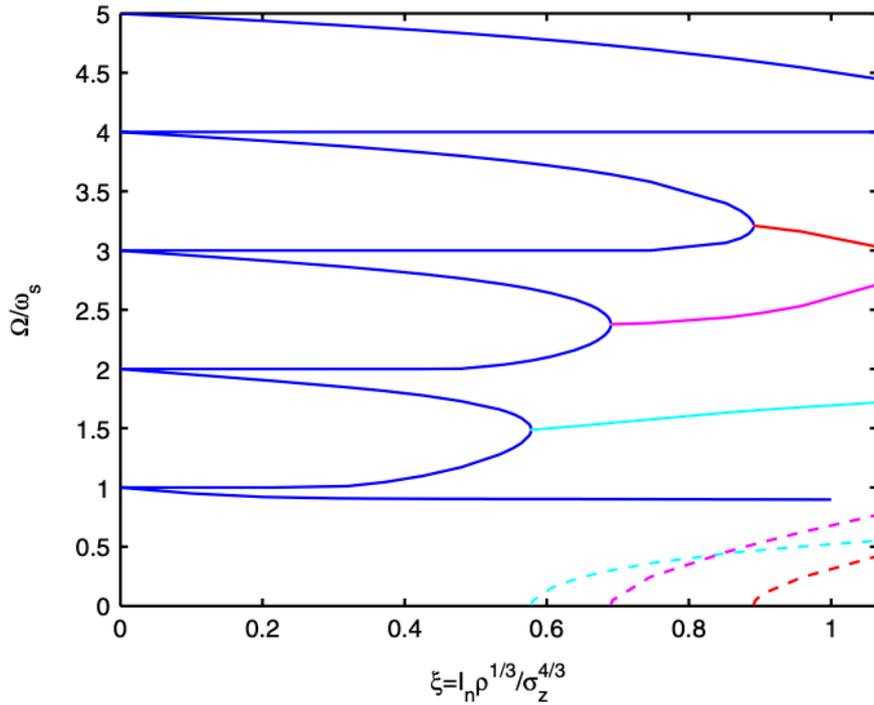


图 16.16: 一维、稳态相干同步辐射导致的储存环微束团不稳定性模式随归一化电流强度的依赖关系。图例取自 Y. Cai, PRST-AB 14, 061002 (2011)。蓝线是在给定特定角向指标 ℓ 下，扫描一系列径向指标 α 后，选出最大与最小频率偏移量得到。

定理 16.5. 储存环 bunched beam 的 CSR 稳定性条件 — 基于模式分解

基于思路三的特征方程，对一维、稳态相干同步辐射 (coherent synchrotron radiation, CSR) 阻抗引起的微束团不稳定，最低阈值条件为

$$\xi = I_n \frac{\rho^{1/3}}{\sigma_z^{4/3}} \geq \xi_{\text{th}} = \begin{cases} 0.578, & \text{Gaussian model} \\ 0.482, & \text{Laguerre polynomial} \end{cases} \quad (16.80)$$

其中，

- $I_n = \frac{I_{b,\text{ave}} \sigma_z}{|\eta| \gamma I_A \sigma_\delta^2}$
- ρ 为二极铁弯转半径
- σ_z 为平衡时的束长
- η 为滑相因子
- γ 为电子参考能量的洛伦兹因子
- $I_A = 17045 \text{ A}$ 为 Alfvén 电流，为一常数
- σ_δ 为束团平衡时的能散

证明 参考 Y. Cai, Linear theory of microwave instability in electron storage rings, Phys. Rev. ST Accel. Beams **14**, 061002 (2011). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.14.061002> □

16.3.4 数值求解 Vlasov-Fokker-Planck 方程

除了基于 coasting beam 的色散方程与 bunched beam 模式分解的特征方程外，直接数值求解动力学方程也是其中一种思路。此思路再细分两个方法：

1. 求解完整的 Vlasov-Fokker-Planck (VFP) 方程
2. 求解线性化 Vlasov 方程，包含零阶 Haissinski 方程

忽略细节，此处总结基于数值求解完整 VFP 方程后得到的数值拟合结果。

定理 16.6. 储存环 bunched beam 的 CSR 稳定性条件 — 基于数值求解 VFP 方程

考虑金属平行板导致的辐射屏蔽效应，基于全数值求解 Vlasov-Fokker-Planck 方程与线性化 Vlasov 方程两者为思路，经过系统分析后，对一维、稳态 CSR 引起的微束团不稳定性，可细分两类：强 CSR 不稳定性 (strong-CSR instability) 与弱 CSR 不稳定性 (weak-CSR instability)。当束团稳定时，恒有 CSR 强度因子 $S \leq (S_{\text{CSR}})_{\text{th}}$ 。

对强 CSR 不稳定性，增长率受纵向同步辐射阻尼率影响不大，其阈值条件可由两无量纲参数描述，为

$$(S_{\text{CSR}})_{\text{th}} = 0.5 + 0.12\Pi \quad (16.81)$$

其中,

$$S_{\text{CSR}} \equiv \frac{I\rho^{1/3}}{\sigma_{z0}^{4/3}}, \quad \Pi \equiv \sigma_{z0} \sqrt{\frac{\rho}{h^3}}, \quad I \equiv \frac{r_e N_b}{2\pi\nu_{s0}\gamma\sigma_{\delta 0}} \quad (16.82)$$

其中,

- $(S_{\text{CSR}})_{\text{th}}$ 为阈值 CSR 强度因子
- Π 为屏蔽因子; 当 $\Pi \leq 2$ 时, 屏蔽几乎不起作用; 当 $\Pi > 2$ 时, 阈值峰值电流 $I_{\text{th}} \propto h^{-3/2}$
- σ_{z0} 为不考虑集体效应的“纯光学”束长
- $\sigma_{\delta 0}$ 为不考虑集体效应的“纯光学”能散
- ν_{s0} 为不考虑集体效应的“纯光学”的 synchrotron tune
- N_b 为束团内粒子数
- ρ 为弯转半径
- $2h$ 为平行板高度(全高)

对 弱 CSR 不稳定性, 增长率受纵向同步辐射阻尼率影响, 大概发生在如下条件时

$$(S_{\text{CSR}})_{\text{th}} \approx 0.2, \quad \Pi \approx 0.7 \quad (16.83)$$

注 对强 CSR 不稳定性, 全数值求解 Vlasov-Fokker-Planck 方程的结果与线性化 Vlasov 方程结果一致。对弱 CSR 不稳定性, 仅在 Vlasov-Fokker-Planck 方程的计算结果中显现。



笔记 细节讨论可参考 K.L.F. Bane, Y. Cai, and G. Stupakov, Threshold studies of the microwave instability in electron storage rings, Phys. Rev. ST Accel. Beams **13**, 104402 (2010). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.13.104402>

16.3.5 研究现状总论

分析并预测储存环单束团纵向微波不稳定性 (longitudinal microwave instability) 阈值是古老且经典的集体效应问题。由于储存环中的微束团不稳定性属于微波不稳定性的分支, 其理论框架相对成熟, 区分 coasting beam 模型与 bunched beam 模型。目前来说, 抑制储存环中微束团不稳定性相对较难, 除了调变第13章介绍的势能阱(利用势阱畸变效应), 产生 tune spread 以提供更强的朗道阻尼外, 只能设法控制在 phase space bucket 内单束团峰值电流或能散不要超过不稳定性阈值。从实际角度看, 现在关于阈值条件的预测, 理论、模拟与实验测量结果三者并不总是彼此契合。一部分原因为储存环整体阻抗的评估或许还不够准确。另外, 如何判定阈值情况仍未有定论: 按粒子跟踪模拟, 一般以“明显”发生束长拉伸或能散增加时的流强作为阈值标定。按理论分析, 当出现模式耦合时, 对应的流强定为阈值。

从理论面向看，仍有几个可能的研究面向：

- 如何使 **coasting beam** 模型与 **bunched beam** 模型给出的结果自洽？
- 不同的阻抗模型可能给出储存环微束团不稳定性不同的阈值依赖关系。如何系统地分析并给出定标定律，是既实用又具挑战性的经典难题。
- 多数分析忽略同步辐射阻尼与量子激发效应，分析从平衡态开始。但更自洽的分析应该同时将以上效应纳入理论模型。
- 目前研究储存环集体不稳定性主要采取如下方法：
 1. 粒子跟踪模拟：直观、时域法
 2. 直接数值求解 **Vlasov** 方程的相空间分布函数
 3. 数值求解色散方程
 4. 数值求解模式分解后的特征方程的特征值

对同一套加速器参数，四种方法有时给出一致结果，有时则给出不同的阈值结果。如何解读、调和几种方法的差异，将是紧迫、实用的课题，需要比较四种思路背后的模型假设。

- 上述几种分析储存环微束团不稳定性的方法都仅考虑纵向动力学过程，忽略横向动力学，且仅考虑稳态相干同步辐射阻抗。这些与单次经过加速器微束团不稳定性分析时考虑了六维相空间动力学，且同时包含稳态与暂态相干同步辐射阻抗不同。暂态同步辐射效应对储存环微束团不稳定性是否影响、影响多大？如果存在影响，从理论模型上应如何调解才能与粒子跟踪模拟得到一致的结果，将值得深入探究。
- 近期提出双能储存环 (**dual-energy storage ring**) 的概念，如何将目前既有的单能量储存环中微束团不稳定性理论推广到双能储存环，或许是一有趣、值得开发的课题。

16.4 稳态微聚束：一种崭新的电子储存环高平均功率、相干辐射源

作为此讲义专题的最后一节，介绍一种新型、基于电子储存环稳态微聚束的高平均功率、相干辐射源。这里的介绍尽量定性描述，未必全面、详实。对细节感兴趣的读者可自行寻找相关文献；关于储存环稳态微聚束的综述论文，可参考：唐传祥, 邓秀杰. 稳态微聚束加速器光源. 物理学报, 2022, **71**(15): 152901. <http://dx.doi.org/10.7498/aps.71.20220486>。

16.4.1 总论

2010 年，斯坦福大学国家加速器实验室 (SLAC National Accelerator Laboratory) D. Ratner 与 A.W. Chao²¹提出一种崭新的高亮度电子储存环形态，能够产生高平均功率且相干性比传统储存环光源高出数个数量级的相干辐射源，其原理称为稳态微聚束 (steady state microbunching, SSMB)。由于粒子加速器具备先天能量可调的优势，基于稳态微聚束方案产生的辐射原则上能够覆盖大范围电磁频谱，如：自太赫兹 (terahertz, THz)、红外 (infrared, IR) 至极紫外 (extreme ultraviolet, EUV) 波段。以下先回顾两类目前利用加速器产生的光源：

- 对于短波长相干辐射产生机制，一般涉及电子束内产生局部的微束团或微群聚 (microbunching) 效应。产生微束团或微群聚可以通过外部种子激光 (seed laser) 直接调制电子束，或是通过电子束自身噪声 (shot noise) 引致。基于直线加速器驱动的高增益自由电子激光的辐射原理即是基于这个机制；单次经过的自由电子激光机制使微束团不稳定性尽可能放大，直到该不稳定性持续加热束团，束团品质恶化、变差而最终达到饱和。虽然产生的辐射具有优越的高峰值亮度特性，基于直线加速器运行模式的缺点为光脉冲重复频率低，因此，峰值亮度或峰值功率高，但平均亮度或平均功率低。直线加速器的高品质电子束在单次经过之后，经历自由电子激光过程，电子束品质变差而几乎无法再次循环使用。
- 对于高亮度电子储存环同步辐射光源，其相干辐射机制通常发生于当其经过弯转磁铁或插件磁铁时，通过相干同步辐射 (coherent synchrotron radiation, CSR) 效应引致，中心波长通常对应于电子束纵向束长尺度。在储存环中，虽然逐圈运行的电子束能够提供高重复频率 (即逐圈绕行频率 \times 储存环内束团数或射频谐波数 h) 的同步辐射光脉冲，其束团分布仍受限于射频加速腔波长。因此，对于产生短波长相干辐射如 13.5 nm 的短波长、高功率且相干性足够好的辐射不具备优势。近年有些加速器装置提出将储存环操作在低动量紧缩 (low momentum compaction, low- α_c) 模式²²，并结合微束团不稳定性与相干同步辐射效应能够产生短暂的短波长辐射的暴

²¹D.F. Ratner and A.W. Chao, Steady-State Microbunching in a Storage Ring for Generating Coherent Radiation, Phys. Rev. Lett. **105**, 154801 (2010). <https://journals.aps.org/prl/pdf/10.1103/PhysRevLett.105.154801>

²²回忆一下，§8.3 介绍过，电子储存环达平衡时，束长 $\sigma_z \propto \sqrt{\alpha_c}$ 。

涨模式 (burst mode)²³。然而，由于电子束团所经历的微束团不稳定性将不可避免地“加热”电子束，导致非相干或切片能散增加，此暴涨模式仅能支持短时间 (一般约 msec 量级) 内操作，因此无法满足上述连续波操作模式。

与以上两种机制不同，SSMB 的想法根源于储存环的高重复频率运行，以激光谐振腔 (laser cavity) — 又称激光调制器 (laser modulator) — 取代射频/微波腔，使形成更有效调制而产生电子微束团脉冲串。由于激光谐振腔的波长比起射频腔波长短了五至六个数量级，足够短、短于辐射波长的电子微束团脉冲产生的辐射将完全相干。留意，这些电子微束团脉冲并不是时时刻刻都在储存环中产生辐射，而仅在经过环中一特殊设计的波荡器段才有意地产生辐射。这个特殊设计的波荡器段称辐射波荡器或辐射器 (radiator)。这里的辐射器应与上述的激光调制器有所区别。[辐射器 (radiator) ≠ 调制器 (modulator)]。此外，因为稳态微聚束方案本质上基于储存环模式运行，更短的激光调制波长意味着更窄的 phase space bucket，在相同的储存环周长下将容纳 (五至六个数量级) 更多的电子微束团。比起基于传统射频腔的储存环中的电子束团串，这些电子微束团“密密麻麻”，形成微束团串 (microbunch train)。

从储存环单粒子动力学的物理效应看，SSMB 与传统射频腔的储存环似乎没有太大差异：平衡态同样由同步辐射阻尼与量子激发效应决定。现在，问题的关键是

微聚束如何长时间保持稳态？

SSMB 除了与第四代基于射频加速腔同步辐射储存环束团参数的数量级 (非物理效应) 差异外，稳态微聚束机制也不同于直线加速器微束团不稳定性引致的自由电子激光 (FEL) 过程。[SSMB ≠ FEL]。稳态微聚束将试图避免极短的电子束团逐圈经过辐射波荡器时可能导致的自由电子激光加热效应。如果不可避免地被加热后，就将进入上述的暴涨模式。因此，尽管稳态微聚束储存环容纳了更多的电子微束团，每个电子微束团的电荷量比起第四代电子储存环将减少几个数量级。以 EUV SSMB 为例，初步设计指出每个微束团大约只有 $10^4 \sim 10^5$ 个电子。对其它波段，可能稍有不同，但单束团电荷量都比传统电子储存环束团电荷少几个数量级。换言之，稳态微聚束方案在运行时，其电子束重复频率 (即，储存环逐圈运行的电子微束团总数)、束团内电子数与相干辐射效应 (即，相干辐射波长内电子数) 三者间试图取得巧妙平衡。稳态微聚束方案将试图避免逐圈运行时任何可能对电子束团的加热效应，如：直线加速器自由电子激光过程；同时最大程度上增加运行电子束的重复频率。

如果从各方面检视之后，能够证明基于稳态微聚束方案的储存环光源可行，其产生的平均辐射功率或平均亮度将比传统基于射频腔的平均功率或亮度有几个数量级提高。这里我们强调，稳态微聚束虽然作为近年一种创新的高亮度电子储存环光源方案，并不

²³对此感兴趣的读者，可参考 J. Byrd et al., Observation of Broadband Self-Amplified Spontaneous Coherent Terahertz Synchrotron Radiation in a Storage Ring, Phys. Rev. Lett. **89**, 224801 (2002). <https://journals.aps.org/prl/pdf/10.1103/PhysRevLett.89.224801>。

表示作为替代既有的第四代其它光源形态。并且，不同于能量回收型直线加速器 (energy recovery linac, ERL) 以基于单次经过的直线加速器自由电子激光为根基，试图形成多圈但未达稳态运行的折衷模式；稳态微聚束方案与能量回收型加速器相干光源的目标并不相同，前者目标为提高平均亮度或平均功率，后者则是峰值亮度或峰值功率。图 16.17 比较当前第四代光源的三种形态 (a,b,c) 与这一节将讨论的稳态微聚束电子储存环方案的差异。

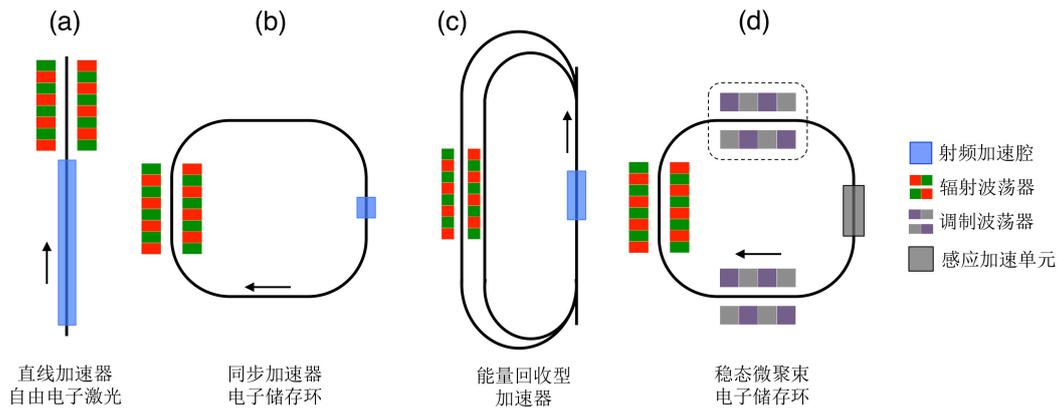


图 16.17: (a)-(c) 为当前第四代光源的三种形态；(d) 为近年提出的基于稳态微聚束电子储存环方案。相较于同步加速器储存环，稳态微聚束储存环以激光调制波荡器取代射频腔提供纵向聚焦，以感应加速单元 (induction accelerator) 补偿电子束辐射时的能量损失。图中激光调制器可能为光学谐振腔设计以形成激光调制增强腔用来缓解方案对调制激光参数的要求。(d) 中虚线部分为解调制器 (de-modulator)，对应于一种稳态微聚束机制候选方案。

稳态微聚束 SSMB 机制的提出是对既有的几种基于加速器光源特性的深刻认识与洞见。随着近年国际加速器社群对此新型光源机制的兴趣与认识的逐步深入，在可预见的将来或有越来越多研发投入。表 16.3 总结、比较了储存环同步辐射加速器、直线加速器驱动的自由电子激光、与能量回收加速器驱动的相干光源的电子束参数特性，同时与此处介绍的新型高亮度电子储存环稳态微聚束产生相干辐射特性相互比较。从束流动力学理论角度看，稳态微聚束机制涉及的几个截然不同的数量级差异将伴随可预见的、新的电子束集体效应，将为加速器束流动力学理论发展注入新的活力。因此，理解高亮度电子储存环稳态微聚束集体作用的机理将是准确评估方案可行性与效能的一步，也将为高亮度电子束流动力学理论提供新的发展契机。

表 16.3: 此表对应四种电子加速器光源形态的典型电子束团特性，其中，相干性与辐射波长相干长度内的电子数有关，辐射平均功率 \propto 脉冲重复频率 \times 单束团电子数 \times 相干长度内电子数。

	储存环 同步辐射	直线加速器 自由电子激光	能量回收加速器 相干光源	稳态微聚束 相干光源
辐射脉冲重复频率	< 1 GHz	100 Hz 至 1 GHz	~1 GHz	10 至 100 THz
电子纵向束团长度	1 mm	1 mm	1 mm	1 mm 至 1 μ m
电子微束团长度	无	约 1 ~ 5 μ m	约 1 ~ 5 μ m	小于 1 μ m
单束团电子数	约 10^{10}	$\leq 10^9$	$\leq 10^8$	$\leq 10^5$
短波长相干长度内电子数	1	$\approx 10^7$	$\approx 10^6$	$\approx 10^5$

同步辐射 \neq 稳态微聚束 \neq 自由电子激光。

稳态微聚束的电子微束团逐圈绕行产生相干辐射是“温和”的，不像自由电子激光那样对电子束那么“粗暴”而“加热”束团。稳态微聚束也不是储存环同步辐射光源，因为储存环光源着重在降低横向发射度以产生衍射极限的辐射，而稳态微聚束产生相干辐射的动力学主要在纵向，目标以增加纵向相干性。SSMB 的具体区别体现在：

1. 关注电子微束团纵向分布、束长与聚束因子；
2. 尽一切可能维持电子微束团纵向发射度，如同同步辐射储存环维持束团的横向发射度；
3. 电子微束团的横纵向比 $\sigma_{\perp} \gg \sigma_z$ ，与同步辐射储存环的电子束 $\sigma_{\perp} \ll \sigma_z$ 相反，参考图 16.18。

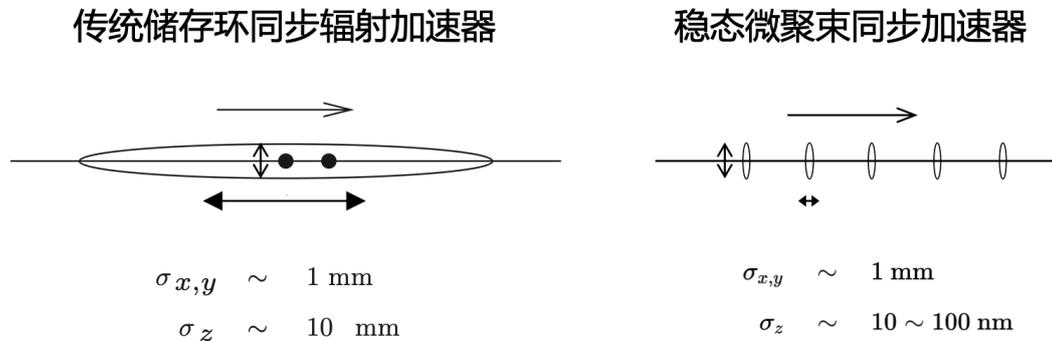


图 16.18: 传统储存环同步辐射光源电子束与稳态微聚束储存环的横纵向尺寸比例。

稳态微聚束方案可设计以产生相干红外光 (infrared, IR) 波段、太赫兹 (terahertz, THz) 波段、极紫外 (extreme ultraviolet, EUV) 波段。图 16.19 给出针对三种不同波段的稳态微聚束储存环的样貌。

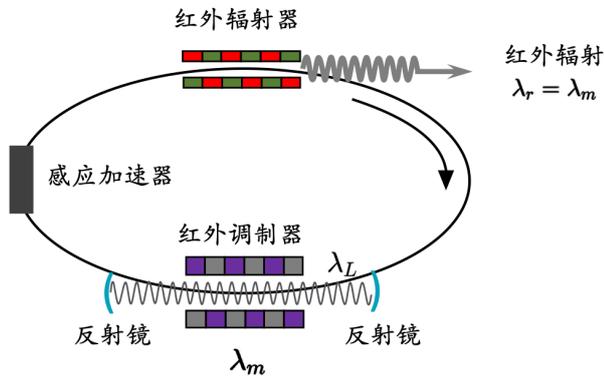
16.4.2 两类可能的方案与工作原理

近年主要进展为面向产生高功率极紫外 (EUV) 相干光源推进，提出关于几种可能产生稳态微聚束的设计方案及可行性评估。目前为止，这些方案大致可以分为两类：

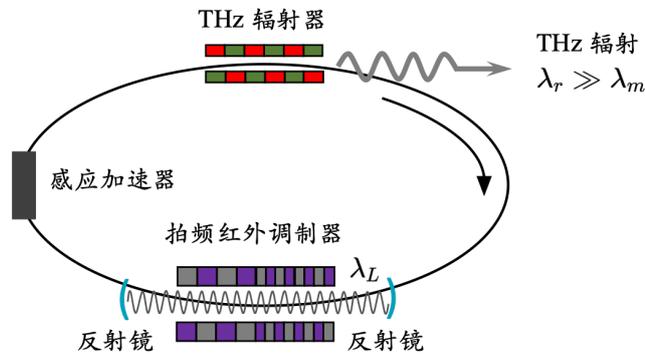
- 纵向强聚焦 SSMB 方案 (longitudinal strong focusing SSMB scheme)
- 可逆调制-解调制 SSMB 方案 (modulation-demodulation SSMB scheme 或 reversible seeding SSMB scheme)

两种方案各具优势，也存在困难与挑战。对于纵向强聚焦 SSMB 方案，全环设计要形成全域与局域的准等时性储存环 (quasi-isochronous storage ring)，其中，电子微束团串在全环中需要处处保持微聚束状态。为了更好地维持电子微束团状态，需要引入纵向强聚焦模式。这与目前第四代电子储存环同步辐射光源基于纵向弱聚焦的操作模式并不

(a) 红外波段放大器模式



(b) 太赫兹波段拍频放大模式



(c) 极紫外谐波放大模式

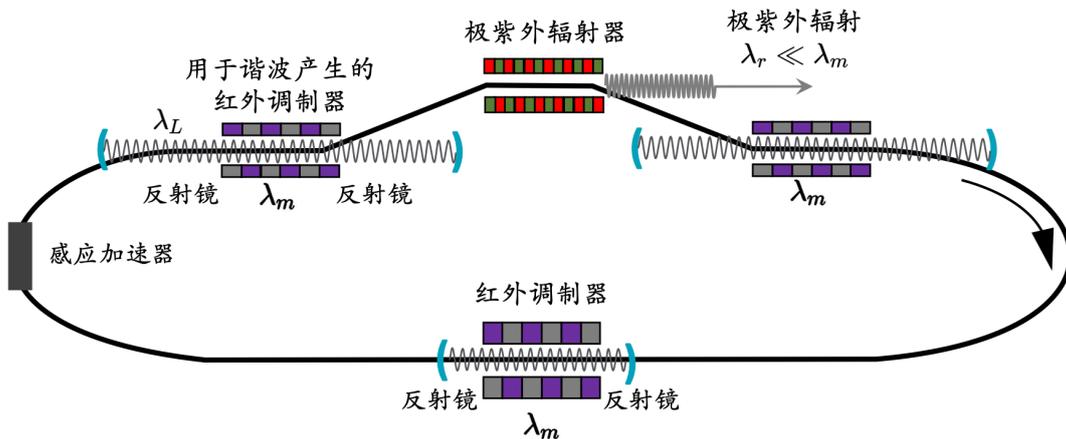


图 16.19: 三种不同波段的稳态微聚束储存环的样貌。一般来说，调制段采用红外激光，因为激光技术相对成熟。(a) 适用于同调制波长产生高功率相干辐射，为 SSMB 放大器，在调制波荡器产生能量调制，在辐射段将该调制波长直接放大。(b) 适用于产生比调制波长更长的相干辐射，为拍频产生器，在调制波荡器产生具有两种频率接近的拍频能量调制，在辐射段将该辐射出拍频波长的成分。(c) 适用于短波长相干辐射产生，将辐射波荡器夹在两调制波荡器中间，作为在辐射段入口处微束团压缩与出口处微束团拉伸。必要的话，在储存环其余部分再加一调制波荡器调控微束团相空间分布。图例修改自 A. Chao, Storage ring based steady state microbunching, FLS2023 (MO2L2)。

相同。然而，就单粒子的纵向动力学而言，其行为仍非常类似于第7章介绍的、当前近代同步加速器普遍采用的横向强聚焦操作模式，只是现在推广到纵向。有了纵向强聚焦后，为了维持电子束微束团状态，此方案的设计挑战在于要求全环不仅为准等时性，同时还要求局域的磁聚焦结构传输段也尽可能保持准等时性 (partial momentum compaction)。因此，同时符合全域与局域准等时性的储存环设计是纵向强聚焦 SSMB 方案必须面临的一大挑战。

对于可逆调制-解调制 SSMB 方案，对储存环设计不再有等时性要求。因此，电子微群聚状态仅要求在经历辐射波荡器 (radiator) 过程时维持，即，不再需要在储存环各处都很好保持。基于此方案的电子束团在辐射波荡器与调制波荡器外的区域，其电子束相空间动力学与第四代储存环同步辐射光源的电子束没有太大差异。基于可逆调制-解调制 SSMB 方案的挑战是，为了确保电子微群聚状态在逐圈经历辐射波荡器能够形成，要求激光调制器 (laser modulator) 与激光解调制器 (laser de-modulator) 能够完美抵消对电子束的作用。图 16.20 比较纵向强聚焦与可逆调制-解调制方案两种方案的异同。

16.4.3 激光-电子束交互作用

16.4.3.1 单粒子、单次经过动力学

对单次经过而言，电子束经过激光调制器后是否能够得到预期的能量调制 (energy modulation)，从而经过下游磁聚焦结构，在到达辐射波荡器时能够获得理想的密度调制 (density modulation) 或群聚因子 (bunching factor)。这部分需要考虑当前激光技术水平能够获得的调制激光功率 — 即，调制能力 — 与经过调制器后，电子束在下游传输期间的动力学过程。

在激光调制器中，电子束与调制激光相互作用过程的探索或许可借助于目前直线加速器短波长自由电子激光领域正在蓬勃发展的各种高亮度电子相空间调制方案，如 §10.8 介绍。当前处于热门研究的外种子机制有：基于高增益高次谐波放大 (high gain harmonic generation, HGHG)、回声高次谐波放大 (echo-enabled harmonic generation, EEHG)，与近期提出并取得了一系列新进展的基于相位汇聚型高次谐波产生 (phase-merging enhanced harmonic generation, PEHG)、角色散引致微束团方案 (angular dispersion induced microbunching, ADM)、激光斜向入射调制方案等、自调制方案 (self-modulation scheme)、直接放大谐波产生 (direct-amplification enabled harmonic generation, DEHG) 方案等电子相空间调制方案。对稳态微聚束方案，按当前激光技术水平似乎无法同时提供足够的调制深度与足够的重复频率。缓解对调制激光要求的一个方式或可通过设计具有高锐度 (finesse) 光学谐振腔形成激光调制增强腔 (laser modulator enhancement cavity)。此外，如何在以上各种调制方案中选择或妥协得到最合适的激光-电子调制方案也是评估稳态微聚束电子储存环效能的关键之一。

16.4.3.2 激光调制器不稳定性：多粒子集体效应动力学

在激光调制器中，稳态微聚束电子储存环的多粒子集体效应可再分四种情况：

1. 单束团、单次经过
2. 多束团、单次经过
3. 单束团、多圈经过
4. 多束团、多圈经过

当电子经过调制波荡器 (modulator undulator) 时，除了受外部激光调制，电子束团由于经过波荡器形成扭摆运动 (wiggling motion)，将产生波荡器辐射。辐射光场按光速 c 向前直线传播，而运动的电子则按 $v < c$ 的速率在波荡器中扭摆前进。因此，辐射场将追上电子微束团串的前方临近几个微束团，从而扰动前方电子束。对于单次经过、单束团，当束团长度短于调制激光波长时，可以忽略上述集体效应。对于单次通过、多束团情况，足够高的微束团电荷将导致纵向束团崩溃不稳定性 (beam breakup instability, BBU)，参考图 16.21。根据分析²⁴，基于当前稳态微聚束方案设计的参数下，由于微束团电荷低于形成纵向束团崩溃不稳定性阈值电荷至少两个数量级，因此预期稳态微聚束方案应不受此集体效应影响。

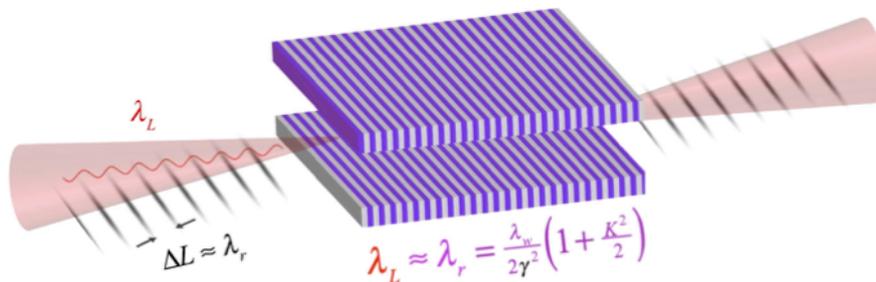


图 16.21: 电子微束团串经过激光调制器的示意图。

在实际稳态微聚束储存环运行模式下，电子束团将多次经过调制器，并持续与调制激光相互作用。这部分需要考虑电子束团逐圈经过激光调制器时，束团特性是否能够保持符合设计预期并稳定运行。即，电子束多次经过调制器的动力学过程。当电子多次经过激光调制器时，除受外部激光调制外，电子逐圈经历调制波荡器时产生的波荡器辐射中，共振成分的辐射波长与外部调制激光波长接近，将不可避免被囚禁、存在于谐振腔中。当电子在储存环中绕行一圈后，再次回到调制波荡器时，将感受到先前产生的波荡器辐射，形成一类似于 Robinson 不稳定性的“激光-电子束”反馈机制。对于多圈通过、单束团情况，初步分析²⁵表明，在特定条件下，此机制将导致一种新的、不同于 Robinson

²⁴C.-Y. Tsai et al., Coherent radiation induced longitudinal single-pass beam breakup instability of a steady-state microbunch train in an undulator, Phys. Rev. Accel. Beam **24**, 114401 (2021). <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevAccelBeams.24.114401>

²⁵C.-Y. Tsai, Longitudinal single-bunch instabilities driven by coherent undulator radiation in the cavity modulator of a

不稳定性，由波荡器相干辐射引致的集体不稳定性。此机制更类似于自由电子激光不稳定性²⁶。对于多圈通过、多束团情况，除了上述对于多圈单束团可能导致的集体效应外，电子微束团串单次经过调制波荡器时对部分电子束可能引起的扰动可能导致新的不稳定性机制。

最后，想提醒的是，这些基于稳态微聚束储存环方案衍生的集体效应至今仍在初步探索阶段，将为高亮度电子束流动力学集体效应研究提供崭新的发展契机。

16.4.4 研究现状总论

尽管目前 SSMB 的进展仍在非常初期可行性探索阶段，其所揭示的物理内涵将非常可观，比如：

- 电子束长从传统射频 RF 腔的 ~ 10 mm 量级下降至 $0.01 \sim \mu\text{m}$ 量级，五个数量级的差异势必“催生”许多有趣的、前所未见的动力学理论、调控技术、束测等问题。
- 由于激光的调制场梯度比射频 RF 场高了至少三个几个数量级，以往纵向弱聚焦的概念如换成纵向强聚焦，其衍生的一系列全新的束流动力学问题相信将值得探索。
- 加速、调制、控制电子束技术的挑战，从传统射频 RF 腔转化至激光谐振腔，且要求高平均调制功率等。
- 集体效应：金属真空管道电阻壁不稳定性、弯转段相干同步辐射效应、激光调制谐振腔内的自由电子激光效应、全环的束内散射等。
- 对 μm 、nm 级别束测技术的挑战。

关于最近 SSMB 整体进展，可参考 A.W. Chao, Storage Ring Based Steady State Microbunching, Future Light Source (FLS) workshop (2023), MO2L2. <http://fls2023.vrws.de/papers/mo2l2.pdf>。关于 SSMB 基础理论与原理验证实验的介绍，可参考 X.J. Deng, Theoretical and Experimental Studies on Steady-State Microbunching, Ph.D. Dissertation, Tsinghua University (2022). <https://link.springer.com/book/9789819957996> 或 <https://arxiv.org/abs/2206.10141>

16.4.5 浅谈：面向极紫外光刻应用的相干光源

半导体制程大概可分为以下几个程序，由先至后，有：

- 晶圆制备 \Rightarrow 从提纯硅砂到拉晶，得到圆柱形的硅单晶，再切成薄片，准备晶圆 (wafer)。然后，清洗、抛光、涂覆，以获得平滑的表面。晶圆为电子元件创建的基底。

steady-state microbunching storage ring, Nucl. Instru. Methods A **1042**, 167454 (2022). <https://doi.org/10.1016/j.nima.2022.167454>

²⁶C.-Y. Tsai, Theoretical formulation of multi-turn collective dynamics in a laser cavity modulator with comparison to Robinson and high-gain free-electron laser instability, Phys. Rev. Accel. Beam **25**, 064401 (2022). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevAccelBeams.25.064401>

- 光刻 (lithography 或 photolithography) ⇒ 利用光刻技术在晶圆上创建电路图。在晶圆表面涂覆一薄层光刻胶 (photoresist coating), 然后在晶圆上放置一个掩模 (mask)。掩模上有一个与正在创建的电子元件相对应的电路图。使用紫外光将图案从掩模转移到光刻胶层上, 称 pattern transfer。经过光照的光刻胶区域被移除, 留下晶圆上的图案表面。
- 掺杂 (doping) ⇒ 向晶圆添加杂质以改变其电学性质。常见的杂质类型是硼或磷, 少量添加以创建 P 型或 N 型半导体。
- 离子注入 (ion implantation) ⇒ 引入特定的杂质, 改变材料的电学性质, 其中离子被加速到高速, 然后注入到晶圆表面。
- 沉积 (deposition) ⇒ 在晶圆上沉积薄膜 (thin film) 材料以创建电子元件, 可以通过多种技术实现, 比如化学气相沉积 (chemical vapor deposition, CVD)、物理气相沉积 (physical vapor deposition, PVD) 和原子层沉积 (atomic layer deposition, ALD)。这些过程可用于沉积金属、氧化物和氮化物等材料。
- 刻蚀 (etching) ⇒ 从晶圆表面去除不必要的材料, 以创建所需的电子元件形状和结构。刻蚀可以通过多种技术实现, 比如湿刻蚀 (wet etching)、干刻蚀 (dry etching) 和等离子体刻蚀 (plasma etching)。这些过程使用化学物质或等离子体有选择性地去除晶圆上的材料。
- 封装和测试 ⇒ 将电子元件封装成最终产品, 可用于电子设备。这涉及将元件连接到基板, 如印刷电路板 (printed circuit board, PCB), 使用导线或其他手段将它们连接到其他元件。

半导体制程非常复杂, 涉及各种专用设备和材料。这些过程对于现代电子设备的创建至关重要, 并随着新技术的发展而不断演变。总体而言, 制造半导体芯片的过程可能需要数周到数月不等。在此制造过程中, 集成电路的精细度越高, 生产工艺越先进。在相同单位体积的材料中就能塞进更多的电子元件, 连接线也越细。一般来说, 精细度高的芯片, 其性能越好、功耗也能有效减小²⁷。

芯片光刻技术是半导体制造中关键的工艺步骤之一, 用于将设计好的电路图转移到硅片表面。极紫外光刻技术是近年半导体制程中非常重要的一环, 产生极紫外波段的相干光源是此光刻技术的首要条件。以下简短介绍当前基于激光引致等离子体机制产生极紫外光源所面临的问题/挑战, 作为引子, 给出基于高亮度电子加速器产生相干光源的一个重要应用: 面向极紫外光刻应用的契机。

²⁷有些读者可能会觉得集成度越高, 功耗未必越小。其实在芯片制造过程中, 精细度高意味着电子元件被制造得更小、更密集。这使得电流在芯片内部的传输路径更短, 电子移动的距离更短, 因此能够实现更快的操作速度。同时, 由于元件更小, 对电力的需求也较小, 因此功耗通常也会相对较低。留意, 虽然精细度高的芯片通常会有更好的性能和功耗表现, 但并不是绝对的。电路架构设计、材料选择等因素也会对性能和功耗产生影响。因此, 实际情况下还需全面考虑其它因素, 如芯片的制造工艺、设计优化等。

定律 16.1. 摩尔定律 (Moore's law)

由英特尔 (Intel) 创始人 Gordon E. Moore (1929-2023) 在 1965 年提出，在 1975 年修正，给出如下预测：

集成电路上可容纳的晶体管等数量，约每隔 18 至 24 个月便会成倍 ($\times 2$) 增加^a。

此定律反映了半导体技术不断进步、集成度提高的趋势。往后半个世纪多的时间里，半导体产业基本按照 Moore 当时的预测进展。此定律的核心思想：芯片上可容纳的晶体管数量随着时间的推移呈指数增长。这一趋势对计算机硬件性能的提升、成本的降低以及技术创新产生了深远的影响。

注“摩尔定律”一词本非 G.E. Moore 本人命名，而是由加州理工学院 Carver A. Mead 给出。



笔记 1965 年的原始论文可参考 G.E. Moore, Cramming more components onto integrated circuits, Electronics **38**, 8 (1965). <https://download.intel.com/newsroom/2023/manufacturing/moores-law-electronics.pdf>。更多讨论可参考 G.E. Moore, Lithography and the Future of Moore's Law, Proceedings Volume 2437, Electron-Beam, X-Ray, EUV, and Ion-Beam Submicrometer Lithographies for Manufacturing V (1995). <https://doi.org/10.1117/12.209151>。

^aThe number of transistors on an integrated circuit will double every two years with minimal rise in cost. □

根据摩尔定律，每隔 18 至 24 个月，芯片上的晶体管数量差不多成倍增加。随着芯片制程不断精进，EUV 光刻机需要使用更高的数值孔径以提高分辨率，但这也会导致更小的深度焦距和更大的光学畸变。光刻分辨率 R 由光源波长 λ 、数值孔径 NA (numerical aperture) 和工艺参数 k_1 (process parameter) 给出，有

$$R = k_1 \frac{\lambda}{\text{NA}} \quad (16.84)$$

其中，数值孔径 NA 定义如下：

定义 16.3. 数值孔径 NA

为无量纲物理量，定义如下：

$$\text{NA} = n \sin \theta_{\max} \quad (16.85)$$

其中， n 为折射率， θ_{\max} 为入射光锥 (半) 张角。

较高的数值孔径能够提高光学系统的光接收能力，同时增进系统分辨率。在显微镜等光学器件中，较高的数值孔径使系统能够捕捉被观察样品中的更多细节和微小结构。数值孔径 NA 是确定光学仪器性能和质量的关键参数之一。 □

为维持摩尔定律， R 将相应减小，即光刻光源的波长逐渐变短，因为光刻分辨率与

波长成线性关系。目前普遍采用的极紫外 (extreme ultraviolet, EUV) 光刻的波长约为 13.5 nm，与 Mo/Si 多层镜的反射率相匹配。

在 EUV 光刻中，几年前开始普遍采用的光源参数为平均功率约 250 W 基于激光引致等离子体 (laser-produced plasma, LPP) 机制的光源进行大规模生产，其工作原理为通过搭载 CO₂ 红外激光，轰击在锡材料，通过共振吸收，导致锡原子迅速升温、电离，从而产生等离子体。随着等离子体膨胀后冷却，电离电子释放出极紫外波段辐射。目前普遍存在的两个问题/挑战：

- 锡残留 (tin debris) 问题 ⇒ 在 EUV 光刻中，使用激光等离子产生锡等离子，同时使用锡液滴提供强烈的 EUV 光。这个过程可能导致锡残留物的产生，其中一些可能沉积在光学元件上，特别是在收集镜上。基于 LPP 机制的 EUV 光需要使用多层膜反射镜来传输和聚焦 EUV 光，对反射镜的表面精度要求极高。这种残留物的积累可能导致光刻机的性能下降，需要解决清理和维护的问题。克服此问题将需要更干净的光源、优化收集镜设计、更准确控制锡液滴、开发原地清理方法等。
- 随机效应 (stochastic impact) ⇒ 对 EUV 成像领域，随机效应指的是随机或概率性效应对结果图像的影响。在 EUV 光刻中，随机效应可能表现为半导体晶圆上印刷图案的未预期变化或缺陷。这是由于 EUV 波长光子和其它物理现象的离散性造成的。在 EUV 曝光过程中，晶圆上吸收的光子数量将低于传统非 EUV 光刻技术，主要是因为 EUV 光子具有更高的光子能量。如曝光剂量不足，晶圆上出现随机图案缺陷的概率会增加。随机效应在纳米尺度尤其显著，因为物质和能量的离散性在这个尺度上发挥更重要的作用。EUV 光刻面临的挑战在于控制和减轻这些随机效应，以确保在小尺度上可靠且可重复的图案形成。通常需要更高的 EUV 功率来抑制随机影响，优化曝光条件变得至关重要，确保足够的光子被吸收，以最小化图案缺陷的风险。

为缓解以上情况，针对扫描仪的最大通量估算缓解随机效应所需的 EUV 功率²⁸：对 3 nm 节点，将要求光源的平均功率至少 1.5 kW；对 2 nm 节点则要求 2.8 kW。因此，未来的 EUV 光刻将需要更强大的 EUV 光源。

目前工业界面向半导体光刻应用产生极紫外光的方式普遍为上述的激光引致等离子体机制。除了此机制外，也开展利用电子加速器产生 EUV 光源，比如：第 8 章介绍的基于传统射频腔的同步辐射、波荡器辐射或第 10 章介绍的自由电子激光等。同步辐射源于电子经过弯转磁铁产生，波荡器辐射则经过扭摆器或波荡器产生。尽管波荡器磁场相对弯转磁铁较弱，但是，第 5 章介绍过，其能产生频率范围更窄的辐射。当从波荡器辐射过渡到自由电子激光，甚至可以提高辐射场的相干性。一般来说，波荡器 (undulator) 能提供较高的辐射亮度 (brightness)，而扭摆器 (wiggler) 具有较强磁场，能提供更高的总光

²⁸N. Nakamura et al., High-power EUV free-electron laser for future lithography, Japanese Journal of Applied Physics **62**, SG0809 (2023). <https://iopscience.iop.org/article/10.35848/1347-4065/acc18c/pdf>.

子通量 (flux)。

作为极紫外光源的同步辐射，其主要优势是其本质上是清洁与连续波 (continuous-wave, CW) 模式运行。然而，对一般电子同步辐射储存环，其对光刻有效的 EUV 带宽内的辐射场输出功率仅有 30 W/2%BW。此外，如何将一同步辐射装置安装到现有半导体制程工厂的问题，特别是考虑到庞大辐射屏蔽所需的巨大空间，目前仍有待克服。部分研究认为目前传统的同步辐射源无法满足 EUV 光刻的功率要求，而提出利用自由电子激光或许可以在光刻有效的 EUV 带宽内产生足够的辐射功率。但目前来说仍存在类似问题，即 FEL-EUV 是一个非常庞大的设施，几乎不适用于半导体制造。尽管目前业内普遍未将同步辐射储存环或自由电子激光装置列入用作大规模生产的 EUV 源，但许多 EUV 的开发工具依赖并受益于同步辐射，比如，高数值孔径的曝光工具 (HiNA exposure tool)、EUV 波长干涉仪 (interferometry) 及 EUV 步进器 (stepper) 光学的光刻特性表征等。除同步辐射与自由电子激光外，近年来，基于稳态微聚束的电子同步储存环产生的 EUV 相干辐射、kW 量级高平均功率的光源也成为热门研究课题。

第十六章 补充习题

1. 准备一段 MATLAB 或 Mathematica 代码，利用讲义附录 C 给出的同步加速器装置参数，以这一章介绍的储存环相干同步辐射引起的微束团不稳定阈值条件，包含：
 - 基于 coasting beam 模型
 - 基于模式分解
 - 基于数值求解 VFP 方程

评估并总结哪些加速器装置与哪些理论模型预期一致，哪些不一致。

2. 考虑双能量储存环 (dual-energy storage ring) 情况，分析相干同步辐射引起的微束团不稳定性，给出阈值条件。

解 提示：可按不同模型分析。关于双能储存环介绍，可参考 F. Lin, Storage-ring Electron Cooler for Relativistic Ion Beams, IPAC2016 (WEPMW020). <https://accelconf.web.cern.ch/ipac2016/papers/wepmw020.pdf>。

