

电磁辐射与加速器束流动力学导论

**Introduction to Accelerator Beams, Collective Dynamics,
Electromagnetic Radiation and Free-electron Lasers**

作者：蔡承颖 (Cheng-Ying Tsai, C.-Y. Tsai)

特别声明

此笔记/讲义非最终版，内容可能存在笔误、谬误，仍在迭代修改中。此讲义不定期更新。

第十三章 集体效应的粒子动力学：Vlasov 方程

内容提要

- 相空间与分布函数
- Vlasov 方程稳态解、暂态解
- 势阱畸变
- 线性化 Vlasov 方程
- 积分方程
- Keil-Schnell 条件
- 模式分解：径向与角向
- 势阱畸变效应
- 微波不稳定性、Chao-Gareyte 定标定律
- 耦合束团不稳定性
- 电阻壁不稳定性

上一章介绍分析集体效应粒子动力学的宏粒子模型 (macroparticle model)。通过构建宏粒子模型，能够清楚地给出集体效应的物理图像。但是，作为定量分析，宏粒子模型给出的结果往往还不够令人满意。这是因为粒子束团由为数不少的粒子构成，在相空间形成一分布函数；粒子束团在集体效应影响下的整体特性仅由一个或两个宏粒子代表是不够精确的。因此，这一章介绍利用等离子体动理学理论 (kinetic theory) 分析粒子束团的集体动力学。

13.0 问答预览

1. 什么是 Vlasov 方程？在什么情况下成立？
⇒ Vlasov 方程是描述带电粒子束团在相空间中分布函数演化的方程。它适用于忽略粒子间碰撞效应的情况，即平均场近似。
2. 什么是势阱畸变效应？
⇒ 势阱畸变效应是指束团在加速器中运动时，由于受到纵向尾场或阻抗的影响，其纵向相空间分布偏离理想的高斯分布。这会导致束长、纵向束团质心位置和同步振荡频率发生变化。
3. 什么是微束团不稳定性？如何影响束团？
⇒ 微束团不稳定性是指束团中不同粒子之间由于高频阻抗或短程尾场相互作用导致的能量重新分布，最终形成束团内局部分布密度不断增大的现象。这会导致束团不稳定。
4. 什么是微波不稳定性？
⇒ 微波不稳定性是指束团中不同粒子之间的能量重新分布，导致束长和能散同时增加的现象。在一些文献中，不明显区分微波不稳定性与微束团不稳定性。
5. 什么是模式耦合不稳定性？如何影响束团？
⇒ 模式耦合不稳定性是指束团中 — 一般指单束团 — 不同振荡的基底分解模式之间由于尾场相互作用导致的能量交换，最终形成某些模式的振荡振幅不断增加的现象，最终导致束团不稳定。

6. 什么是头尾不稳定性？它与强头尾不稳定性的区别是什么？
⇒ 头尾不稳定性是指束团头部和尾部粒子之间的相互作用导致的能量交换，最终形成束团整体振荡的现象。它与强头尾不稳定性的区别在于，头尾不稳定性没有阈值条件，而强头尾不稳定性则存在阈值条件。
7. 什么是耦合束团不稳定性？它如何影响束团串？
⇒ 耦合束团不稳定性是指多个束团之间由于长程尾场相互作用导致的能量交换，最终形成多个束团整体振荡的现象。这会导致束团串不稳定，影响机器运行。
8. 什么是电阻壁不稳定性？
⇒ 电阻壁不稳定性是指束团与电阻壁之间的相互作用导致的能量交换，最终形成多个束团整体振荡的现象。与其它不稳定性机制的区别在于，电阻壁不稳定性主要由低频阻抗引起，并且存在长程尾场特性。
9. 什么是离子导致的集体不稳定性？如何抑制？
⇒ 离子导致的集体不稳定性是指束团与真空管道中的离子之间的相互作用导致的能量交换，最终形成束团振荡的现象。抑制离子导致的集体不稳定性需要控制束团串中留下适当长度的间隙，以避免离子云的形成。

13.1 无碰撞动理学方程

此小节先复习前面第 6 章介绍的相空间分布函数应满足的几个重要方程，在不同情境下，相空间有不同维度，满足对应的、不同的动理学方程。从最一般情况的 $6N$ 维相空间开始¹， $6N$ 维相空间分布函数满足 Liouville 定理，分布函数随时间演化的动力学方程为 Liouville 方程。

定理 13.1. 刘维尔 (Liouville) 定理

对于 $6N$ 维动力学系统，系统的状态可以由一个点描述，该点邻近的系统点形成其相空间分布函数 (或概率密度函数)，此函数随时间演化为一常数。或，在以位置坐标与其共轭动量坐标形成的相空间里，哈密顿系统的相空间体积不可压缩。

对六维动力学系统，在一个粒子附近的区域，当粒子在磁场或与速度无关的场中运动，其相空间分布函数 (或概率密度函数) 随时间演化为一常数。

证明 略，感兴趣的读者可参考等离子体理论的教科书。

注 严格上说，粒子加速过程 本身 (不考虑加速过程以外的其它任何效应) 适用于 Liouville 定理。但是，Liouville 定理不适用于电子加速导致的辐射效应，包含辐射阻尼、量子激发等，因为辐射场与粒子速度相关，参考 Lienard-Wiechert 场公式。□

定律 13.1. Liouville 方程

对一哈密顿动力学系统，描述 $6N$ 维相空间分布函数 (或概率密度函数) ρ 随时间 t 的演化，将相空间坐标写成 (\mathbf{q}, \mathbf{p}) ，其中， $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ ， $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)$ 。在空间中三个方向上有 $q = x, y, z, p = p_x, p_y, p_z$ 。

若仅考虑一个方向，则 $2N$ 维相空间分布函数 $\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t)$ 满足如下形式的 Liouville 方程：

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) = 0 \quad (13.1)$$

对于一般情况，则有

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{q}_i} \cdot \frac{d\mathbf{q}_i}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{p}_i} \cdot \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \right) = 0 \quad (13.2)$$

这里的 $\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_i}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i}$ 类似“梯度”运算，有时也写成 $\nabla_{\mathbf{q}_i}, \nabla_{\mathbf{p}_i}$ 。注意，下标 i 不是 (x, y, z) 。

¹其中，6 表示单个粒子的六个相空间坐标 (x, y, z, p_x, p_y, p_z) 或 $(x, x', y, y', z, \delta)$ ，总粒子数为 N 。

对一哈密顿动力学系统，如果已知系统哈密顿量 (Hamiltonian) 为 H ，则以上方程还可以写为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \{\rho, H\} = 0 \quad (13.3)$$

其中， $\{\bullet, H\} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \bullet}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \bullet}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)$ 为泊松括号 (Poisson bracket)。这里用了哈密顿运动方程。 □

以上结果可以更简洁地描述如下：

定理 13.2. 相空间面积为不变量

对于一保守哈密顿动力学系统，其相空间面积为不变量。

证明 可参考 Alexander Wu Chao, *Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators*, John Wiley & Sons (1993) 一书的 §6.1 或 Alexander Wu Chao, *Lectures on Accelerator Physics*, World Scientific (2020) 一书的 §8.5。 □

从第 6 章的讨论知道，对一具有 N 个粒子的束团 (通常 $N \sim 10^{5 \sim 10}$)， $6N$ 维相空间的维度太过庞大，虽然所有物理内涵都包含在此极高维度的相空间中，但分析单个粒子在 $6N$ 维相空间里的运动将非常复杂，更不用说是整个束团，几乎天方夜谭。因此，在 §6.2 节讨论了从 $6N$ 维相空间降维，形成六维相空间。

定理 13.3. 六维相空间坐标 (6-D phase space)

如果忽略系统中各个粒子之间的相互作用，则可以用退化的、六维 (而不是 $6N$ 维) 相空间描述该动力学系统。对于一个由 N 个粒子组成的保守 (conservative)、决定性 (deterministic)、无相互作用的动力学系统，可用六维相空间描述。

此时，六维相空间在某一时刻的每个点表示系统中每个粒子的运动状态，所有点形成的集合表征该时刻系统的运动状态。所有点随着时间在相空间中扫出的轨迹表征这个系统随时间的演化过程。

对于一个由 N 个粒子组成的保守、决定性、无相互作用的六维动力学系统，相空间分布函数满足 Vlasov 方程。如果存在长程相互作用 (long-range interaction)，则相空间分布函数仍满足 Vlasov 方程。 □

可以想见，利用六维相空间描述 N 个粒子的动力学势必牺牲/丢弃部分物理内涵，但对加速器束流动力学来说，这些差异不造成多大影响。这些牺牲换来大大简化的分析将是值得的。略去繁杂的推论过程，从 $6N$ 维相空间的 Liouville 方程，经过一些假设，在不同情境下，六维相空间将满足如下考虑碰撞项的 Vlasov-Fokker-Planck 方程或无碰撞项

的 Vlasov 方程。

定律 13.2. Vlasov-Fokker-Planck 方程

对一哈密顿动力学系统, 对一连续带电粒子束团(等离子体)分布, 描述其六维相空间连续分布函数(或概率密度函数) f 随时间 t 的演化, 将相空间坐标写成 (\mathbf{q}, \mathbf{p}) , 其中, $\mathbf{q} = (x, y, z)$, $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ 。对于束团内存在长程相互作用(long-range interaction), 且存在束团内的碰撞效应可以单一方向漂移项(drift)[或摩擦项(friction)]与扩散项(diffusion)等效描述, 则此六维相空间分布函数 $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t)$ 满足如下形式的 Vlasov-Fokker-Planck 方程:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \alpha \frac{\partial(pf)}{\partial p} + D \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \quad (13.4)$$

其中, 等式右边两项统称碰撞项。第一项称为漂移项或摩擦项, 沿单一方向等效力有 $\frac{dp}{dt} = -\alpha p$ 。第二项称扩散项, $D = \langle (\Delta p)^2 / \Delta t \rangle$ 。如果不考虑等式右边效应, 则方程退化为 Vlasov 方程。这里的相空间分布函数满足以下归一化条件

$$\iiint d\mathbf{q} \iiint d\mathbf{p} f(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t) = N \quad (13.5)$$

有些文献为了使 $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t)$ 函数更接近概率密度函数, 将 $\frac{f(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t)}{N} \rightarrow f(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t)$, 则有

$$\iiint d\mathbf{q} \iiint d\mathbf{p} f(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t) = 1 \quad (13.6)$$

宜留意不同文献采用的惯例。

对一哈密顿动力学系统, 如果不考虑碰撞效应的系统哈密顿量(Hamiltonian) H 已知, 则以上方程还可以写为

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = \alpha \frac{\partial(pf)}{\partial p} + D \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \quad (13.7)$$

其中, $\{\bullet, H\} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \bullet}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \bullet}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)$ 为泊松括号(Poisson bracket)。这里用了哈密顿运动方程。



笔记 乍看之下, VFP 方程等式右边只包含 $\frac{\partial}{\partial p}$ 而没有 $\frac{\partial}{\partial q}$, 好像少了对称性。这是因为一般常见的 VFP 方程的摩擦或扩散效应直接影响的是动量 p 而不是坐标 q 。□

注 注意, 如果考虑三个方向情况下的碰撞项, 一般形式的漂移项与扩散项较为复杂, 为张量(tensor)形式, 此处不论。

定律 13.3. Vlasov 方程、无碰撞的玻尔兹曼方程、Jeans 方程

对一哈密顿动力学系统, 对一连续带电粒子束团(等离子体)分布, 描述其六维相空间连续分布函数(或概率密度函数) f 随时间 t 的演化, 将相空间坐标写成 (\mathbf{q}, \mathbf{p}) , 其中, $\mathbf{q} = (x, y, z)$, $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ 。如果忽略束团内碰撞效应, 且束团内没有交

互作用或交互作用为长程作用 (long-range interaction), 则此六维相空间分布函数 $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t)$ 满足如下形式的 Vlasov 方程:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0 \quad (13.8)$$

其中, 相空间分布函数满足以下归一化条件

$$\iiint d\mathbf{q} \iiint d\mathbf{p} f(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t) = N \quad (13.9)$$

有些文献为了使 $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t)$ 函数更接近概率密度函数, 将 $\frac{f(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t)}{N} \rightarrow f(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t)$, 则有

$$\iiint d\mathbf{q} \iiint d\mathbf{p} f(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t) = 1 \quad (13.10)$$

宜留意不同文献采用的惯例。

对一哈密顿动力学系统, 如果已知系统哈密顿量 (Hamiltonian) 为 H , 则以上方程还可以写为

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0 \quad (13.11)$$

其中, $\{\bullet, H\} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \bullet}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \bullet}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \right)$ 为泊松括号 (Poisson bracket)。这里用了哈密顿运动方程。

注 此方程的物理图像: 对一哈密顿动力学系统 (保守、决定性、无交互作用), 当观察者与束团一同运动时, 束团在六维相空间的粒子密度 (或概率密度) 分布函数不随时间改变, 即 $df/dt = 0$ 。但是, 当观察者在实验室静止坐标 — 不是跟着束团一同运动时 — 看到的束团在相空间未必不随时间改变, 可能改变也可能不变, 即 $\partial f/\partial t \neq 0$ 。当 $\partial f/\partial t = 0$ 时, 称系统在实验室静止坐标达稳态。 □

注 如果 N 个粒子组成的束团存在内部交互作用, 那么 Vlasov 方程还成立吗? 或者, 还令人满意地成立吗?

注 在有些加速器社群文献中, 常称此方程为 Vlasov 方程。但是, 更合适的名称可能是“无碰撞的玻尔兹曼方程 (collisionless Boltzmann equation)”或 Jeans 方程。关于此一方程的命名与历史回顾, 感兴趣的读者可参考 M. Henon, Vlasov Equation? *Astron. Astrophys.* **114**, 211-212 (1982). <https://articles.adsabs.harvard.edu/pdf/1982A%26A...114..211H>

从此小节的标题“无碰撞动理学方程”可以看到, 以下讨论将重点讨论 Vlasov 方程及其解。这里先给出 Vlasov 方程的稳态通解形式。

定理 13.4. Vlasov 方程的稳态解

对一与时间无明显依存关系的哈密顿动力学系统 $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, Vlasov 方程

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0 \quad (13.12)$$

在稳态^a情况下, 有 $\partial f / \partial t = 0$ 。如果将其哈密顿量写成 $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, 则 Vlasov 方程的稳态通解有

$$f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \text{ 的任意函数形式} \quad (13.13)$$

证明 将 $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ 代入 Vlasov 方程, 利用哈密顿运动方程定义。

注 由于与时间无明显依存关系的哈密顿量 $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ 本身为不变量, 以上结果可以推广至

$$f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \text{任意运动不变量 (constant of motion) 的任意函数形式} \quad (13.14)$$

^a无论是不是稳态, 都有 $df/dt = 0$, 但是稳态情况下还有 $\partial f / \partial t = 0$ 。□

注 上面给出的结论是说“任意函数形式”, 形式不是唯一, 解也不是唯一。如何适当选择符合该动力学系统的解, 视不同问题而异。

作为一个对 Vlasov 方程稳态解的应用, 同时温故知新, 考虑电子束团横向相空间的一种特殊分布函数形式。由 §7.2 知, 加速器哈密顿量

$$\mathcal{H}_0(x, x'; s) = \frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{2}K(s)x^2 \quad (13.15)$$

其单粒子运动方程满足 Hill 方程

$$\frac{d^2x}{ds^2} + K(s)x = 0 \quad (13.16)$$

其中, $K(s) = K(s+L)$ 。通过 §7.3-§7.5 的介绍知道, 束团整体在横向相空间的分布函数形成椭圆形状分布。现在我们想试着利用 Vlasov 方程稳态解的一般形式验证这个图像, 用不同方式看待同一现象。束团横向相空间分布函数遵循 Vlasov 方程, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial x'} \cdot \frac{dx'}{ds} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (x') + \frac{\partial f}{\partial x'} \cdot (-Kx) &= 0 \end{aligned} \quad (13.17)$$

根据定理, 此偏微分方程的稳态通解为

$$f(x, x') = \text{任意运动不变量 (constant of motion) 的任意函数形式}$$

我们先要找一个“适当”的运动不变量。既然要描述束团整体的分布, 以束团发射度 ϵ 作为这个不变量或许不失为合理选择。由 §7.3 知,

$$\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2 = \epsilon = \text{不变量} \quad (13.18)$$

考虑此不变量以高斯函数合成，有

$$f(x, x') \propto \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2}{\epsilon}\right) \quad (13.19)$$

其中， $\beta, \alpha, \gamma = \frac{1+\alpha^2}{\beta}$ 为磁聚焦结构 (lattice) 的 Courant-Snyder 或 Twiss 参量。注意，此处不变量 ϵ 为单粒子发射度，其概念源于单粒子作用量，即 $\epsilon = 2I_x$ 。要从单粒子发射度的概念过渡到束团发射度，还需要一些论证。对束团中不同粒子，其相空间坐标 (x, x') 如果落在不同相椭圆，则其 I_x 不同，单粒子发射度 ϵ 也不同。而相空间分布函数 $f(x, x')$ 如果要能恰当描述束团整体，则上式指数中的分母 ϵ 不能选单粒子发射度，因为不同粒子座落在不同相椭圆。于是，要选一个适当的发射度，且必须是定值。合理的选择可以是束团发射度 ϵ_{beam} 。虽然这里仍用同一符号 ϵ 表示，但概念已经从单粒子发射度过渡到束团发射度了²。现在要求分布函数归一化，即 $\iint f(x, x') dx dx' = 1$ ，则有

$$f(x, x') = \frac{1}{2\pi\epsilon} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2}{\epsilon}\right) \quad (13.20)$$

这个解在相空间的特征恰好对应 §7.5 介绍的相空间椭圆，说明此解为自洽解。此外，此解也满足 §7.5 介绍的高斯束团分布束矩阵形式的二维情况：

$$f(\mathbf{X}_{2D}) = \frac{N}{(2\pi)\sqrt{\det \Sigma_{2D}}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \mathbf{X}_{2D}^T \Sigma_{2D}^{-1} \mathbf{X}_{2D}\right\} \quad (13.21)$$

其中， $\mathbf{X}_{2D} = [x \ x']^T$ 、 $\det \Sigma_{2D} = \epsilon^2$

$$\mathbf{X}_{2D}^T \Sigma_{2D}^{-1} \mathbf{X}_{2D} = \frac{\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2}{\epsilon} \quad (13.22)$$

$$\Sigma_{2D} = \begin{pmatrix} \langle x^2 \rangle & \langle x x' \rangle \\ \langle x x' \rangle & \langle x'^2 \rangle \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ -\alpha & \gamma \end{pmatrix}, \quad \Sigma_{2D}^{-1} = \frac{1}{\epsilon} \begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \quad (13.23)$$

到此为止，我们已经把第 7 章介绍的单粒子 Courant-Snyder 参量、束矩阵与这里介绍的 Vlasov 方程稳态解都集结在一个自洽的框架内。

²有些读者可能这么想：单粒子发射度的概念是随着磁聚焦结构 s 传输前进时，在相空间扫出的椭圆曲线的面积。而束团发射度的概念则是在固定位置 s 处，束团内许多粒子在相空间占据的面积。感觉两者的物理意义好像很不一样。并且，单电子的发射度不是统计学概念，而是通过哈密顿量导出，就是相空间椭圆曲线包围的面积。相对地，束团发射度就是一个统计学概念，也不是固定在 s 处的粒子的相空间面积。如何更好地理解？首先，单粒子对应作用量 (action)，束团对应发射度 (beam emittance)。这里采用了如下思路：

单粒子作用量 (action) → 单粒子发射度 (single-particle emittance) → 束团发射度 (beam emittance)

我们想用单粒子发射度关联这“作用量”与“束团发射度”的关系。这涉及统计学上的遍历假设：假设束团中的不同粒子除了瞬时的 (x, x') 坐标不同之外，它们都是同一类粒子。比如现在有一个 #1 电子在 t_1 时刻，相空间坐标是 (x_1, x'_1) 。那么在 t_1 时刻，束团中还有其它电子，比如，某个其它电子，暂且称 #2 电子，在 t_1 时刻有相空间坐标 (x_2, x'_2) 。现在，回到 #1 电子，当在 t_2 时刻时 ($t_2 > t_1$)，它的相空间坐标演化为 (x_2, x'_2) 。此时 #1 电子在 t_2 时刻的相空间坐标，其实可以视为是 t_1 时刻的 #2 电子。就是通过这个遍历假设，把单粒子作用量与束团发射度关联起来。这个遍历假设基于束团中的粒子要是同类的粒子。或许还会有个疑问：怎么保证在 t_1 时刻，确实存在有相空间坐标 (x_2, x'_2) 的 #2 电子？运气不好的话， t_1 时刻可能在相空间 (x_2, x'_2) 处恰好空着，什么都没有。为了避免这种情况，这里我们假设束团的相空间分布函数是“连续”的，而不是一个一个离散的粒子组成的有“很多空洞”的相空间分布。因此，如果要求连续的相空间分布函数，这个遍历假设就能成立。

定理 13.5. Vlasov 方程的暂态解

对一与时间无明显依存关系的哈密顿动力学系统 $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, 给定粒子初始条件 $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(t=0), \mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(t=0)$ 与初始束团相空间分布函数 $F(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0; t=0)$ 。当粒子的相空间轨迹 $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t), \mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t)$ 解得后, 满足 Vlasov 方程

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0 \quad (13.24)$$

的相空间分布函数随时间演化的解 $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t)$ 可以写成

$$f(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t) = F[\mathbf{q}_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \mathbf{p}_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)] \quad (13.25)$$

其中, $\mathbf{q}_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ 即是 $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t)$ 的反函数, $\mathbf{p}_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ 即是 $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t)$ 的反函数。

证明 将此解形式代入 Vlasov 方程即得证。



笔记 想一下 $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t)$ 解的物理图像: 是不是“回溯历史”的概念?

注 这个定理没有告诉我们怎么解得 $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t), \mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t)$ 。如何解得 $\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)$ 需要靠前面第 6 章介绍的哈密顿力学。即使得到了粒子相空间轨迹 $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t), \mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t)$, 有时候其反演函数未必好求。很多时候, 需要通过数值计算求解并保存粒子在过去时刻的历史轨迹, 提供后来时刻反演时, 方便回溯、查找粒子相空间坐标。少数幸运的情况, 反演函数能够通过解析解得到。

注 此种求解偏微分方程的技巧称 method of characteristics, 或称 semi-Lagrangian 法。□

练习 13.1 分析一维简谐振子的相空间分布函数如何随时间演化。 ■

解 一维简谐振子的哈密顿量为

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2}$$

其相空间分布函数满足 Vlasov 方程, 有

$$\frac{\partial f}{\partial t} + p \frac{\partial f}{\partial x} - \omega^2 x \frac{\partial f}{\partial p} = 0$$

通过求解哈密顿运动方程, 可以得到 t 时刻的粒子相空间轨迹

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{p_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

$$p(t) = -\omega x_0 \sin(\omega t) + p_0 \cos(\omega t)$$

对应的反函数为

$$x_0 = x \cos(\omega t) - \frac{p}{\omega} \sin(\omega t),$$

$$p_0 = \omega x \sin(\omega t) + p \cos(\omega t)$$

根据上面定理, t 时刻相空间分布函数可写为

$$f(x, p; t) = F\left(x \cos(\omega t) - \frac{p}{\omega} \sin(\omega t), \omega x \sin(\omega t) + p \cos(\omega t)\right)$$

其中, F 为初始时刻的相空间分布函数。图 13.1 给出钟形函数作为分布函数随时间演化的相空间样貌。感兴趣的读者, 可试着利用 MATLAB 重复此结果。 ■

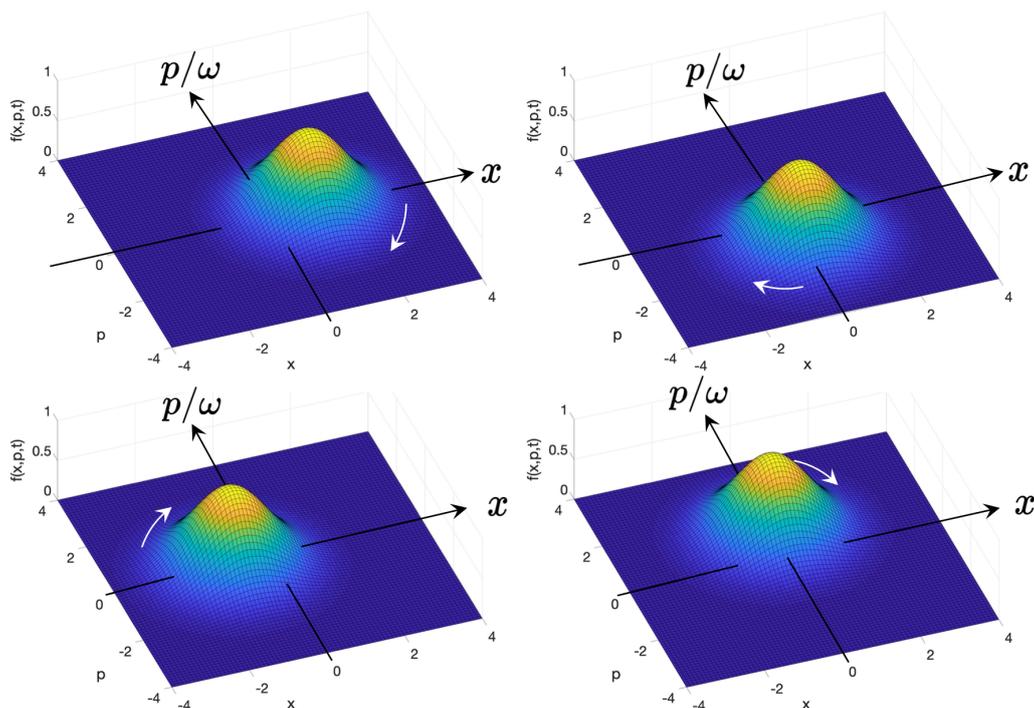


图 13.1: 一维简谐振子在 $\omega t = 0$ (左上), $\omega t = \pi/2$ (右上), $\omega t = \pi$ (左下), $\omega t = 3\pi/2$ (右下) 时刻的相空间分布函数。为了体现相空间演化, 这里假设初始分布函数的中心在 x 轴存在偏移 $x_0 = 1$ 。由上方俯视, 相空间分布函数绕着坐标中心顺时针旋转。

上面介绍的从 Liouville 方程, 因为在超高维的 $6N$ 空间维度求解过于复杂, 一步步妥协、添加限制条件后, 得到六维相空间的 Vlasov-Fokker-Planck 方程, 忽略碰撞项后, 总算得到 Vlasov 方程。即使忽略碰撞项, 求解完整的 Vlasov 方程或相空间分布函数 $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t)$ 随时间的演化方程

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0 \quad (13.26)$$

仍是极具挑战的任务。想想为什么? 困难的根源在 $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ 项, 因为此项包含了外部场 \mathbf{F}_{ext} 与束团自场 \mathbf{F}_{coll} , 其中, \mathbf{F}_{coll} 与束团分布函数 f 相关 (参考 §11.7.3)。由此, $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ 这两项中都含有 f , 故 Vlasov 方程本质上是一个非线性偏微分方程。理论分析一般采取的方式是迭代求解 (iteration) 或称微扰法 (perturbation), 先求零阶情况的解, 然后将零阶解作为已知, 接着求解一阶情况。

什么是零阶情况? 什么是一阶情况? 既然我们考虑的是束团集体效应, 零阶情况对应的就是分析束团运动时忽略集体效应, 即纯光学 (pure optics) 情况, 也就是第 7 章、第 8 章介绍的内容。注意, 零阶情况对应的除了由加速器磁聚焦结构或 RF 腔对束团的影响, 对电子加速器来说, 还需考虑可能的同步辐射效应³。一阶情况则是考虑在纯光学解作为已知的前提下, 将集体效应视为微扰效应, 考虑纯光学解受到尾场、阻抗等扰动时, 束团整体的稳定性。

³如果对质子加速器, 当能量不是太高时, 可忽略同步辐射效应, 则零阶情况的分析相对简单。



笔记 进入下一节前, 先仔细想想, 上述零阶情况与一阶情况的认定是否合理?

13.2 线性化 Vlasov 方程：零阶分析

回忆上一节最后的问题，上面论述的零阶情况与一阶情况是否合理？先说答案：大致合理，但存在瑕疵。就是说，存在一个效应被忽略了，该效应称势阱畸变 (potential well distortion, PWD) 效应。在解释势阱畸变之前，我们先回到 Vlasov 方程，考虑一维情况，即 $\mathbf{q} = z, \mathbf{p} = \delta$ ，将 t 换成 s ，则有

$$\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{ds} + \frac{\partial f}{\partial \delta} \cdot \frac{d\delta}{ds} = 0 \quad (13.27)$$

其中，在 §8.2 学过，有

$$\begin{aligned} \frac{dz}{ds} &\equiv z' = -\eta\delta \\ \frac{d\delta}{ds} &\equiv \delta' = \frac{qV_{\text{RF}}}{E_0C_0} \sin\left(\phi_{\text{RF}} - \frac{\omega_{\text{RF}}}{c}z\right) - \frac{U_0}{E_0C_0} \end{aligned} \quad (13.28)$$

现在，将能量偏差式子右边加一项由于纵向尾场或阻抗的贡献，变成

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{ds} &\equiv \delta' = \frac{qV_{\text{RF}}}{E_0C_0} \sin\left(\phi_{\text{RF}} - \frac{\omega_{\text{RF}}}{c}z\right) - \frac{U_0}{E_0C_0} + \frac{\Delta\mathcal{E}(z)}{E_0C_0} \\ &= \left[\frac{d\delta}{ds}\right]_0 + \left[\frac{d\delta}{ds}\right]_1 \end{aligned} \quad (13.29)$$

其中，考虑 $\sin\phi_{\text{RF}} = U_0/qV_{\text{RF}}$ ，则零阶量

$$\left[\frac{d\delta}{ds}\right]_0 = \frac{qV_{\text{RF}}}{E_0C_0} \sin\left(\phi_{\text{RF}} - \frac{\omega_{\text{RF}}}{c}z\right) - \frac{U_0}{E_0C_0} = \frac{\omega_s^2}{2\eta c^2}z \quad (13.30)$$

这里假设束团长度相比于 RF 波长短很多。

一阶小量项 $\left[\frac{d\delta}{ds}\right]_1 = \frac{\Delta\mathcal{E}(z)}{E_0C_0}$ 有 (参考 §11.7.5)

$$\frac{\Delta\mathcal{E}(z)}{E_0C_0} = -\frac{1}{E_0C_0} \int_z^\infty d\zeta \lambda(\zeta) W_{\parallel}(z - \zeta) = -\frac{q}{E_0C_0} \int_z^\infty d\zeta \int_{-\infty}^\infty d\delta f(\zeta, \delta) W_{\parallel}(z - \zeta) \quad (13.31)$$

这里的线电荷分布 $\lambda(z) = q \int_{-\infty}^\infty f(z, \delta) d\delta$ 为相空间分布函数在 z 的投影 (即，对 δ 积分)。由此可知， $\frac{\partial f}{\partial \delta} \cdot \frac{d\delta}{ds}$ 这两项中都含有分布函数 f ，故 Vlasov 方程本质上是一个非线性偏微分方程。

现按微扰理论，假设 $f = f_0 + f_1$ ，其中， $f_1 \ll f_0$ 。这里的 f_0 是零阶解， f_1 为一阶解，将表征集体效应的动力学过程。将此代入 Vlasov 方程，有零阶方程

$$\frac{\partial f_0}{\partial s} + \frac{\partial f_0}{\partial z} \cdot \frac{dz}{ds} + \left[\frac{\partial f_0}{\partial \delta} \cdot \frac{d\delta}{ds}\right]_0 = 0 \quad (13.32)$$

与一阶方程

$$\frac{\partial f_1}{\partial s} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \cdot \frac{dz}{ds} + \left[\frac{\partial f_1}{\partial \delta} \cdot \frac{d\delta}{ds}\right]_1 = 0 \quad (13.33)$$

稍后会发现，零阶方程 $\left[\frac{\partial f_0}{\partial \delta} \cdot \frac{d\delta}{ds}\right]_0$ 项的取舍有些微妙。我们先看一阶方程，其中

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \delta} \cdot \frac{d\delta}{ds}\right]_1 = \frac{\partial f_0}{\partial \delta} \cdot \left[\frac{d\delta}{ds}\right]_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \delta} \cdot \left[\frac{d\delta}{ds}\right]_0 + \frac{\partial f_1}{\partial \delta} \cdot \left[\frac{d\delta}{ds}\right]_1 \quad (13.34)$$

此一阶项，特别是 $\frac{\partial f_0}{\partial \delta} \cdot \left[\frac{d\delta}{ds}\right]_1$ ，将导致多姿多彩的集体效应。此处

$$\left[\frac{d\delta}{ds}\right]_1 = -\frac{q}{E_0C_0} \int_z^\infty d\zeta \int_{-\infty}^\infty d\delta f_1(\zeta, \delta) W_{\parallel}(z - \zeta) \quad (13.35)$$

我们将在下一小节重点讨论一阶项，现在先回到零阶项。眼尖的读者可能猜到零阶项的微妙之处了。

如果取零阶项为如下形式

$$\left[\frac{\partial f_0}{\partial \delta} \cdot \frac{d\delta}{ds} \right]_0 = \frac{\partial f_0}{\partial \delta} \cdot \left[\frac{d\delta}{ds} \right]_0 \quad (13.36)$$

则其解为“纯光学”解，即零阶 Vlasov 方程 f_0 的解与尾场函数 W_{\parallel} 无关。

但如果取零阶项为如下形式

$$\left[\frac{\partial f_0}{\partial \delta} \cdot \frac{d\delta}{ds} \right]_0 = \frac{\partial f_0}{\partial \delta} \cdot \left[\frac{d\delta}{ds} \right]_0 \quad (13.37)$$

其中，

$$\left[\frac{d\delta}{ds} \right]_0 = \left[\frac{d\delta}{ds} \right]_0 - \frac{q}{E_0 C_0} \int_z^{\infty} d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} d\delta f_0(\zeta, \delta) W_{\parallel}(z - \zeta) \quad (13.38)$$

注意到，积分里的 f 取 f_0 ，非 f_1 。采用此种形式的零阶 Vlasov 方程，解得的 f_0 将与尾场函数 W_{\parallel} 有关。这时候 f_0 的解由于尾场函数的关系，与“纯光学”解存在偏差，此效应称势阱畸变效应， f_0 满足的方程称 Haissinski 积分方程，以下将讨论。

回顾以上分析，最初在能量偏差式子右边加一项由于纵向尾场或阻抗的贡献。其实，更正式的处理方式为在哈密顿量加一项由于纵向尾场或阻抗的贡献，即⁴

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(z, \delta) &= -\frac{1}{2}\eta\delta^2 + \frac{qcV_{\text{RF}}}{\omega_{\text{RF}}E_0C_0} \left[\sin(\phi_s) \cdot \frac{\omega_{\text{RF}}z}{c} - \cos\left(\phi_s - \frac{\omega_{\text{RF}}z}{c}\right) \right] - \frac{1}{E_0C_0} \int_{-\infty}^z \Delta\mathcal{E}(\zeta) d\zeta \\ &\approx -\frac{1}{2}\eta\delta^2 - \frac{\omega_s^2}{2\eta c^2} z^2 - \frac{1}{E_0C_0} \int_{-\infty}^z \Delta\mathcal{E}(\zeta) d\zeta \end{aligned} \quad (13.39)$$

其中， $\Delta\mathcal{E}(z) = -\int_z^{\infty} dz' \lambda(z') W_{\parallel}(z - z')$ 。注意，这里第二行近似符号假设了束团长度相比于 RF 波长短很多。此哈密顿量形式可以视等式右边第一项为动能项，第二项与第三项为势能项。由此哈密顿量可看出势阱畸变的物理图像。以下先给出势阱畸变的定性描述，再定量分析。

定义 13.1. 势阱畸变 (potential well distortion)

已知在粒子储存环加速器中，RF 腔除补偿能量损失外，还提供粒子纵向聚焦，因而有 phase space bucket 概念。存在纵向尾场或阻抗时，等同于提供纵向势能微扰，导致势阱畸变。当系统达平衡时，束团的纵向相空间分布由于纵向势能阱畸变，其相空间分布函数也将偏离“纯光学”时的分布形态。

注 此分布函数仍为零阶解，但有别于“纯光学”解。 □

⁴此处还有一个隐性假设：平滑近似，适用于纵向同步振荡相对缓慢情况。即，假设在储存环中，纵向动量紧缩因子、RF 腔纵向聚焦、尾场函数等都均匀分布在储存环中。

这里的哈密顿量无时间的明显依存关系，由定理 13.4 知，对应零阶 Vlasov 方程

$$\frac{\partial f_0}{\partial s} + \frac{\partial f_0}{\partial z} \cdot \frac{dz}{ds} + \frac{\partial f_0}{\partial \delta} \cdot \left[\frac{d\delta}{ds} \right] = 0 \quad (13.40)$$

f_0 的解可写成 (包含尾场项的) \mathcal{H} 的任意函数形式

$$f_0(z, \delta) = f_0(\mathcal{H}) \quad (13.41)$$

其具体形式或简单、或复杂，此刻还不知道。当不妨先考虑一个简化情况，即当忽略集体效应时，对电子储存环，系统达平衡时，其相空间分布满足高斯分布，即

$$f_0(z, \delta) = \frac{N}{2\pi\sigma_z\sigma_\delta} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma_\delta^2}\right) \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right) = \frac{N}{2\pi\sigma_z\sigma_\delta} \exp\left(\frac{\mathcal{H}_0}{\eta\sigma_\delta^2}\right) \quad (13.42)$$

其中，哈密顿量 $\mathcal{H}_0 = -\frac{1}{2}\eta\delta^2 - \frac{\omega_s^2}{2\eta c^2}z^2$ 。这里使用了 §8.2 介绍过的结果：当系统达平衡时，电子储存环中，关联束团长度与能散的关系式 $\sigma_z = \frac{c|\eta|}{\omega_s}\sigma_\delta$ 。

此外，§8.4.1 介绍过，在电子储存环中，当系统达平衡时，束团能散由同步辐射阻尼与量子激发决定。改变 RF 腔加速电压 V_{RF} 会影响束团长度，但不影响束团能散。这里我们冒昧认定尾场函数扮演的角色如同提供纵向势能的 RF 腔，因此，尾场项不影响束团能散⁵。由此，可将上式中包含尾场项的哈密顿量代入“纯光学”解的 $f(z, \delta)$ ，即

$$f_0(z, \delta) = \frac{N}{2\pi\sigma_z\sigma_\delta} \exp\left(\frac{\mathcal{H}}{\eta\sigma_\delta^2}\right) \quad (13.43)$$

按 $\lambda(z) = q \int_{-\infty}^{\infty} f_0(z, \delta) d\delta$ ，上式可写成线电荷分布函数形式

$$\lambda(z) = \lambda_0 \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_z^2} - \frac{1}{\eta\sigma_\delta^2 E_0 C_0} \int_{-\infty}^z \Delta\mathcal{E}(\zeta) d\zeta\right) \quad (13.44)$$

其中， λ_0 为待定系数，由 $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda(z) dz = qN$ 决定。注意，上面 $\lambda(z)$ 一式不是公式 (expression)，而是一方程式 (equation)，是一个需要求解 $\lambda(z)$ 的方程式！仔细考察后，会发现，这个方程待解的物理量为线电荷分布函数，藏在等式右边的指数积分项中。此非线性积分方程称 Haissinski 方程。求解一般情况下的 Haissinski 方程不是一件容易的任务，细节此处不论。

定理 13.6. Haissinski 积分方程

在储存环加速器中，存在集体效应时，对束团动力学产生影响的合成场除了外部场 (主导场) 外，还有短程尾场或宽带阻抗等微扰场。此时，对束团的分布的零阶效应，或称静态 (stationary) 效应，将导致束团线密度分布的微小修正。假设束团能散分布为高斯形式，则 Haissinski 给出尾场或阻抗微扰修正后的束团纵向一维线密度分布函数应该遵循如下积分方程：

$$\lambda(z) = \lambda_0 \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_z^2} + \frac{q}{\eta\sigma_\delta^2 E_0 C_0} \int_{-\infty}^z d\zeta \int_{\zeta}^{\infty} dz' \lambda(z') W_{\parallel}(\zeta - z') d\zeta\right) \quad (13.45)$$

其中， $z > 0$ 表束团前方， q 为粒子电荷单位^a， η 为滑相因子， σ_δ 为束团能散，

⁵尾场作为集体效应的驱动源，怎么不影响束团能散，更何况第 11 章讨论过尾场或阻抗导致的束团能散增加。其实，尾场或阻抗会影响束团能散，只是将此效应归类到一阶 Vlasov 方程，由解 f_1 体现。此处作为零阶方程解， f_0 尽管包含尾场效应，但排除其对束团能散的影响。

E_0 为粒子能量, C_0 为储存环周长, $\lambda(z) = q \int_{-\infty}^{\infty} f_0(z, \delta) d\delta$, λ_0 为待定系数, 由 $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda(z) dz = qN$ 决定, W_{\parallel} 为纵向尾场函数。

注 当束团处于零电荷极限时, $W_{\parallel} \rightarrow 0$, 一维线密度分布函数为高斯分布, 对应到电子储存环纯光学情况。这个分布形态的结果是由于求解 Haissinski 方程之前已经假设了束团能散分布为高斯形式。如果束团能散分布不是高斯形式, 那么 Haissinski 方程的解未必为此形式。对电子束团而言, 其平衡态的能散分布为高斯形式^b, 与同步辐射效应有关。如果不是电子束, 比如不太产生同步辐射的质子束, 其平衡态的能散分布由初始分布决定, 未必非得是高斯形式。

注 给定“纯光学”时的束团参数后, 考虑了尾场的 Haissinski 方程未必总是有解。当 Haissinski 方程无解时, 表征系统不稳定。当 Haissinski 方程存在稳定的 f_0 解时, 仍不代表系统稳定; 仍需进一步考察一阶解 f_1 的稳定性。

注 Haissinski 积分方程为 (非常) 非线性方程, 当流强高时, 未必容易求解。

注 此积分方程由 J. Haissinski 在 1973 年提出, 原始论文可参考 J. Haissinski, Exact longitudinal equilibrium distribution of stored electrons in the presence of self-fields, *Nuovo Cimento B*, **18**, 72-82 (1973). <https://doi.org/10.1007/BF02832640>

^a对电子, $q = -e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C} < 0$ 。

^b这里没有给出证明。证明需要用到 Vlasov-Fokker-Planck 方程, 细节可参考 Alexander Wu Chao, *Special Topics in Accelerator Physics*, World Scientific (2022) 一书的 §1.3。

忽略求解 Haissinski 方程细节, 图 13.2 展示零阶 Vlasov 方程解或势阱畸变效应的一例。假设短程尾场或宽带阻抗。由图可以看到, 束团分布不再对 $z = 0$ 左右对称, 而是“前倾”。当此电子储存环操作在 above transition⁶时, 此“前倾”表示束团内多数粒子比参考粒子 ($z = 0$) 更早抵达 RF 腔, 为束团由于尾场损耗能量自 RF 腔获得额外能量补偿的结果。当电荷量趋近于零 (即“纯光学”情况) 时, 电子束团为高斯分布; 当束团电荷量增加时, 束团分布开始偏离高斯分布, 前倾将更明显; 当电荷量再高时, 稳态解将不复存在。注意, 束团分布并不总是前倾, 可能“后倒”, 视储存环操作在 above transition 或 below transition。此外, 束团倾斜时可能伴随束长改变, 或拉伸或变短, 视阻抗函数的虚部是正或负等而定。

定理 13.7. 势阱畸变导致的束团分布

基于线性化 Vlasov 方程的零阶分析, 可给出束长 $\sigma_z(I_b)$ 对束团电流的关系, 应满

⁶回忆 §8.2 介绍, 此时有 $z' = -\eta\delta$ 或 $\dot{\tau} = \alpha_c\delta$ 。

足如下方程

$$\left(\frac{\sigma_z}{\sigma_{z0}}\right)^3 - \left(\frac{\sigma_z}{\sigma_{z0}}\right) + \frac{\alpha_c I_b |e|}{4\sqrt{\pi}\nu_{s0}^2 E_0} \cdot \operatorname{Im}\left(\frac{Z_{\parallel}}{n}\right)_{\text{eff}} \cdot \left(\frac{R}{\sigma_{z0}}\right)^3 = 0 \quad (13.46)$$

其中，

- $\sigma_z = \sigma_z(I_b)$, I_b 为束团峰值电流
- σ_{z0} 为“纯光学”情况下的束长
- $R = C/2\pi$ 为储存环平均半径
- $\alpha_c \approx \eta$ 为动量紧缩因子
- ν_{s0} 为“纯光学”情况下的 synchrotron tune
- E_0 为粒子参考能量
- $\left(\frac{Z_{\parallel}}{n}\right)_{\text{eff}} \in \mathbb{C}$ 为有效阻抗 (effective impedance), 参考 §11.7.6

略去推导细节, 上述方程有如下一般结果:

	above transition $\eta > 0$	below transition $\eta < 0$
束团纵向质心	前倾	后倒
束长	$\operatorname{Im} Z_{\parallel}(k) < 0 \Rightarrow$ 拉伸	$\operatorname{Im} Z_{\parallel}(k) < 0 \Rightarrow$ 压缩
	$\operatorname{Im} Z_{\parallel}(k) > 0 \Rightarrow$ 压缩	$\operatorname{Im} Z_{\parallel}(k) > 0 \Rightarrow$ 拉伸

留意, 上面方程只给出束长拉伸或压缩, 前倾或后倒无法从 $\sigma_z(I_b)$ 得到。

注 大多数 (非全部) 的储存环为 $\operatorname{Re} Z_{\parallel}(k) > 0$, 且虚部多为感性阻抗, 即 $\operatorname{Im} Z_{\parallel}(k) < 0$ 。

证明 参考 Alexander Wu Chao, *Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators*, John Wiley & Sons (1993) 一书的 pp.279-290。 □



笔记 这里介绍的 Haissinski 方程仅包含一种尾场。如果束团感受到的尾场不只一种, 一个直观的方法可以把几种不同尾场加总之后视为一个已知函数, 代入求解 Haissinski 方程。但是, 这种求解有时候非常困难, 思考一下有没有什么其它方法?

顾名思义, 势阱畸变的物理根源为合成场 — 外部 RF 场与纵向尾场 — 偏离纯光学情况而导致粒子束团在平衡时由于感受到势能改变, 从而偏离原先平衡时的纯光学分布, 形成新的平衡分布。除了分布形态偏离, 束团在势能阱内的纵向同步振荡频率也会跟着改变。由前面给出的哈密顿量

$$\mathcal{H}(z, \delta) = -\frac{1}{2}\eta\delta^2 - \frac{\omega_s^2}{2\eta c^2}z^2 + \frac{q}{E_0 C_0} \int_{-\infty}^z d\zeta \int_{\zeta}^{\infty} dz' \lambda(z') W_{\parallel}(\zeta - z') \quad (13.47)$$

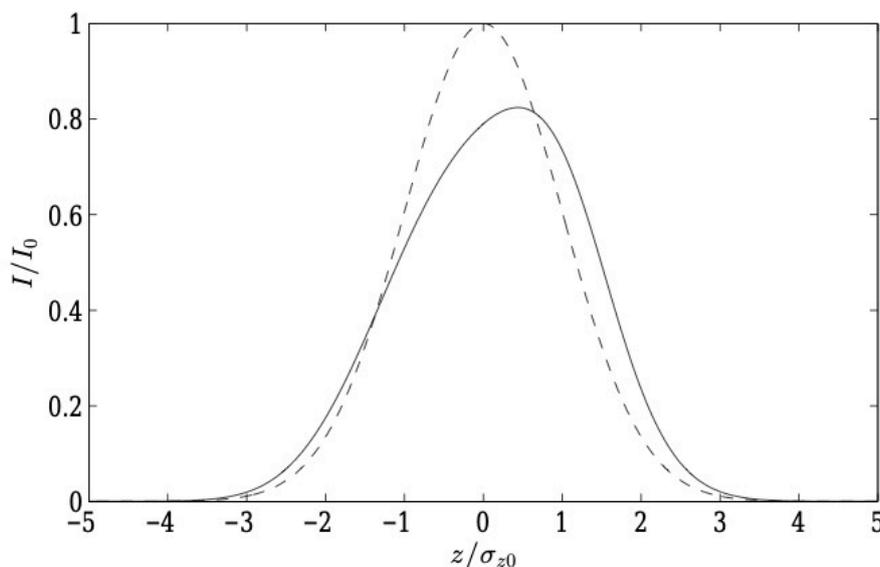


图 13.2: 虚线表示“纯光学”情况下的束团线电荷分布, 为高斯形式。实线表示存在尾场时, 势阱畸变导致的束团线电荷分布。此处假设短程尾场或宽带阻抗。可以看到, 束团分布不再对 $z = 0$ 对称, 而是“前倾”。当此电子储存环操作在 **above transition** 时, 此“前倾”表示束团内多数粒子比参考粒子 ($z = 0$) 更早抵达 RF 腔, 为束团由于尾场损耗能量自 RF 腔获得额外能量补偿的结果。图例取自 A. Wolski 一书。

有同步振荡频率偏移

$$\begin{aligned}
 \Delta\omega_s &\approx -\frac{\eta c^2}{\omega_s} \frac{q}{E_0 C_0} \int_0^\infty dz' \lambda(z') W'_\parallel(-z') \\
 &= -i \frac{\eta c^2 q}{4\pi\omega_s E_0 C_0} \int_{-\infty}^\infty d\omega \tilde{\lambda}(\omega) \frac{\omega}{c} Z_\parallel(\omega) \\
 &= -i \frac{\eta c^2 q}{2\omega_s E_0 C_0^2} \sum_{p=-\infty}^\infty \tilde{\lambda}(p\omega_0) p\omega_0 Z_\parallel(p\omega_0)
 \end{aligned} \tag{13.48}$$

其中, $\tilde{\lambda}(\omega)$ 为 $\lambda(z)$ 的傅里叶变换。最后一个等号为考虑束团在储存环中多圈绕行的情况, 对短程尾场或宽带阻抗, 可做如下代换

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{\omega_0} \rightarrow \sum_{p=-\infty}^\infty \tag{13.49}$$

当一束团视为点电荷时, 有 $\tilde{\lambda} = Nq$, 其中, N 为束团内总粒子数, 此时在储存环中多圈绕行的情况有

$$\Delta\omega_s = -i \frac{\eta c^2 q^2 N}{2\omega_s E_0 C_0^2} \sum_{p=-\infty}^\infty (p\omega_0) p\omega_0 Z_\parallel(p\omega_0) \tag{13.50}$$

对应到 §12.3.2 讨论 Robinson 不稳定性时的结果。

🔴 **练习 13.2** 试证明以上结果。 ■

🟢 **解** 参考 Alexander Wu Chao, *Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators*, John Wiley & Sons (1993) 一书 pp. 290-291。 ■

这里给出 $\Delta\omega_s$ 符号的物理意义。当 $\Delta\omega_s > 0$ 时, 即尾场或阻抗导致同步振荡频率增

加，表示集体效应增加了对束团的纵向聚焦，因此在势阱内振荡变快。同理，当 $\Delta\omega_s < 0$ 时，即尾场或阻抗导致同步振荡频率减小，表示集体效应抵消了 RF 腔对束团的纵向聚焦，因此在势阱内振荡变慢。一般来说，避开共振情况，较大的同步振荡频率能够使束团较稳定。

 **练习 13.3** 考虑 RLC 形态的尾场或阻抗导致的同步振荡频移，假设束团分布为高斯分布，则有

$$\Delta\nu_s = \frac{\Delta\omega_s}{\omega_0} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{Nr_e\eta c^2}{4\pi^2\gamma\omega_s\sigma_z^2} \frac{R_S}{Q} \begin{cases} -\frac{c}{\omega_R\sigma_z}, & \text{long bunch} \\ \frac{\omega_R\sigma_z}{c}, & \text{short bunch} \end{cases} \quad (13.51)$$

其中，long bunch 表示 $\sigma_z > c/\omega_R$ ，short bunch 表示 $\sigma_z < c/\omega_R$ 。由此可看出，RLC 形态的尾场阻抗导致长束团 $\Delta\omega_s < 0$ 倾向于更拉伸（因为抵消了部分纵向聚焦），短束团 $\Delta\omega_s > 0$ 倾向于更压缩（因为增强了纵向聚焦）。 ■

 **笔记** 总的来说，势阱畸变会导致：纵向束团分布前倾或后倒、束长拉伸或压缩、束团整体同步振荡频率偏移。对势阱畸变效应的更多讨论，可参考 Alexander Wu Chao, *Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators*, John Wiley & Sons (1993) 一书的 §6.2。

13.3 线性化 Vlasov 方程：一阶分析

上一节介绍了集体效应的零阶效应，势阱畸变将导致平衡时的束团分布偏离纯光学情况下的分布，且纵向同步振荡频率也小幅改变。此处考虑一阶效应。按严谨做法，零阶分析的结果，即 Haissinski 方程的 f_0 解，应该作为已知代入一阶方程

$$\frac{\partial f_1}{\partial s} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \cdot \frac{dz}{ds} + \frac{\partial f_0}{\partial \delta} \cdot \left[\frac{d\delta}{ds} \right]_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \delta} \cdot \left[\frac{d\delta}{ds} \right]_0 = 0 \quad (13.52)$$

然后以此为前提求解一阶解 f_1 。这里为了简化起见，零阶解不用 Haissinski 的 f_0 解代入，而是用一个更理想化的“纯光学” f_0 解代入，

$$f_0(z, \delta; s = 0) = \frac{N}{2\pi\sigma_z\sigma_\delta} \exp\left(-\frac{\delta_0^2}{2\sigma_\delta^2}\right) \exp\left(-\frac{z_0^2}{2\sigma_z^2}\right) = \frac{N}{2\pi\sigma_z\sigma_\delta} \exp\left(\frac{\mathcal{H}_0}{\eta\sigma_\delta^2}\right) \quad (13.53)$$

目的是希望得到更清晰的物理图像。

前面提过，正是一阶解导致多姿多彩的集体效应。一阶解的分析思路不只一种，此处介绍四种思路如下：

- 思路一：一阶线性化 Vlasov 方程 \Rightarrow 为关注束团局部特性，引入调制参量 \Rightarrow 积分方程。
- 思路二：一阶线性化 Vlasov 方程 \Rightarrow 对 s 与 z 傅里叶变换 \Rightarrow 自洽要求 \Rightarrow 色散方程 \Rightarrow 求根。
- 思路三：一阶线性化 Vlasov 方程 \Rightarrow 为描述相空间分布，选一正交基底展开 \Rightarrow 线性方程组 \Rightarrow 求解特征值问题。
- ★ 无论是解线性方程组或解色散方程，都是求解 特征问题。
- 思路四：全数值求解非线性 Vlasov 方程。细节此处不论。



笔记 在等离子体理论中，将 f_0 代入以上线性化 Vlasov 方程 Eq. (13.52)，研究线性系统下的稳定性问题即研究此线性化方程的稳定性问题。更具体地说，就是研究此线性化方程在微扰项 $f_1 \propto e^{-i\omega t}$ 存在时的特征值问题：当所有特征频率均为实数，或者虚部为负时，称系统为稳定，或称此时 f_0 解为 Vlasov 稳定解，即 f_0 is Vlasov stable。当特征频率之一包含正虚部时，系统将不稳定，或称 f_0 is Vlasov unstable。

13.4 积分方程：思路一

按思路一，一般忽略纵向同步振荡，假设尾场的特征长度 $\ll \sigma_z$ ，因此常采用 **coasting beam** 近似。一般对直线加速器或单次经过加速器大致成立。忽略纵向同步振荡能够成立的前提是：相比于集体不稳定性增长的时间，纵向同步振荡时间长得多， $\tau_{\text{coll}} < T_s$ ，于是忽略了纵向同步振荡时间。或者，提供束团纵向聚焦的源，即 **RF** 腔，很弱。换句话说，根据关心的不稳定性增长率 τ_{coll}^{-1} 与同步振荡频率 ω_s 的相对大小，如果 $\tau_{\text{coll}}^{-1} \gg \omega_s$ ，则采用 **coasting beam** 模型。反之，则需要考虑束团同步振荡，采用 **bunched beam** 模型，为思路三，将在后面介绍。

从列写单粒子纵向运动方程开始

$$\begin{aligned}
 \frac{dz}{ds} &= -\eta\delta = R'_{56}\delta \\
 \frac{d\delta}{ds} &= \frac{k_{s0}^2}{\eta}z - \frac{e^2}{\gamma m_e c^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta W_{\parallel}(z - \zeta; s)n(\zeta; s) \\
 &= \frac{k_{s0}^2}{\eta}z - \frac{4\pi\epsilon_0 r_e}{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta W_{\parallel}(z - \zeta; s)n(\zeta; s) \\
 &\approx -\frac{4\pi\epsilon_0 r_e}{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta W_{\parallel}(z - \zeta; s)n(\zeta; s) \\
 &= -\frac{4\pi\epsilon_0 r_e c}{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} Z_{\parallel}(k; s) N b(k; s) e^{ikz} \\
 &= -\frac{4\pi|e|c}{\gamma Z_0 I_A} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} Z_{\parallel}(k; s) N b(k; s) e^{ikz}
 \end{aligned} \tag{13.54}$$

此处的 W_{\parallel} 为单位长度纵向尾场函数，量纲为 $\text{VC}^{-1}\text{m}^{-1}$ 。同样地，此处的 Z_{\parallel} 为单位长度纵向阻抗，量纲为 Ωm^{-1} 。

其中，采用 **coasting beam** 近似，即忽略纵向同步振荡，有 $k_{s0} \rightarrow 0$ 。 n 为粒子束线密度函数⁷ $n(z; s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z, \delta; s) d\delta$ 。 $I_A = ec/r_e \approx 17045 \text{ A}$ 为 **Alfven** 电流⁸。这里的 W_{\parallel} 为单位长度的纵向尾场函数，量纲比寻常的尾场函数多除了一个长度，单位为 V/C/m 。能量偏差方程最后两个等号是根据尾场函数与阻抗函数互为傅里叶变换得到。此处⁹

$$b(k; s) = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z, \delta; s) e^{-ikz} dz d\delta \tag{13.55}$$

马上将介绍其意义。

将相空间分布函数写为 $f(z, \delta; s)$ ，**Vlasov** 方程

$$\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{dz}{ds} \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{d\delta}{ds} \frac{\partial f}{\partial \delta} = 0 \tag{13.56}$$

利用¹⁰ $f = f_0(\delta; s) + f_1(z, \delta; s)$ ，其中， $|f_1| \ll f_0$ ，将 **Vlasov** 方程线性化后，沿零阶光学

⁷这里的线密度函数我们不写 λ ，是希望避免与后面出现的调制波长 $\lambda = 2\pi/k$ 混淆。

⁸这里试着说明一下 **Alfven** 电流的物理图像。从经典力学图像的电子开始，想像一个电子为一颗硬球，半径为 $r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}$ 。现在有一电子束团以光速 c 运动，束团内不同电子间沿一维运动方向紧密相互接触靠着，则在 t 时刻，束团经过 s 位置时，截面通过的电流为 $\frac{|e|}{r_e/c} \equiv I_A$ 。

⁹回忆一下，在 §10.5 介绍过，当时的定义写成更简洁的形式 $b = \langle e^{-i\theta} \rangle$ ，其中 $\theta = kz$ ，尖括弧 $\langle \dots \rangle$ 表示对束团求和平均，对应这里的 $\frac{1}{N} \iint (\dots) dz d\delta$ 。

¹⁰这里因为采用 **coasting beam** 近似，就不考虑 f_0 对 z 的函数依存关系。

轨迹积分，有

$$\frac{\partial f_1}{\partial s} + \frac{dz}{ds} \frac{\partial f_1}{\partial z} + \left(\frac{d\delta}{ds}\right)_1 \frac{\partial f_0}{\partial \delta} + \left(\frac{d\delta}{ds}\right)_0 \frac{\partial f_1}{\partial \delta} = 0 \quad (13.57)$$

其中， $\left(\frac{d\delta}{ds}\right)_0 \frac{\partial f_1}{\partial \delta} = 0 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \delta} = 0$ 。接着，等式两边对 s 积分，自 $s = 0$ 至 $s = s$ ，为避免混淆，令 τ 为积分哑变元，则有¹¹

$$f_1(z, \delta; s) = f_1(z_0, \delta_0; s = 0) - \int_0^s \left[\frac{\partial f_0(z, \delta; \tau)}{\partial \delta_\tau} \frac{d\delta}{d\tau} \right] d\tau \quad (13.58)$$

为关注束团局部特性，引入密度调制函数¹²

$$\begin{aligned} b(k; s) &= \frac{1}{N} \iint f(z, \delta; s) e^{-ikz} dz d\delta = \frac{1}{N} \iint [f_0(\delta; s) + f_1(z, \delta; s)] e^{-ikz} dz d\delta \\ &= \frac{1}{N} \iint f_1(z, \delta; s) e^{-ikz} dz d\delta \end{aligned} \quad (13.59)$$

其中，由于 coasting beam 近似， f_0 对 z 的积分有 $2\pi\delta(k)$ 可直接丢掉，因为 $k \neq 0$ 。将 f_1 代入密度调制函数的定义，则线性化 Vlasov 方程可改写如下积分方程

$$b(k; s) = b_0(k; s) + \int_0^s d\tau K(\tau, s) b(k; \tau) \quad (13.60)$$

其中， $K(\tau, s)$ 称为核函数 (kernel function)，其显形式此处不论。此方程在数学上又称第二类 Volterra 积分方程 (Volterra integral equation of the second kind)。

可以通过迭代法求解此方程，细节此处不论。一般将解此方程问题视为初始值问题 (initial value problem, IVP)。感兴趣的物理过程为密度调制函数如何随 s 演化 \Rightarrow 即 $b(k; s)$ 函数如何随 s 演化。等式两边都有 $b(k; s)$ ，求解要求自治性。

上面推导仅考虑了束团纵向相空间分布与动力学。基于思路一，完整的分析包含束团的六维相空间分布函数。略去推导，将在第16章介绍，以下总结其结果。

定理 13.8. 微束团不稳定性的 Volterra 积分方程

利用微扰理论求解 Vlasov 方程时，对于单次经过、单束团集体效应，可以通过将束团分布函数拆为 $f = f_0 + f_1$ ，其中， f_0 为无微扰背景分布函数 (unperturbed background distribution)， $|f_1| \ll f_0$ 为叠加在背景上的一阶微扰分布 (perturbed distribution)。 f_1 以密度调制 (density modulation) 函数量化，数学上即其投影相空间分布沿 z 的傅里叶变换

$$b(k; s) = \frac{1}{N} \int d\mathbf{X} e^{-ikz_s} f_1(\mathbf{X}; s) \quad (13.61)$$

则线性化 Vlasov 方程可以写成第二类 Volterra 积分方程，有

$$b(k; s) = b_0(k; s) + \int_0^s d\tau K(\tau, s) b(k(\tau); \tau) \quad (13.62)$$

¹¹明白全微分与偏微分的区别后，知道 $\frac{\partial f_1}{\partial s} + \frac{dz}{ds} \frac{\partial f_1}{\partial z} + \left(\frac{d\delta}{ds}\right)_0 \frac{\partial f_1}{\partial \delta} \equiv \frac{df_1}{ds}$ 。对 s 积分后， $\int_0^s \frac{df_1}{ds} ds = f_1(s) - f_1(0)$ 。

¹²即第 10 章介绍 FEL 时的密度调制函数，又称群聚因子 (bunching factor)。注意，在 §10.6.1 介绍 SASE FEL 时，讨论了粒子离散特性引起的散粒噪声，其等效初始群聚因子有 $b_i \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$ 。此处考虑相空间分布函数为完全平滑的束团分布，因此忽略散粒噪声的影响。

其中, $b_0(k; s)$ 为不存在集体效应时(即“纯光学”情况)束团本身可能携带的密度调制函数, K 为核函数, 包含集体效应与朗道阻尼(Landau damping)效应, 有

$$K(\tau, s) = ik(s) \frac{I_b(\tau)}{\gamma I_A} R_{56}(\tau \rightarrow s) \frac{4\pi}{Z_0} Z_{\parallel}(k; \tau) \{\text{L.D.}; s, \tau\} \quad (13.63)$$

其中, 朗道阻尼效应源于束团发射度 $\epsilon_{x0, y0}$ 与能散 σ_δ

$$\{\text{L.D.}; s, \tau\} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \epsilon_{x0} \beta_{x0} \left(R_{51}(s, \tau) - \frac{\alpha_{x0}}{\beta_{x0}} R_{52}(s, \tau) \right)^2 + \frac{\epsilon_{x0}}{\beta_{x0}} R_{52}^2(s, \tau) + \\ \epsilon_{y0} \beta_{y0} \left(R_{53}(s, \tau) - \frac{\alpha_{y0}}{\beta_{y0}} R_{54}(s, \tau) \right)^2 + \frac{\epsilon_{y0}}{\beta_{y0}} R_{54}^2(s, \tau) + \\ \sigma_{\delta 0}^2 R_{56}^2(s, \tau) \end{bmatrix} \right\}$$

$$R_{5j}(s, \tau) = k(s)R_{5j}(s) - k(\tau)R_{5j}(\tau) = k_0 [C(s)R_{5j}(s) - C(\tau)R_{5j}(\tau)] \quad (13.64)$$

$$\begin{aligned} R_{56}(\tau \rightarrow s) &= R_{56}(s) - R_{56}(\tau) \\ &+ R_{51}(\tau)R_{52}(s) - R_{51}(s)R_{52}(\tau) + R_{53}(\tau)R_{54}(s) - R_{53}(s)R_{54}(\tau) \end{aligned} \quad (13.65)$$

其中, $C(s) = \frac{1}{1+hR_{56}(s)}$ 为束团压缩因子(bunch compression factor)。

注 以上是研究单次经过、单束团不稳定性的一种标准分析方式, 将束团分布量化为密度调制函数, 属于频域分析。阻抗函数通过对束团产生能量调制, 束团传输过程经历动量紧缩/纵向色散, 能量调制形成密度调制。当这种能量调制与密度调制形成正反馈, 束团将变得不稳定, 又称微束团不稳定性(microbunching instability)或自由电子激光不稳定性(free electron laser instability)。

注 朗道阻尼效应将在第16章 (§16.2) 简短介绍。

注 对以上推导细节感兴趣的读者, 可参考 Z. Huang and K.-J. Kim, Formulas for coherent synchrotron radiation microbunching in a bunch compressor chicane, Phys. Rev. ST Accel. Beams **5**, 074401 (2002). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.5.074401>

在选择 coasting beam 或 bunched beam 模型时, 还有其它(不限于如下所列)因素可能影响:

1. 同步辐射阻尼效应 τ_d^{-1} 相对于不稳定性增长率 τ_{coll}^{-1} 与同步振荡频率 ω_s 的相对大小
2. 阻抗频谱结构(窄带或宽带)
3. 束长与尾场特征长度的相对尺度(考虑金属真空管道的辐射屏蔽后)
4. 动力学的不同发展阶段(阈值附近的线性区间或非线性区间)

13.4.1 单次经过加速器微束团不稳定性

跳过求解积分方程的细节，图 13.3 展示了基于积分方程的解 $b(k; s) \in \mathbb{C}$ 。此处微束团增益函数 (microbunching gain function) 定义为¹³

$$G(s) = \left| \frac{b(k(s); s)}{b(k(0); 0)} \right| \quad (13.66)$$

表征密度调制函数在经历磁聚焦结构传输时的放大比例。对不同初始密度调制波长 $\lambda = 2\pi/k$ ，其增益各不相同，因此形成增益频谱 (gain spectrum) $G_f(\lambda)$ 。

定义 13.2. 微束团增益函数与增益频谱

由于 $b(k; s) \in \mathbb{C}$ ，定义增益函数 (gain function) 为自 $s = 0$ 至 s 位置的放大比例，即

$$G(s) = \left| \frac{b(k(s); s)}{b(k(0); 0)} \right| \quad (13.67)$$

当 $G(s) \gg 1$ 时，表示存在微束团不稳定性。由于 $G(s)$ 本身为初始调制波数 k_0 的函数，因此还定义增益频谱 (gain spectrum) 为

$$G_f(\lambda) = G(s_f; \lambda = 2\pi/k) = \left| \frac{b(k(s_f); s_f)}{b(k(0); 0)} \right| \quad (13.68)$$

一般选磁聚焦结构传输段末尾出口处 $s = s_f$ 。 □

对基于积分方程分析单次经过加速器微束团不稳定性感兴趣的读者，建议查阅下列几篇相关工作：

- S. Heifets, G. Stupakov, and S. Krinsky, Coherent synchrotron radiation instability in a bunch compressor, Phys. Rev. ST Accel. Beams **5**, 064401 (2002). <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.5.064401>
- Z. Huang and K.-J. Kim, Formulas for coherent synchrotron radiation microbunching in a bunch compressor chicane, Phys. Rev. ST Accel. Beams **5**, 074401 (2002). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.5.074401>
- M. Venturini, Microbunching instability in single-pass systems using a direct two-dimensional Vlasov solver, Phys. Rev. ST Accel. Beams **10**, 104401 (2007). <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.10.104401>
- C.-Y. Tsai et al., Linear microbunching analysis for recirculation machines, Phys. Rev. Accel. Beams **19**, 114401 (2016). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevAccelBeams.19.114401>
- C.-Y. Tsai et al., Vlasov analysis of microbunching instability for magnetized beams, Phys. Rev. Accel. Beams **20**, 054401 (2017). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevAccelBeams.20.054401>
- C.-Y. Tsai et al., Theoretical formulation of phase space microbunching instability in the presence of intrabeam scattering for single-pass or recirculation accelerators, Phys. Rev.

¹³此处定义的增益函数与 §10.4 分析低增益自由电子激光振荡器时所定义的增益函数不一样，宜留意。

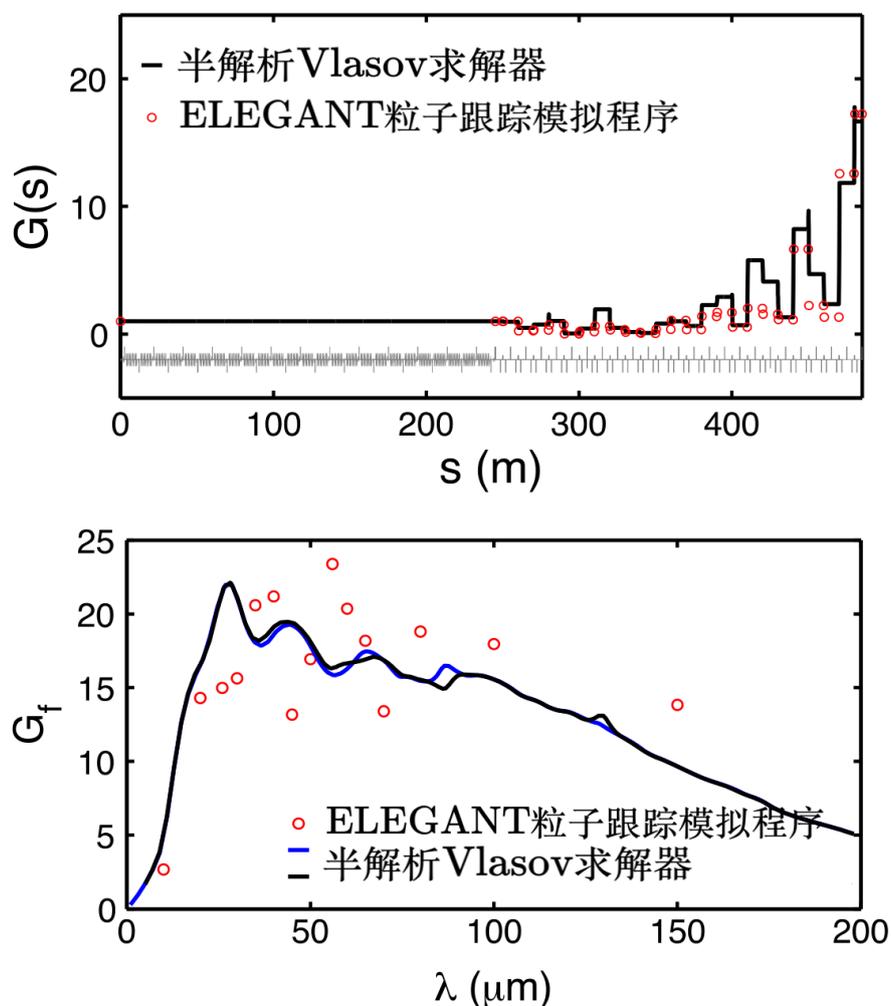


图 13.3: 直线加速段 +180° 等时弯转段的单次经过加速器微束团不稳定性增益。此处增益定义为 $G(s) = \left| \frac{b(k(s);s)}{b(k(0);0)} \right|$ 。上图称增益函数，下图称增益频谱。上图中的灰色为示意图，表示磁聚焦结构中不同的部件。黑色实线为基于积分方程的解(半解析 Vlasov 求解器)，红色圆圈为利用粒子跟踪模拟程序得到的结果，两者大概一致。上图计算中，假设初始调制波长为 $\lambda = 60 \mu\text{m}$ ，考虑了稳态与暂态 CSR 效应。下图中，黑色与蓝色实线为基于积分方程的解(半解析 Vlasov 求解器)，其中，蓝线考虑极端相对论近似的稳态 CSR 阻抗，黑线考虑非极端相对论的稳态 CSR 阻抗，红色圆圈为利用粒子跟踪模拟程序得到的结果(基于非极端相对论的稳态 CSR 阻抗)。图例取自 C.-Y. Tsai et al., Linear microbunching analysis for recirculation machines, Phys. Rev. Accel. Beams **19**, 114401 (2016). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevAccelBeams.19.114401>

Accel. Beams **23**, 124401 (2020). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevAccelBeams.23.124401>

13.5 色散方程：思路二

在储存环中，束团分布除了内部存在微结构的特征可按周期特性展开外（比如：以密度调制函数展开），束团逐圈随时间演化时的相空间分布也可按绕行周期特征展开。这里的绕行周期特征可以是逐圈绕行频率，也可以是同步振荡频率。当采用 **coasting beam** 近似时，因为忽略同步振荡频率 $k_{s0} \rightarrow 0$ ，可按类似于上一小节介绍的方式 $f = f_0(\delta; s) + f_1(z, \delta; s)$ 将 Vlasov 方程线性化。即，将 (z, s) 傅里叶变换至 (k, ω) 分析¹⁴

$$f_1 = \hat{f}_1 e^{-i\omega \frac{s}{c} + ikz} \quad (13.69)$$

则 f_1 的线性化 Vlasov 方程变为 \hat{f}_1 的线性化 Vlasov 方程。这里感兴趣的物理过程为，给定束团内沿 z (对应频率 k) 的密度微扰 \hat{f}_1 后，束团如何随 s (对应频率 ω) 演化。由上式可看出，

当 $\text{Im} \omega > 0$ 时，系统不稳定。

如前所述，**coasting beam** 近似成立的前提是，系统不稳定增长率 $\tau_{\text{coll}}^{-1} \gg \omega_s$ ，即束团没有明显纵向同步振荡。现在将 f_1 代入线性化 Vlasov 方程 $\frac{\partial f_1}{\partial s} + \frac{dz}{ds} \frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{d\delta}{ds} \frac{\partial f_0}{\partial \delta} = 0$ ，有

$$(\omega + ck\eta\delta)\hat{f}_1 = i \frac{4\pi\epsilon_0 r_e c}{\gamma} \frac{\partial f_0}{\partial \delta} Z_{\parallel}(k) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_1 d\delta \quad (13.70)$$

或

$$\hat{f}_1 = i \frac{4\pi\epsilon_0 r_e c}{\gamma(\omega + ck\eta\delta)} \frac{\partial f_0}{\partial \delta} Z_{\parallel}(k) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_1 d\delta \quad (13.71)$$

等式两边对 δ 积分，自洽条件要求如下色散方程成立

$$1 = \frac{i4\pi\epsilon_0 r_e c Z_{\parallel}(k)}{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\omega + ck\eta\delta} \frac{\partial f_0}{\partial \delta} \right] d\delta \quad (13.72)$$

对此方程，在给定束团能散分布函数 $f_0(\delta)$ 、阻抗函数 $Z_{\parallel}(k)$ 与密度扰动频率 k 后，待求解的物理量是复频率 $\omega = \text{Re} \omega + i \text{Im} \omega \in \mathbb{C}$ 与密度扰动频率 k 的关系，即 $\omega = \omega(k)$ 。当 $\text{Im} \omega(k) > 0$ 时，系统不稳定。

13.5.1 讨论：朗道积分

由上讨论知，色散方程给出的复频率解 $\omega = \omega(k)$ 应为 k 的连续函数。也就是说，根据 Vlasov 方程，当 Eq.(13.72) 中的所有相关物理量都是连续函数时，没有理由在任何一个取值 k 后，复频率产生不连续跳跃。但是，直观来看，明显当 Eq.(13.72) 中的被积分式分母在 $\delta = -\omega/ck\eta$ 时，积分取值可能出现奇点。暂且略去物理内涵不谈，单从数学

¹⁴眼尖的读者可能会觉得傅里叶变换应该写成类似如下形式

$$f_1(z, \delta; s) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{c} \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{f}_1 e^{-i\omega \frac{s}{c} + ikz}$$

怎么就忽略这里的积分？其实这里隐含了一个假设，即每个频率成分 (k_i, ω_i) 与 (k_j, ω_j) , $i \neq j$ 彼此独立，不互相耦合。如果是这样，那么个别频率各自分析无妨。对一阶“线性”Vlasov 方程而言，确实不同频率成分间彼此独立。

上看，根据 Sokhotski-Plemelj 定理¹⁵

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b dx \frac{f(x)}{x \mp i\epsilon} = \text{P.V.} \int_a^b dx \frac{f(x)}{x} \pm \pi i f(0) \quad (13.73)$$

其中， $a < 0 < b$ ，P.V. 为取主值积分。对应上式，有 $i\epsilon = -\frac{i \text{Im} \omega(k)}{ck\eta}$ 。由以上可以看出，当 k 连续改变时，如果 ω 的虚部从复 δ 平面的上半平面穿过实轴（即 $\text{Im} \delta = 0$ ）到复 δ 平面的下半平面时，将会出现 $\pi i f(0) - [-\pi i f(0)] = 2\pi i f(0)$ 的不连续跳跃。这个跳跃不对应物理实际，需要设法回避，但又不能丢失物理本质。也许有读者会问：极点 $\delta = -\omega/ck\eta$ 有物理意义吗？有！很重要，但却也很神秘。

数学上怎么处理/回避这个恼人的极点？细心的读者可能已经想到了复变函数理论学过的一个重要概念：解析延拓 (analytic continuation)。解析延拓是数学上将复平面中的解析函数从较小定义域拓展到更大定义域的一种技巧。透过此技巧，原先在一些边界发散或不连续的函数在跨过边界的新定义域或推广的区域可具有连续的值。

利用复变函数的解析延拓技巧，同时要求不丢失物理内涵的前提下，正确求解 Eq.(13.72) 色散方程最早由俄国物理学家朗道 (L.D. Landau)¹⁶ 给出指导，现在一般称此方法为朗道围道积分法 (Landau's contour method)，求解过程的步骤又称朗道处方 (Landau's prescription)。基本思路为：尽管 ϵ 或 $\text{Im} \omega(k)$ 可能复上半平面穿过实轴到复下半平面，但只要积分路径总是沿着极点的“同侧”，那么，函数解 $\omega = \omega(k)$ 对 k 的连续性就可以保持。这里的“同侧”该怎么绕，上侧或下侧？总结如下：

定理 13.9. 处理色散积分的朗道处方

根据 Eq.(13.72)，对变量 δ 的积分一般在复 δ 平面进行：

- 当 $\eta < 0$ (below transition) 时，在 δ 实轴上的积分应选择从极点 $-\omega/ck\eta$ 的“下方”绕过。若要通过形成封闭路径积分计算，应包围整个上半平面。参考图 13.4。
- 当 $\eta > 0$ (above transition) 时，在 δ 实轴上的积分应选择从极点 $-\omega/ck\eta$ 的“上方”绕过。若要通过形成封闭路径积分计算，应包围整个下半平面。□



笔记 绕极点的上方或下方不是随意选的，是根据 f_1 与 \hat{f}_1 的傅里叶变换（或更严谨地说，拉普拉斯变换）的收敛性决定的。对朗道积分¹⁷的一般讨论的细节感兴趣的读者，可参考

¹⁵学过复变函数积分的读者或许知道此定理，该定理结果可由柯西积分公式与柯西主值积分的定义得到。

¹⁶朗道 (Lev Davidovich Landau, 1908-1968) 为鼎鼎大名的苏联/俄国物理学家，因发展量子力学密度矩阵理论 (density matrix theory)、二级相变 (second-order phase transition) 唯像理论、提出序参量 (order parameter) 的概念、费米子相互作用的费米液体理论、超导体/超流体 (superfluid) 理论、量子力学朗道极点 (Landau pole)、等离体理论的朗道阻尼 (Landau damping) 效应等得名，1962 年因发展超流体等一系列理论而获得诺贝尔物理学奖。

¹⁷在等离体动力学理论发展初期，对类似于 Eq. (13.72) 形式的色散方程的分析难倒了众多物理学家。虽然该式是从 Vlasov 方程出发得到，但是 Vlasov 本人在当时并没有“正确”得到这个色散方程的 $\omega(k)$ 解。从现在观点看，当时 Vlasov 得到的只是这个解的一部分，只是复变函数积分的实数部分，即积分主值 (principal value)。真正深刻的物理内涵，也就是对系统贡献稳定机制的“阻尼”项不是从实数的主值来的，而是从该积分的虚部，现在称为“朗道”阻尼，为 Landau 在 1946 年首次得到。原始论文可参考 L.D. Landau, On the vibrations

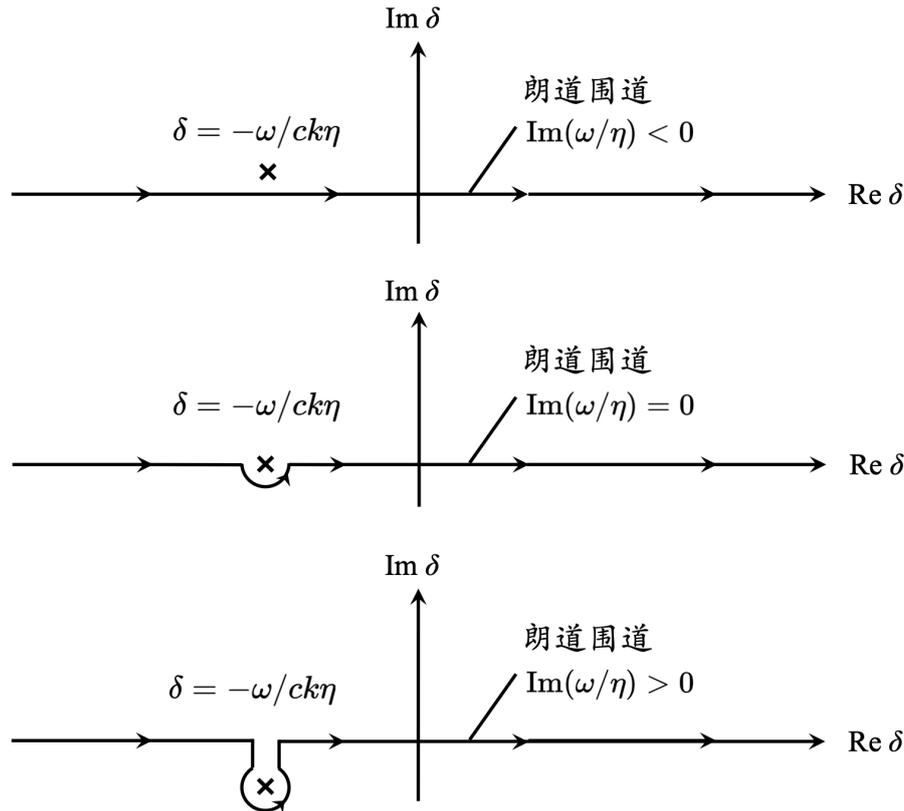


图 13.4: 当 $\eta < 0$ 时, 选择的朗道围道在 δ 实轴上的积分应相对于极点 $-\omega/ck\eta$ 的“下方”绕过。

- N. Lashmore-Davies, Plasma Physics and Instabilities, CERN Report No. 81-13 (1981). <https://lib-extopc.kek.jp/preprints/PDF/1981/8112/8112134.pdf>
- A. Bret, CfA Plasma Talks, Chapter 4. <https://ned.ipac.caltech.edu/level5/Sept19/Bret/paper.pdf>

对朗道积分应用于加速器理论感兴趣的读者, 可参考

- C.E. Nielsen, A.M. Sessler, and K.R. Symon, Longitudinal instabilities in intense relativistic beams, MURA-549 (1959). <https://inspirehep.net/literature/39294>
- Yongho Chin and Kaoru Yokoya, Nonlinear perturbation approach to bunch lengthening and blow-up of energy spread, Nucl. Instrum. Methods A 226, 223-249 (1984). [https://doi.org/10.1016/0168-9002\(84\)90037-8](https://doi.org/10.1016/0168-9002(84)90037-8)

注 朗道围道积分的结果与朗道阻尼效应密切相关。由于以上色散方程是由 Vlasov 方程推导得到, 因此朗道阻尼效应是一种不涉及粒子碰撞的无碰撞阻尼机制 (collisionless damping)。在朗道刚开始提出的时候, 由于推导的数学过程晦涩难懂, 加上对应的物理图像不

of the electronic plasma, J. Physics (USSR) **10**, 25 (1946). <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-010586-4.50066-3> 或原始俄文论文 https://ufn.ru/ufn67/ufn67_11/Russian/r6711m.pdf。一段小故事, Vlasov 首次面对这个问题时在 1945 年, 没有成功得到正确结果。后来当朗道处理这个问题的时候, 在论文一开始就无情抨击了 Vlasov 当时不完整的做法, 说 Vlasov 的做法试图通过取主值而回避数学困难, 并且论证没有任何理论根基。

像其它效应清晰，因此朗道阻尼效应成为了等离子体理论中充满神秘色彩的效应。

注 第16章将介绍，对相干同步辐射 (coherent synchrotron radiation, CSR) 情况，严格来说，阻抗不在局域 (localized) 而是跟着电子束传播，当考虑窄带同步辐射阻抗时，此分析存在瑕疵。对细节感兴趣的读者，可参考 S. Heifets and G. Stupakov, Single-mode coherent synchrotron radiation instability, Phys. Rev. ST Accel. Beams **6**, 064401 (2003). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.6.064401>。

13.5.2 Keil-Schnell 条件

对储存环集体效应的分析，基于这个思路继续往下走之后，将得到一个称为 Keil-Schnell 条件 (Keil-Schnell criterion)。细节不论，大致思路是：由 Eq. (13.72) 可以看到，积分内的项 $\frac{\partial f_0}{\partial \delta}$ 与束团的能量分布有关，将影响系统稳定性。于是，我们可以把 $\int_{-\infty}^{\infty} (...) d\delta$ 积分视为一个仅与束团能量分布相关的项，把剩下的阻抗函数、电子束团其它参量、储存环设计参量等项移到等式另一边，写成如下形式：

$$(\text{束团、加速器参数}) \times Z_{\parallel}(k) = F(\Delta) \quad (13.74)$$

一般有

$$\frac{I_b}{\eta E_0 \sigma_{\delta}^2} \times \frac{Z_{\parallel}(\omega)}{\omega} \propto F(\Delta) \quad (13.75)$$

这里我们把束团能量分布相关的积分暂时写成 $F(\Delta)$ ，一般为复数。令 $F(\Delta) = U + iV$ ，则有

$$\frac{I_b}{\eta E_0 \sigma_{\delta}^2} \times Z_{\parallel}(k) \propto U + iV \quad (13.76)$$

$F(\Delta)$ 涉及的积分由束团能散/能量分布形态决定。于是上式可写成

$$f(\sigma_{\delta}, I_b, E_0, \eta, Z_{\parallel}) = U + iV \quad (13.77)$$

当束团、加速器参数或阻抗函数改变时，结合上述的阈值条件，复合函数 f 就在复平面 $F = U + iV$ 上画分出两个区域，一个为束团的稳定区域，另一个为束团的不稳定区域。经过适当归一化后，可以得到当 $F(\Delta)$ 满足一定条件时，束团为稳定，否则为不稳定。略去细节，这里将 Keil-Schnell 条件总结如下：

定理 13.10. Keil-Schnell 条件

根据上述思路，基于 coasting beam 近似的束团集体效应，当对所有 $n \in \mathbb{N}$ 满足如下条件时，

$$\left| \frac{Z_{\parallel}(n\omega_0)}{n} \right| < \frac{2\pi E_0 |\eta| \sigma_{\delta}^2}{q I_b} \Rightarrow \text{纵向稳定} \quad (13.78)$$

其中，

- n 为正整数^a

- ω_0 为绕行角频率
- E_0 为束团参考能量
- σ_δ 为束团能散
- I_b 为束团电流，假设 coasting beam 近似
- η 为滑相因子

证明 原始论文可参考 E. Keil and W. Schnell, Concerning longitudinal stability in the ISR, CERN-ISR-TH-RF-69-48 ; ISR-TH-RF-69-48 (1969). <https://cds.cern.ch/record/1229157/files/ISR-69-48.pdf>。推导细节可参考 Andrzej Wolski, Beam Dynamics in High Energy Particle Accelerators, Imperial College Press (2014) 一书的 §15.3。

注 此条件为充分条件，非必要条件。即当不满足 Keil-Schnell 条件时，束团未必不稳定。

“此处 n 不应视为谐波数，这是因为 Keil-Schnell 条件假设 coasting beam 近似，此时不考虑 RF 腔。 □

回忆一下，基于思路二假设了 coasting beam 近似。上面的 Keil-Schnell 条件可推广到 bunched beam 情况，称 Keil-Schnell-Boussard 条件 (Keil-Schnell-Boussard criterion) 或 Boussard 条件。同样略去细节，总结如下：

定理 13.11. Keil-Schnell-Boussard 条件

又称 Boussard 条件。接续上述思路，对 bunched beam 情况，当不稳定性增长率比同步振荡频率大时，或不稳定性增长时间比同步振荡周期时间短时，稳定性条件可根据 Keil-Schnell 定理进行推广，把束团电流推广为单束团峰值电流

$$I_b = \frac{qN_b c}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \quad (13.79)$$

其中， N_b 为单束团粒子数， σ_z 为束长。假设储存环周长为 C_0 ，可写出基于 bunched beam 近似的束团集体效应，当对 $n \gg C_0/\sigma_z$ 且 $\tau^{-1} = |\text{Im}\omega| \gg \omega_s$ 时，当满足如下条件时，

$$\left| \frac{Z_{\parallel}(n\omega_0)}{n} \right| < \frac{(2\pi)^{3/2} E_0 |\eta| \sigma_\delta^2 \sigma_z}{q^2 N_b c} \Rightarrow \text{纵向稳定} \quad (13.80)$$

其中，

- n 为正整数，可视为谐波数
- ω_0 为绕行角频率
- E_0 为束团参考能量
- N_b 为单束团粒子数
- σ_z 为束长
- σ_δ 为束团能散

- η 为滑相因子

证明 原始论文可参考 D. Boussard, Observation of microwave longitudinal instabilities in the CPS, CERN-LabII-RF-INT-75-2 (1975). <https://cds.cern.ch/record/872559/files/cer-002556319.pdf>.

注 此条件为充分条件，非必要条件。即当不满足 Keil-Schnell-Boussard 条件时，束团未必不稳定。 □

由以上两定理，给出了几个定性启示：

1. 稳定性条件与粒子参考能量成正比：越高能的粒子，磁刚度越大，越不容易受集体效应影响。
2. 稳定性条件与流强或粒子数成反比：流强或粒子数越大意味着尾场或阻抗强度越大，越容易使束团不稳定。
3. 稳定性条件与 $|\eta|\sigma_\delta^2$ 成正比：当许多储存环都尽量设计更小的 $|\eta|$ 且束团亮度越来越高时，表征 σ_δ 越小，将越容易受集体效应影响。



笔记 关于色散函数、Keil-Schnell 条件等更有系统的讨论，可参考 Alexander Wu Chao, Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators, John Wiley & Sons (1993) 一书的 Chapter 5。

13.5.3 储存环微束团不稳定性

跳过求解色散方程的细节，考虑相干同步辐射尾场引起的储存环微束团不稳定性集体效应，图 13.5 展示了上面色散方程的解 $\omega = \omega(k)$ 。忽略图中横轴与纵轴的归一化因子，可以看到，对不同的密度扰动频率 k ，红色线为 $\text{Im} \omega(k)$ ，表征束团在储存环中可能为稳定 < 0 或不稳定 > 0 。

定理 13.12. 储存环 coasting beam 的 CSR 稳定性条件

基于思路二的色散方程，对相干同步辐射 (coherent synchrotron radiation, CSR) 阻抗^a引起的微束团不稳定性，在 $k\sigma_z \gg 1$ 情况下 (即 coasting beam 近似) 存在近似的解析解。如图 13.5 的白色 (不稳定) 区域将满足以下两条件

$$\sigma_z \geq \frac{\rho}{2\Lambda^{3/2}} \quad \text{与} \quad \frac{\rho}{b} \leq \Lambda \quad (13.81)$$

其中， $\Lambda = \frac{I_{b,\text{peak}}\rho}{|\eta|\gamma I_A \sigma_{\delta 0}^2 \langle R \rangle}$

- $I_{b,\text{peak}}$ 为束团峰值电流
- ρ 为二极铁弯转半径
- b 为金属真空管壁孔径 (直径)

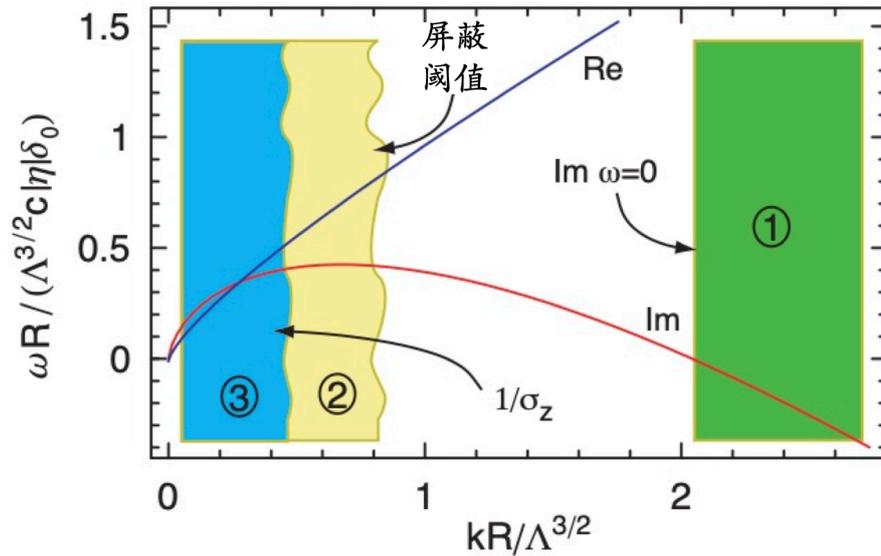


图 13.5: 白色区域为不稳定区间。区域①为稳定区间 (由于朗道阻尼效应), 区域②为部分金属真空管屏蔽抑制, 区域③为长波长段 $\sigma_z \leq \lambda_{\text{coll}}$, 不满足 coasting beam 近似。图例取自 Stupakov, Theory and observation of microbunching instability in electron machines, Proc. PAC 2003 (TOAA002). <https://accelconf.web.cern.ch/p03/PAPERS/TOAA002.PDF>

- $\langle R \rangle = C/2\pi$ 为储存环平均弯转半径
- η 为滑相因子
- $I_A = 17045$ A 为 Alfvén 电流, 为一常数
- $\sigma_{\delta 0}$ 为束团平衡时的能散

证明 参考 G. Stupakov and S. Heifets, Beam instability and microbunching due to coherent synchrotron radiation, Phys. Rev. ST Accel. Beams **5**, 054402 (2002). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.5.054402>

注 此模型假设的 CSR 阻抗为一维、稳态模型, 考虑了 (平行板) 金属屏蔽效应。但分析忽略同步辐射阻尼效应, 即假设同步辐射阻尼率远小于 CSR 不稳定性增长率。

“第16章将介绍。”

□

对基于色散方程储存环微束团不稳定性感兴趣的读者, 建议查阅下列几篇相关工作:

- G. Stupakov and S. Heifets, Beam instability and microbunching due to coherent synchrotron radiation, Phys. Rev. ST Accel. Beams **5**, 054402 (2002). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.5.054402>
- S. Heifets and G. Stupakov, Derivation of microwave instability dispersion relation with account of synchrotron damping and quantum fluctuations, SLAC-PUB-8803 (2002). <https://inspirehep.net/literature/554861>
- S. Heifets and G. Stupakov, Single-mode coherent synchrotron radiation instability, Phys.

- Rev. ST Accel. Beams **6**, 064401 (2003). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.6.064401>
- S. Heifets, Single-mode coherent synchrotron radiation instability of a bunched beam, Phys. Rev. ST Accel. Beams **6**, 080701 (2003). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.6.080701>

13.6 模式分解：思路三

前一节介绍了储存环中考虑 $\tau_{\text{coll}}^{-1} \gg \omega_s$ 情况，即 *coasting beam* 近似。这一节考虑另一种情况，即 $\tau_{\text{coll}}^{-1} < \omega_s$ 。此时在储存环中，束团分布除了内部存在微结构特征可按周期特性展开外，束团逐圈随时间演化也可按周期特性展开。上一节考虑的 *coasting beam*，由于忽略了束团的纵向运动，因此不考虑在 ω_s^{-1} 时间尺度上的动力学过程。由于现在 $\tau_{\text{coll}}^{-1} < \omega_s$ ，发生集体效应过程中，束团明显有纵向同步振荡，因此上一节方法将失效。为更方便地描述束团纵向相空间分布，采用模式分解的思路，选一组完备、正交基底展开¹⁸。

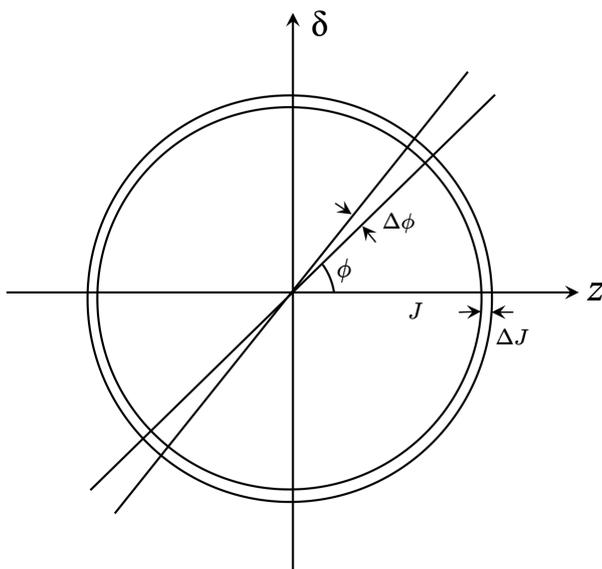


图 13.6: 相空间直角坐标 (z, δ) 与相空间作用量-角度坐标 (ϕ, J) 的示意图。

一般来说，一种标准做法是在相空间进行第 6 章介绍的作用量-角度变换 $(z, \delta) \rightarrow (\phi, J)$ ，参考图 13.6，写成¹⁹

$$f(z, \delta; s) \rightarrow f(\phi, J; \theta) \quad (13.82)$$

这里用作用量-角度变换描述，既漂亮，也自然。

展开按

$$f(\phi, J; \theta) = f_0(H_0) + f_1(\phi, J; \theta) \quad (13.83)$$

其中， $H_0 = J_0$ 。变换后的线性化 Vlasov 方程²⁰

$$\frac{\partial f_1}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \phi} + \frac{\partial J}{\partial \theta} \frac{\partial f_0}{\partial J_0} \right) \frac{\omega(J)}{\omega_s} = 0 \quad (13.84)$$

其中， $\frac{\omega(J)}{\omega_s} = \frac{dH_0}{dJ}$ 。

¹⁸要能完整描述相空间分布，基底要求必须完备 (complete)。如果选择的基底正好为正交 (orthogonal)，那更好。如果选择的基底非正交，仍可通过线性代数学过的正交化技巧构建一组新的正交基底。高等数学学过，一般分析能提供选择的基底都是完备且正交的基底。

¹⁹储存环可视为环形加速器，因此，绕行一周的 s 坐标由 0 至 C_0 可以用 θ 坐标由 0 至 2π 描述。 θ 坐标不参与作用量-角度变换。

²⁰这里忽略在 (ϕ, J) 相空间中对 f_0 解的讨论，其可由 Haissinski 方程得到。集体效应或阻抗藏在 $\frac{\partial J}{\partial \theta}$ 项。

现在，选一正交基底对束团相空间角方向 ϕ 分布展开，假设对应的基底指标为 ℓ ，基底函数为熟悉的三角函数 $e^{i\ell\phi}$ ，有

$$f_1(\phi, J; \theta) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} R_\ell(J) e^{i\ell\phi} e^{-i\frac{\Omega}{\omega_s}\theta} \quad (13.85)$$

其中， R_ℓ 为对应基底 $e^{i\ell\phi}$ 的展开系数。注意到，目前只做了角方向展开， R_ℓ 还可能存在半径方向的依存关系，因此写做 $R_\ell(J)$ 。

由于 $f_0(H_0)$ 本身与相空间角度 ϕ 无关，因此分布函数 f_0 无同步振荡。纵向同步振荡在分布函数 f_1 中。将此展开式代入线性化 Vlasov 方程，有如下积分方程²¹

$$\left(\frac{\Omega}{\omega(J)} - \ell\right) R_\ell(J) = -\frac{\partial f_0}{\partial J_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty dJ' G_{\ell,m}(J, J') R_m(J') \quad (13.86)$$

此方程又称 Sacherer 积分方程 (Sacherer integral equation)，待解的函数为 R_ℓ 。为简化分析，令 $P_\ell = R_\ell \cdot (\omega_s/\omega)$ ，进一步对相空间径向 J 分布展开，假设对应的基底指标为 α ，基底函数选为 $f_\alpha^{(\ell)}(J)$ (确切形式未定，只是抽象地写成一个符号而已)，权重函数为 e^{-J} ，有

$$P_\ell(J) = e^{-J} \sum_{\alpha=0}^{\infty} a_\ell^\alpha f_\alpha^{(\ell)}(J) \quad (13.87)$$

经过对纵向相空间从直角坐标系 (z, δ) 变换至类似极坐标系的作用量-角度正则坐标系 (ϕ, J) 后，经过化简，此方程可写成一无穷多线性方程组

$$\frac{\Omega}{\omega_s} a_\alpha^\ell = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{\infty} M_{\ell,m}^{\alpha,\beta} a_\beta^m \Leftrightarrow \mathbf{M}(\ell, \alpha) \mathbf{a} = \frac{\Omega(\ell, \alpha)}{\omega_s} \mathbf{a} \quad (13.88)$$

对于此线性方程组，给定两个方向的基底指标 ℓ, α ，待解的物理量为同步振荡复频率 $\Omega(\ell, \alpha) \in \mathbb{C}$ 。

当 $\text{Im} \Omega(\ell, \alpha) > 0$ 时，发生模式耦合，系统不稳定。

上面提到，这里径向基底的确切形式未定，只是抽象地写成一个符号而已。径向基底函数的选择非唯一，根据不同问题的选择也不尽相同。在分别选好角向与径向的基底后，构造矩阵 \mathbf{M} ，求解特征问题。

多数情况，发生角向模式耦合的阈值较低。

注 以上是研究储存环单束团不稳定性的一种标准分析方式，将束团纵向相空间分布视为几个标准的基底函数叠加，包含径向模 (radial mode) 与角向模 (azimuthal mode)，属于频域分析。阻抗函数在这些基底函数下的投影量表征对不同基底函数模式间的影响。随着束流强度增加，有些模式产生耦合， $\text{Im} \Omega > 0$ 表征束团不稳定，又称微波不稳定性 (microwave instability)、湍流不稳定性 (turbulent instability) 或纵向模式耦合不稳定性 (longitudinal mode coupling instability)。

²¹阻抗函数藏在核函数 $G_{\ell,m}$ 里。

集体效应分析的标准“产物”为束团振荡频率的偏移（称“频移”）与不稳定增长率。对横向尾场或阻抗驱动的集体效应，频移为集体振荡模式的振荡频率与 betatron 振荡频率及同步振荡频率的偏移；对纵向尾场或阻抗驱动的集体效应，频移则定义为集体振荡模式的振荡频率与同步振荡频率的偏移。略过证明细节，以下给出集体不稳定性频移与增长率的一般关系。

定理 13.13. 集体不稳定性频移与增长率的一般关系

根据 §11.7.6 定义的横向与纵向有效阻抗，按 Sacherer 理论，有

$$\begin{aligned}\Delta\omega_{\perp} &= \Omega^{(\ell)} - \omega_{\beta} - \ell\omega_s = -i\mathcal{A}(Z_{\perp})_{\text{eff}} \\ \Delta\omega_{\parallel} &= \Omega^{(\ell)} - \ell\omega_s = +i\mathcal{B}\left(\frac{Z_{\parallel}}{n}\right)_{\text{eff}}\end{aligned}\quad (13.89)$$

其中，增长率 $\tau_{\perp,\parallel}^{-1} \equiv \text{Im } \Delta\omega_{\perp,\parallel}$ ，系数

- $\mathcal{A} > 0$ ，与电流、束长、横向 betatron 振荡频率有关。
- $\mathcal{B} > 0$ ，与电流、动量紧缩因子、纵向同步振荡频率有关。

上式中的其它量有

- $\Omega^{(\ell)}$ 为复振荡频率
- $(Z_{\perp})_{\text{eff}}$ 为横向有效阻抗
- $\left(\frac{Z_{\parallel}}{n}\right)_{\text{eff}}$ 为纵向有效阻抗
- ℓ 为角向模指标
- ω_{β} 为横向 betatron 振荡频率
- ω_s 为纵向同步振荡频率

证明 参考 Alexander Wu Chao, *Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators*, John Wiley & Sons (1993) 一书，对纵向集体效应，可参考该书 §6.3 或 Eq. (6.83)，对横向集体效应，可参考该书 §6.6 或 Eq. (6.188)。□

练习 13.4 查找 Alexander Wu Chao, *Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators*, John Wiley & Sons (1993) 一书分析的几种集体不稳定机制，验证以上结果的正确性。■

性质 13.1. 集体稳定的必要条件

由上可推论，稳定性的必要条件可写为

$$\text{束团稳定} \Rightarrow \begin{cases} \text{Re}(Z_{\perp})_{\text{eff}} > 0 \\ \text{Re}\left(\frac{Z_{\parallel}}{n}\right)_{\text{eff}} < 0 \end{cases} \quad (13.90)$$

反之未必成立，即阻抗函数如果不满足以上条件，但只要能提供足够的阻尼效应，

则束团仍能保持稳定。 □

13.6.1 微波不稳定性

跳过求解无穷维线性方程组的细节，图 13.7 展示了对不同角向指标 ℓ 下，扫描一系列径向指标 α 后，得到的频率偏移量 (实线) 与不稳定性增长率 (虚线)。可以看到，不同的径向模与角向模的组合对尾场或阻抗的响应程度不同，体现集体效应的内在复杂性。

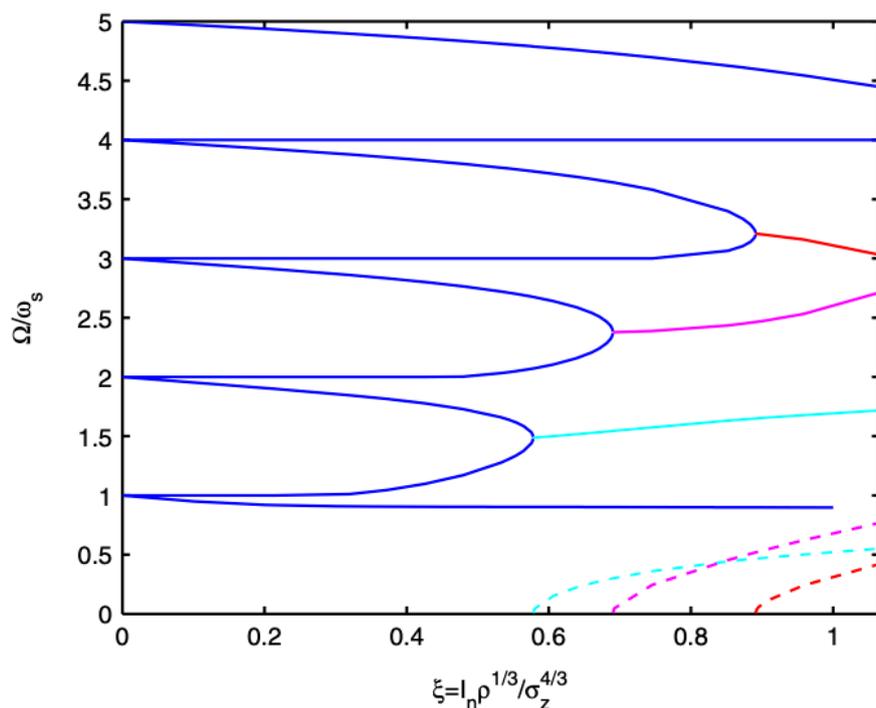


图 13.7: 基于高斯模型计算的模式分析图。实线是在给定特定角向指标 ℓ 下，扫描一系列径向指标 α 后，选出最大与最小频率偏移量 $[\text{Re}(\Omega/\omega_s)]$ 得到的值。虚线表征对应的不稳定性增长率 $[\text{Im}(\Omega/\omega_s)]$ 。图例取自 Y. Cai, PRST-AB 14, 061002 (2011)。

定理 13.14. 储存环 bunched beam 的 CSR 稳定性条件

基于思路三的特征方程，对相干同步辐射 (coherent synchrotron radiation, CSR) 阻抗引起的微束团不稳定，最低阈值条件为

$$\xi = I_n \frac{\rho^{1/3}}{\sigma_z^{4/3}} \geq \xi_{\text{th}} = \begin{cases} 0.578, & \text{Gaussian model} \\ 0.482, & \text{Laguerre polynomial} \end{cases} \quad (13.91)$$

其中，

- $I_n = \frac{I_{b,\text{ave}} \sigma_z}{|\eta| \gamma I_A \sigma_\delta^2}$
- ρ 为二极铁弯转半径
- σ_z 为平衡时的束长
- η 为滑相因子

- γ 为电子参考能量的洛伦兹因子
- $I_A = 17045$ A 为 Alfvén 电流，为一常数
- σ_δ 为束团平衡时的能散

证明 参考 Y. Cai, Linear theory of microwave instability in electron storage rings, Phys. Rev. ST Accel. Beams **14**, 061002 (2011). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.14.061002>

注 此模型假设的 CSR 阻抗为一维、自由空间、稳态模型，且分析忽略同步辐射阻尼效应，即假设同步辐射阻尼率远小于 CSR 不稳定性增长率。 □

🔴 **练习 13.5** 利用前面介绍的基于思路二与思路三的定理的结果，验证在如下几组加速器参数中，束团是否存在相干同步辐射导致的微束团不稳定性。

	LER PEP-II	ALS	VUV NSLS
E (GeV)	3.1	1.5	0.81
η	1.31×10^{-3}	1.41×10^{-3}	2.35×10^{-2}
$\sigma_{\delta 0}$	8.1×10^{-4}	7.1×10^{-4}	5.0×10^{-4}
$\langle R \rangle$ (m)	350	31.3	8.11
ρ (m)	13.7	4	1.91
b (cm)	2	1	2.1
$I_{b,\text{ave}}$ (mA)	2	30	400
σ_z (cm)	1	0.7	4.7
$I_{b,\text{pk}} = I_{b,\text{ave}} \frac{\sqrt{2\pi}\langle R \rangle}{\sigma_z}$ (A)	175	336	173
$\Lambda = \frac{I_{b,\text{pk}}\rho}{ \eta \gamma I_A \sigma_{\delta 0}^2 \langle R \rangle}$	77	1.2×10^3	256
ρ/b	685	400	90
$\frac{\rho}{2\Lambda^{3/2}}$ (cm)	1	4.8×10^{-3}	0.025
$I_n = \frac{I_{b,\text{ave}}\sigma_z}{ \eta \gamma I_A \sigma_\delta^2}$ (m)	2.25×10^{-4}	6×10^{-3}	0.12
$\xi = I_n \frac{\rho^{1/3}}{\sigma_z^{4/3}}$	0.24	7	8.66
阈值条件	below	above	above

此处加速器参数取自 Stupakov and Heifets, PRST-AB **5**, 054402 (2002)。 ■

🟢 **解** 注意，该原始论文中部分导出的数值可能有误。以上表格已修正错误。 ■

对基于模式分解分析储存环微波不稳定性感兴趣的读者，建议查阅下列几篇相关工作：

- K. Oide and K. Yokoya, Longitudinal single-bunch instability in electron storage rings, KEK-Preprint-90-10 (1990). <https://cds.cern.ch/record/208816/files/kek-p>

[reprint-90-10.pdf](#)

- Y. Cai, Linear theory of microwave instability in electron storage rings, Phys. Rev. ST Accel. Beams **14**, 061002 (2011). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.14.061002>

由于此方法历史悠久，许多分析已在经典教科书中介绍，可参考：

- Alexander Wu Chao, Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators, John Wiley & Sons (1993)
- King-Yuen Ng, Physics of Intensity Dependent Beam Instabilities, World Scientific (2005)

13.7 三种思路的比较

以下整理并比较上面介绍的三种思路，彼此不尽相同。

思路一：线性化 Vlasov 方程 \Rightarrow 引入调制函数 \Rightarrow 积分方程。“单次经过加速器”，coasting beam 近似，求 $b(k; s)$ 。含 lattice 沿 s 的细节，以 $\gamma, \rho, \mathbf{R}_{6 \times 6}(s)$ 表征。

$$b(k; s) = b_0(k; s) + \int_0^s d\tau K(\tau, s) b(k; \tau) \quad (13.92)$$

对应不同、独立的调制波长的阻抗成分，系统有不同的响应，因此不同调制波长呈现不同的增益。一般而言，

$$G_f = \left| \frac{b(k; s_f)}{b(k; s_i)} \right| = G_f(k, I_b, \gamma, \rho, \mathbf{R}_{6 \times 6}, \sigma_{\delta 0}) \quad (13.93)$$

注 Lattice 细节会影响微束团动力学 \Rightarrow 同样的磁铁排布，随 s 不同的磁聚焦结构的不同光学特性，可能导致截然不同的结果。此外，此思路容易将束团横向特性纳入分析框架，如： ϵ_{\perp} 、 $\beta_{x,y}^{\text{beam}}$ 、 $\alpha_{x,y}^{\text{beam}}$ 。更多讨论参考第16章。

思路二：线性化 Vlasov 方程 \Rightarrow 傅里叶变换 \Rightarrow 自洽要求 \Rightarrow 色散方程。“储存环 ($\tau_{\text{coll}}^{-1} \gg \omega_s$)”，coasting beam 近似，求 $\omega(k)$ 。仅以几个参数 (γ, η, ρ) 表征 lattice 特性。

$$1 = \frac{i4\pi\epsilon_0 r_e c Z_{\parallel}(k)}{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\omega + ck\eta\delta} \frac{\partial f_0}{\partial \delta} \right] d\delta \quad (13.94)$$

彼此独立的调制波长 \Rightarrow 不同电流表征极点在 $\omega = \text{Re} \omega + i \text{Im} \omega$ 复平面移动，当 $\text{Im} \omega > 0$ 时，表征系统不稳定。一般而言，

$$\tau_{\text{coll}}^{-1} = \text{Im} \omega = \omega(k, I_b, \gamma, \rho, \eta, \sigma_{\delta 0}) \quad (13.95)$$

其中， $\eta \approx \alpha_c = -\oint_C R_{56}(s) ds \approx \nu_x^{-2}$ 。

练习 13.6 **思路一**与**思路二**可以通过平滑近似与拉普拉斯变换(对 s)证明其等价性。■

解 推导细节可参考 S. Heifets, G. Stupakov, and S. Krinsky, Coherent synchrotron radiation instability in a bunch compressor, Phys. Rev. ST Accel. Beams **5**, 064401 (2002) 的附录 A。■

思路三：线性化 Vlasov 方程 \Rightarrow 正交基底展开 \Rightarrow 特征方程。“储存环 ($\tau_{\text{coll}}^{-1} \leq \omega_s$)”，bunched beam 模型，求 $\Omega(\ell, \alpha)$ 。仅以几个参数 (γ, η, ρ) 表征 lattice 特性。

$$\mathbf{M}(\ell, \alpha) \mathbf{a} = \frac{\Omega(\ell, \alpha)}{\omega_s} \mathbf{a} \quad (13.96)$$

不同电流表征径向 (α)、角向 (ℓ) 模之间不同的耦合强度 \Rightarrow 当不同模的频率“碰”在一起时，出现非零虚部，表征系统不稳定。不同电流强度可引起不同形态模式耦合。一般而言，

$$I_{\text{th}}^{(\ell, \alpha)} = I(I_b, \gamma, \rho, \eta, \omega_s, \sigma_{\delta 0}) \quad (13.97)$$

注 思路二、思路三: lattice 细节不会影响微束团动力学 \Rightarrow 同样的磁铁排布, 随 s 不同的 optics, 只要 集总参数 不变, 结果不变, 如: $\eta \approx -\oint_C R_{56}(s) ds \approx \nu_x^{-2}$ 。

注 以上三种分析都没有考虑辐射阻尼与量子激发效应。



笔记 这里的讨论都基于 Vlasov 方程, 忽略辐射阻尼与量子激发效应。如果考虑这些效应, 则应由 Vlasov-Fokker-Planck (VFP) 方程出发。分析变得较为复杂。对基于 VFP 方程, 考虑直线加速器情况的微束团不稳定性理论, 可参考 C.-Y. Tsai et al., Theoretical formulation of phase space microbunching instability in the presence of intrabeam scattering for single-pass or recirculation accelerators, Phys. Rev. Accel. Beams **23**, 124401 (2020). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevAccelBeams.23.124401>

对基于 VFP 方程, 考虑储存环加速器的微波不稳定性理论, 可参考 S. Heifets and G. Stupakov, Derivation of microwave instability dispersion relation with account of synchrotron damping and quantum fluctuations, SLAC-PUB-8803 (2002). <https://inspirehep.net/literature/554861> 或 S. Heifets and G. Stupakov, Single-mode coherent synchrotron radiation instability, Phys. Rev. ST Accel. Beams **6**, 064401 (2003). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.6.064401>

有些读者或许会想, 有没有什么办法能够绕过求解 VFP 方程的过程, 仍然给出考虑辐射阻尼与量子激发效应的集体不稳定性增长率的估算? 直觉地想, 也是最低阶合理的估算, 就是把集体动力学、同步辐射阻尼、量子激发过程视为无关、相互独立的三种效应。一般来说, 量子激发过程晚于同步辐射阻尼。以纵向动力学为例, 假设已经求得同步辐射阻尼率为 τ_d^{-1} (参考 §8.3), 则包含了阻尼效应的集体不稳定性增长率可直观认为

$$\tau_{\text{coll,tot}}^{-1} \stackrel{!}{=} \tau_{\text{coll}}^{-1} - \tau_d^{-1} = \text{Im } \omega - \tau_d^{-1} \quad (13.98)$$

作为最低阶估算, 这么做是合理的。但是, 此量化方式忽略了阻尼效应对集体动力学过程的影响, 因此未必总是准确。学过等离子体理论的读者或许知道, 存在一些情况, 称次临界不稳定性或亚临界不稳定性 (subcritical instability), 指的是当条件适当的时候, 即使 $\tau_{\text{coll}}^{-1} < \tau_d^{-1}$, 也可能出现集体不稳定性。



笔记 对此现象感兴趣的读者, 请自行参考相关专著。

13.8 几种常见的束团不稳定性：分类与半定量讨论

在 §12.3 介绍开头时，我们曾对几种常见的束团不稳定性进行分类，有：

- 单束团不稳定性 (single-bunch instability) 或多束团不稳定性 (multi-bunch instability)；
- 单次经过 (single-pass) 不稳定性、少数几次经过 (few-pass) 不稳定性或储存环 (∞ 次) 不稳定性；
- 横向 (transverse) 不稳定性或纵向 (longitudinal) 不稳定性。

先总结上一章与这一章介绍的几种集体不稳定性：

- **束团崩溃不稳定性** (beam breakup instability, BBU) \Rightarrow 属于 single-pass single-bunch transverse instability，由最低阶横向尾场函数 $W_{\perp, m=1}$ 引起的束团头部粒子不断驱动束团尾部粒子的集体效应，又称偶极 BBU (dipole BBU)。参考 §12.3.1。
 - \rightsquigarrow 涉及高阶横向尾场函数 $W_{\perp, m=2}$ 引起的四极 BBU (quadrupole BBU)、加速过程、BNS 阻尼等为更复杂的 BBU 机制仅提及，没有详细介绍。
 - \rightsquigarrow BBU 没有阈值，就像放大器。因此，如果甩荡振幅超过容许范围，就需要外部抑制。
- **罗宾逊不稳定性** (Robinson instability) \Rightarrow 属于 multi-pass single-bunch longitudinal instability，由最低阶、单模、单腔纵向尾场 $W_{\parallel, m=0}$ 引起的长程、单束团集体效应，又称纵向耦合束团不稳定性 (longitudinal coupled bunch instability, LCBI)。参考 §12.3.2。
 - \rightsquigarrow 涉及高阶模或多模或多腔或多束团或横向长程集体效应等为更复杂的罗宾逊不稳定性机制仅提及，没有详细介绍。
 - \rightsquigarrow 罗宾逊不稳定性能通过微调谐振腔驱动模的频率使满足 $\tau^{-1} < 0$ 而有效抑制。
- **强头尾不稳定性** (strong head-tail instability, SHTI) \Rightarrow 属于 multi-pass single-bunch transverse instability，由最低阶横向尾场函数 $W_{\perp, m=1}$ 引起的、考虑纵向同步振荡情况时，束团头部粒子在半个同步振荡周期内交替驱动束团尾部粒子的集体效应，又称快头尾不稳定性 (fast head-tail instability)、横向模式耦合不稳定性 (transverse mode coupling instability, TMCI)、横向微波不稳定性 (transverse microwave instability)。此不稳定性忽略横向 betatron 振荡与粒子能量偏移的关系。参考 §12.3.3。
 - \rightsquigarrow 涉及高阶横向尾场函数 $W_{\perp, m=2}$ 引起的四极尾场强头尾不稳定性 (quadrupole SHTI) 仅提及，没有详细介绍。
 - \rightsquigarrow 存在阈值条件，只要满足该条件，束团就不受强头尾不稳定性影响。如果超过阈值，一般只能靠外部横向反馈系统抑制。
- **头尾不稳定性** (head-tail instability, HTI) \Rightarrow 同样属于 multi-pass single-bunch transverse instability，由最低阶横向尾场函数 $W_{\perp, m=1}$ 引起的、考虑纵向同步振荡、考虑横向 betatron 振荡与粒子能量偏移情况时 (即，色品)，束团头部粒子在半个同步振荡周期内交替驱动束团尾部粒子的集体效应。参考 §12.3.4。
 - \rightsquigarrow 没有阈值，就像放大器。即只要考虑集体效应，就有头尾不稳定性。一些方案能缓

解，但无法完全抑制。

- **势阱畸变** (potential well distortion, PWD) \Rightarrow 属于 multi-pass single-bunch longitudinal stationary effect，由纵向短程尾场或宽带阻抗导致的、与外部 RF 场叠加后导致的 RF 场存在畸变而引起的静态效应。留意，PWD 虽然是由尾场或阻抗引起，但不是 instability。PWD 导致的静态束团纵向电荷密度分布偏离理想的高斯分布，要求新的分布函数满足 Haissinski 积分方程。根据纵向阻抗虚部符号与加速器操作在 above transition ($\eta > 0$) 或 below transition ($\eta < 0$)，束长可能拉伸或压缩，束团质心可能前倾或后倒。参考 §13.2。
- \rightsquigarrow 没有阈值，即只要考虑集体效应，就有势阱畸变效应。由于束团相空间分布的畸变，对模式耦合不稳定性是有影响的。
- **微束团不稳定性** (microbunching instability, MBI) \Rightarrow 属于 single-pass single-bunch longitudinal instability，由最低阶、宽带纵向尾场 $W_{\parallel, m=0}$ 引起的短程、单束团内的集体效应。参考 §13.4。
- **微波不稳定性** (microwave instability, MWI) \Rightarrow 属于 multi-pass single-bunch longitudinal instability，由最低阶、宽带纵向尾场 $W_{\parallel, m=0}$ 引起的短程、单束团内的集体效应，又称湍流不稳定性 (turbulent instability) 或纵向模式耦合不稳定性 (longitudinal mode coupling instability, LMCI)。参考 §13.5 (coasting beam 近似)、§13.6 (更完整、细致的分析)。
- \rightsquigarrow 实验上能清楚观察到。有明确的阈值，由模式耦合理论给出。但是，背后的物理机制非常丰富，仍为目前储存环集体效应研究热点之一。
- \rightsquigarrow 由于相空间已经按正交基底被分解，因此有了“模式”的概念。集体不稳定性即表征发生模式耦合。上述的势阱畸变静态效应导致束团相空间分布偏离理想情况，也就导致基底占比偏离理想情况，因此发生模式耦合的阈值条件可能改变。
- **耦合束团不稳定性** (coupled bunch instability, CBI) \Rightarrow 属于 multi-pass multi-bunch instability，分横向、纵向，由最低阶、单模、单腔横向尾场 $W_{\perp, m=1}$ 或纵向尾场 $W_{\parallel, m=0}$ 引起的长程、多束团集体效应。讲义里没有详细介绍，仅简短讨论，参考 §12.3.5。

总结完后，以下定性或半定量、稍些零碎地讨论这几种常见的束团不稳定性与上面没有涉及的其它不稳定性及其抑制方案。

13.8.1 势阱畸变效应

对势阱畸变效应，前面介绍过，束团可能前倾或后倒，这是由于阻抗实部导致。阻抗实部导致束团中的粒子失去能量，虚部导致束团内粒子能量的重新再分布 (re-distribution)。第 8 章介绍过，当储存环加速器操作在 above transition 时，高能粒子较晚到达，在束团尾部 ($z < 0, \Delta\tau > 0$)；低能粒子较早到达，在束团头部 ($z > 0, \Delta\tau < 0$)。于是，束团整体由于阻抗导致的能量损失在 $\eta > 0$ 时体现在质心稍微“前倾”。此“前倾”或“后倒”现象实验上可以通过条纹相机 (streak camera) 观察到。或者，反过来，有时候以此从实验上测量

加速器的纵向阻抗实部。



笔记 通过测束团纵向分布倾斜量化阻抗的方法，仅在当束团没有遭遇集体不稳定性之前，即束团电流在阈值条件以下。

13.8.2 微波不稳定性

有些读者可能好奇，一些集体效应要不以其“现象”命名(如：束团崩溃不稳定性、头尾不稳定性、势阱畸变等)，要不以早期发现该不稳定性机制的人命名(如：罗宾逊不稳定性等)。为什么称微波不稳定性？从字面上看，似乎没有体现此不稳定性机制？

先岔开问题，说明一下微波不稳定性对未聚束束团的机制。其实，研究微波不稳定性机制时，早些时候常假设束团为未聚束(unbunched beam)，又称 coasting beam，即采用思路二分析方式。当 $\alpha_c > 0$ 或操作在 above transition 时，此不稳定性机制非常类似于基于思路一讨论的直线加速器的微束团不稳定性。微束团不稳定性将在 §16.2.1 讨论。这里想说的是，在储存环中，当 $\alpha_c > 0$ 或 above transition 时，以空间电荷场为例，束团头部粒子获得能量，尾部粒子失去能量，束团整体而言没有净能量损失或获得。但是，这种发生在束团内的能量重新分布加上在储存环中绕行时的动量紧缩因子，条件适当时，就可能导致束团纵向分布局部密度不断增加。由于此种情况在储存环中有负质量效应(negative mass effect)，因此，此不稳定性又称负质量不稳定性(negative mass instability)。由于该不稳定性在实验上测到的信号常常落在微波频段，因此称微波不稳定性。

随着对微波不稳定性的更多了解，更细致的分析基于前述思路三——模式分解——的结果，这里进一步按半定量方式讨论。可以预期，实验上不容易直接观察到“模式耦合”；“模式”在 Sacherer 理论中是为了求解 Vlasov 方程而给出的一种漂亮的拆解问题的理论模型。从束团整体看，微波不稳定性会导致束团束长拉伸与能散增加。但是，从束团拉伸此一现象不容易判定是微波不稳定性导致——也可能是势阱畸变效应。于是，一般认定当束长与能散同时增长时，表征出现微波不稳定性。

分析发现，微波不稳定性的阈值电流 $I_{b,th}$ 为束长、能散的函数，即 $I_{b,th} = I_{b,th}(\sigma_z, \sigma_\delta)$ 。然而， $\sigma_z = \sigma_z(I_b)$ ， $\sigma_\delta = \sigma_\delta(I_b)$ 。因此，

当出现微波不稳定性时，束团总维持在阈值，永远不会超过阈值。

换句话说，微波不稳定性具有“自我调节”(self-regulating)的特性，基本上不会导致粒子迅速丢失。

上一小节关于势阱畸变的讨论中，最后提到有时候可利用此效应从实验上获得加速器的阻抗实部信息。有些好奇的读者可能会问，有没有可能寻着类似思路，通过微波不稳定性的机制，反过来从实验上得知加速器的部分阻抗信息？答案是肯定的。通过微波

不稳定性体现的机制，可以获得纵向阻抗的频率依存关系，即以下参量 a 的信息

$$Z_{\parallel}(\omega) \propto \omega^a \quad (13.99)$$

其中，参量 a 可以通过测量当束团遭遇微波不稳定期间，束长在不同电流情况下的关系，即 $\sigma_z = \sigma_z(I_b; a)$ 或 $I_b = I_b(\sigma_z; a)$ ，称 Chao-Gareyte 定标定律 (Chao-Gareyte scaling law)。

定律 13.4. Chao-Gareyte 定标定律

在储存环加速器中，假设(宽带)阻抗函数与频率关系有如下形式

$$Z_{\parallel}(\omega) \propto \omega^a \quad (13.100)$$

则当束团经历微波不稳定性时，其束长与束团电流的满足

$$\sigma_z^{2+a} = \mathcal{K} I_b \quad (13.101)$$

其中，

$$\mathcal{K} \propto \frac{\eta}{\nu_{s0}^2 E} \quad (13.102)$$

此定标定律适用范围： $c/b < \omega < (1 \sim 5) \times c/\sigma_z$ 。

证明 参考 Alexander Wu Chao, *Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators*, John Wiley & Sons (1993) 一书的 pp.329-332。

注 对不同的 a ，就有不同的束长与电流的定标关系。如： $a = -1/2$ 的宽带阻抗， $\sigma_z(I_b) \propto I_b^{2/3}$ 。

注 按此定标定律，则不同加速器装置的宽带阻抗就能以 a 标记。比如：SPEAR II 储存环的 $a \approx -0.68$ 。原始论文可参考 A.W. Chao and J. Gareyte, *Scaling law for bunch lengthening in SPEAR II*, Part. Accel. **25**, 229 (1990). <https://cds.cern.ch/record/210836/files/p229.pdf>。



笔记 上面介绍了势阱畸变的 Haissinski 方程或束长的非线性方程，有 $\sigma_z = \sigma_z(I_b < I_{b,th}; Z_{\parallel})$ 适用于阈值电流以下的情况；这里介绍了 Chao-Gareyte 定标定律，适用于微波不稳定性阈值附近情况，有 $\sigma_z = \sigma_z(I_b; a)$ ，其中， a 为阻抗函数与频率的定标系数。两者在理论上是否能自洽，是一个值得研究的课题。

13.8.3 基于相空间模式分解的讨论

基于 §13.6 介绍的思路三：相空间分布函数的模式分解，此种思路具有一般性，这里试着再多一些半定量讨论，尽管离完整的理论仍有差距。前面提过，相对于径向模，模式耦合不稳定性更容易发生在角向模式之间的耦合，因其阈值电流较低。现在，先看没有集体效应情况下，这些角向模在相空间的运动形态。参考图 13.8，为纵向相空间分布函数的角向基底分解示意图。不同角向模 ℓ 的分布形态对应不同的振荡特性，如： $\ell = 0$ 为静态分布； $\ell = 1$ 体现的是该模的质心位置随纵向同步振荡而改变，又称偶极模； $\ell = 2$ 体现出该

模的尺寸随纵向同步振荡改变，又称四极模或呼吸模 (breathing mode)，当该模在相空间旋转时，投影在横轴上就像该模会呼吸一样，时而大时而小； $\ell = 3, 4$ 为高阶模，此处不论。

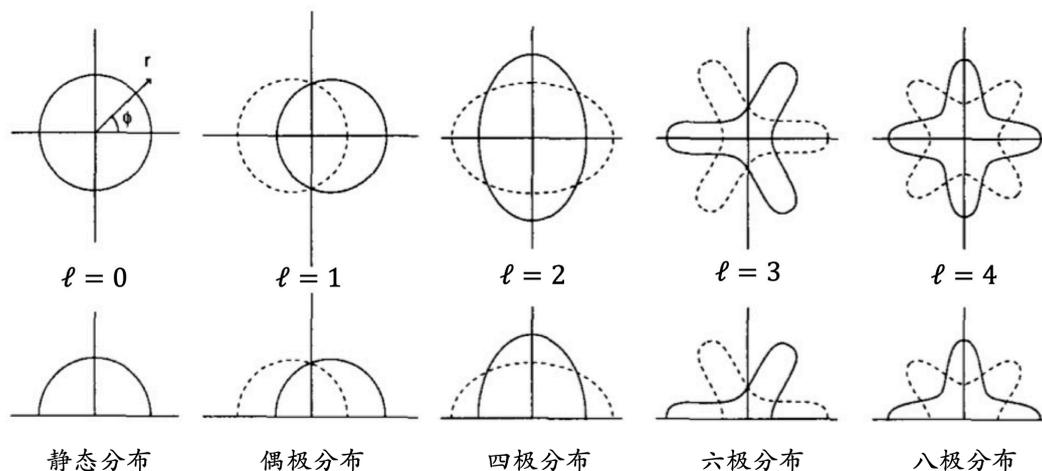


图 13.8: 纵向相空间分布函数的角向基底分解示意图。当操作在 above transition 时，上面的相空间模逆时针旋转；当操作在 below transition 时，为顺时针旋转。图例修改自 K.-Y. Ng 一书。

前面介绍过，由于展开的基底是完备的，可写成

$$f_1(\phi, J; \theta) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} R_{\ell}(J) e^{i\ell\phi} e^{-i\frac{\Omega}{\omega_s}\theta} \quad (13.103)$$

因此，在没有集体效应影响下，即“纯光学”情况，这里的每个角向模彼此正交，每个模有自己在相空间的旋转频率 $\dot{\phi}_{\ell}$ ，互不影响。但是，当考虑集体效应时，由于阻抗函数 $Z_{\parallel}(\omega)$ 与频率有关，因此，可以预期在众多角向模中，可能存在不幸的几个模特别容易与阻抗函数产生交互作用，从而导致集体不稳定性。

上面给出线性化 Vlasov 方程写成无穷多线性方程组的形式，即

$$\frac{\Omega}{\omega_s} a_{\alpha}^{\ell} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{\infty} M_{\ell, m}^{\alpha, \beta} a_{\beta}^m \Leftrightarrow \mathbf{M}(\ell, \alpha) \mathbf{a} = \frac{\Omega(\ell, \alpha)}{\omega_s} \mathbf{a} \quad (13.104)$$

此动力学系统的稳定性可由如下的行列式方程决定

$$\det \left(\frac{\Omega(\ell, \alpha)}{\omega_s} \mathbb{I} - \mathbf{M}(\ell, \alpha) \right) = 0 \quad (13.105)$$

此方程又称色散方程 (dispersion equation) 或久期方程 (secular equation)，其中， \mathbf{M} 称交互作用矩阵 (interaction matrix)。可以预期， \mathbf{M} 包含阻抗函数。简化起见，此处我们不打算给出 \mathbf{M} 的具体形式，仅打算给出一个粗糙的、形式上的形式。首先，当忽略集体效应时， \mathbf{M} 仅在对角线上有值，或者说， $\mathbf{M} = \ell \delta_{\ell\ell'}$ ，不同的角向模彼此独立。当考虑集体效应时，交互作用矩阵大概有如下形式

$$\mathbf{M} = \ell \delta_{\ell\ell'} + i^{\ell-\ell'+1}(\dots) \times I_b \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Z_{\parallel}(\omega)}{\omega} (\dots) d\omega \quad (13.106)$$

其中， I_b 为束团电流。利用阻抗函数的对称特性，可以证明， \mathbf{M} 为实矩阵，细节此处不论。

现在，简化起见，考虑描述此系统仅需两个模就足够，因此， \mathbf{M} 为 2×2 矩阵，则色散方程可写成

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\Omega}{\omega_s} - M_{11} & -M_{12} \\ -M_{21} & \frac{\Omega}{\omega_s} - M_{22} \end{pmatrix} = 0 \quad (13.107)$$

其中，待解量为 $\Omega \in \mathbb{C}$ 。以上行列式方程可以解得特征值，有

$$\frac{\Omega}{\omega_s} = \frac{1}{2} \left(M_{11} + M_{22} - \sqrt{M_{11}^2 + 4M_{12}M_{21} - 2M_{11}M_{22} + M_{22}^2} \right) \quad (13.108)$$

其中，当 $I_b \rightarrow 0$, $M_{12} = 0, M_{21} = 0, M_{11} = M_{22} = \ell$, $\Omega = \ell\omega_s$ 。当 $I_b \neq 0$ 时, $M_{ij} \neq 0$, 当根号中取值小于零时, Ω 将包含虚部。也就是说，尽管行列式里的 $M_{11,12,21,22}$ 都是实数，但解出来的 Ω 却可能出现复数，于是有先前的结论：

当 $\text{Im} \Omega > 0$ 时，发生模式耦合，系统不稳定。

对微波不稳定性这类单束团纵向模式耦合不稳定性 (LMCI)，仅取两个模是不够的，为了能够得到较准确的、收敛的结果，一般至少需要取数十个模以上 ($-5 \leq \ell \leq 5$)。收敛效果取决于采用的基底函数，而基底函数的选择与束团分布形态、阻抗函数样貌有关。作为对比，像强头尾不稳定性这类单束团横向模式耦合不稳定性 (TMCI)，取两个模——即双粒子模型——已经能给出完整的物理图像，也能得到令人满意的阈值条件。

注 集体效应导致的频移 $\Delta\omega \equiv \text{Re} \Omega$ 为相干频移 (coherent tune shift)，不同于势阱畸变效应导致的非相干频移 (incoherent tune shift)。



笔记 思考一下，为什么 TMCI 只需要少数几个模足够，而 LMCI 却要取这么多模才能收敛？

最后，留意一下，耦合束团 (coupled bunch) \neq 模式耦合 (mode coupling)，前者指的是多束团集体振荡形态，后者是单束团纵向相空间的基底分布函数间的耦合。

13.8.4 头尾不稳定性

注意，头尾不稳定性不是刚刚上面介绍过的强头尾不稳定性。进一步讨论头尾不稳定性前，先介绍一下束团振荡模式的一般频率表示式。在 §11.7.6 定义的有效阻抗中已经出现过一次，束团振荡模式的一般频率表示式包含逐圈绕行频率、横向 betatron 振荡频率、纵向同步振荡频率，可写成

$$\omega_p = (pM + \mu)\omega_0 + m\omega_\beta + \ell\omega_s \quad (13.109)$$

其中， M 为束团个数， $\mu = 0, 1, 2, \dots, (M-1)$ 为第 μ 个耦合束团振荡模式。以下暂定讨论单束团，因此有 $M = 1, \mu = 0$ 。

对束团纵向振荡相关的频率，

$$m = 0, \quad \ell = 1, 2, 3, \dots \quad (13.110)$$

对束团横向振荡相关的频率，

$$m = 1, 2, 3, \dots, \quad \ell = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \quad (13.111)$$

由上可知，对 §12.3.3 讨论的强头尾不稳定性，由于只考虑了双宏粒子模型，且忽略 betatron 振荡与同步振荡耦合 (synchro-betatron coupling)，于是对应 $m = 1, \ell = 0$ ， p 不妨选为 0。当 $|\ell| > 1$ 时，可以想像，束团内纵向分布的振荡模式将出现 ℓ 个节点，对应到多于双宏粒子模型，将对应更真实情况。

对头尾不稳定性，同样忽略 betatron 振荡与同步振荡耦合，对应 $m = 1, |\ell| \geq 1$ ， p 不妨选为 0。由于头尾不稳定性考虑了色品效应，因此，betatron 振荡频率还需要加一修正项

$$\omega_p \rightarrow \omega_p - \omega_\xi \quad (13.112)$$

其中， $\omega_\xi = \omega_0 \xi / \eta_0$ 。

§12.3.4 介绍头尾不稳定性时，因为用了双粒子模型，仅能给出 $\ell = 0$ 的情况，即 $\omega_p = \omega_\beta + 0 \cdot \omega_s$ 。在实验上还可以看到更丰富的高阶 ℓ 情况，如图 13.9，给出了束团内不同纵向位置的横向 x 方向偶极振荡，即 $\langle x \rangle(z) = \int x \lambda(z) dx$ 。



笔记 由图 13.9 大概可以猜到，尽管不是唯一的，描述此分布的一个合理的基底选择为埃尔米特 (Hermite) 多项式，其上加载色品效应导致的 betatron 相位差，有

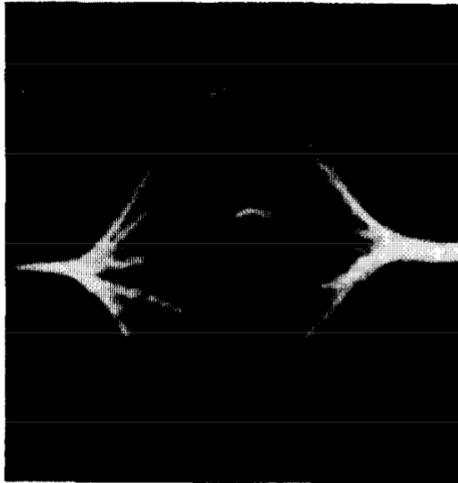
$$\langle x \rangle(z) \propto H_\ell(z) e^{i\omega_\xi z/c} \quad (13.113)$$

假设束团相空间分布为高斯分布。

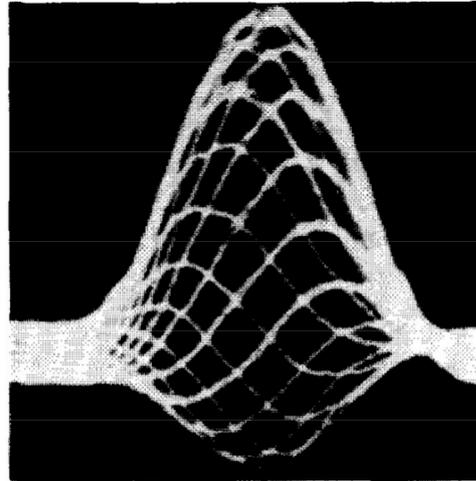
如 §12.3.4 讨论，此头尾不稳定性没有阈值条件，即只要考虑集体 (流强) 效应，就有头尾不稳定性。抑制此不稳定性的方式为调整色品 ξ ，使其为正²²。此外，此头尾不稳定性还扮演一特别角色：作为让人头痛的耦合束团不稳定性的前兆，如：横向耦合束团不稳定性 (TCBI)。TCBI 一般被认为是多束团集体效应的“天花板”。抑制 TCBI 的方法一般靠外部提供的横向逐束团反馈系统，或有些加速器靠巧妙调整正色品。读者可能会问：靠正色品抑制头尾不稳定性能理解，但这也能抑制 TCBI？后者思路有点绕，甚至有些牵强：既然知道 TCBI 的前兆是头尾不稳定性，那么设法抑制头尾不稳定性，似乎就能有效抑制 TCBI。

结束这一小节前，这里比较一下头尾不稳定性与强头尾不稳定性。

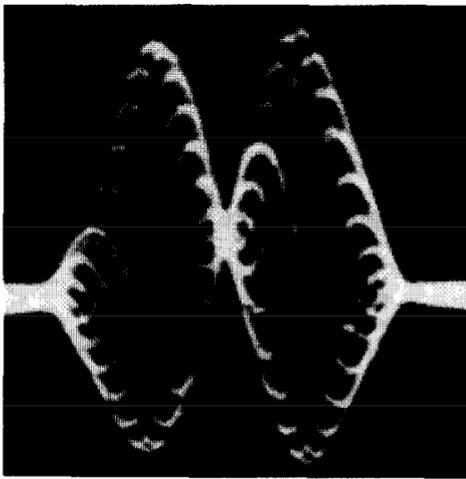
²²根据 Vlasov 方程分析，如果 $\xi < 0$ ，虽不是“绝对”，但大概率会出现不稳定性。



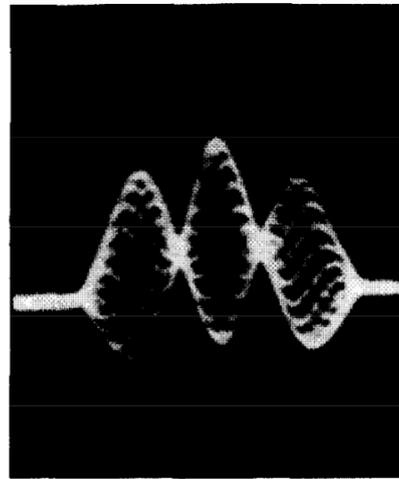
$$\begin{aligned} \ell &= 0 \\ \Delta\psi_\beta &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \ell &= 0 \\ \Delta\psi_\beta &= 2.3 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \ell &= 1 \\ \Delta\psi_\beta &= 6.9 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \ell &= 2 \\ \Delta\psi_\beta &= 6.9 \end{aligned}$$

图 13.9: 几种不同 ℓ 的单横向束团振荡模式, 其中, $\Delta\psi_\beta$ 为由于色品导致束团头尾积累的 betatron 相位改变。此图在 CERN PS (Proton Synchrotron) 增强器中测得。图例修改自 A.W. Chao 一书。

性质 13.2. 头尾不稳定性 vs. 强头尾不稳定性

1. 强头尾不稳定性为模式耦合不稳定性，存在阈值条件。头尾不稳定性没有阈值条件，只要考虑集体(流强)效应，就有此不稳定性。
2. 强头尾不稳定性可以视为头尾不稳定性在 $\xi = 0$ 时的特例吗？数学上，可以。当 $\xi = 0$ 时，头尾不稳定性的 Υ 退化回强头尾不稳定性的 Υ ，方程的解也退化为强头尾不稳定性的解。但是，物理上机制不同，不是特例。
3. 从物理机制看，强头尾不稳定性具有共振特性，头尾不稳定性则不是共振，而是色品效应导致粒子运动与尾场相位错开 90° 相位差。
4. 调整色品能够抑制头尾不稳定性，但无法抑制强头尾不稳定性。
5. 在加速器运行的实际情况，束团运动同时包含头尾不稳定性与强头尾不稳定性。
6. 头尾不稳定性可视为横向耦合束团不稳定的前兆。

□

13.8.5 耦合束团不稳定性

虽然 §12.3.2 介绍过的罗宾逊不稳定性考虑单束团，但其实为一种长程尾场或窄带阻抗导致的耦合束团不稳定性。由于高 Q 值的窄带阻抗，尾场衰减时间长，对单束团，其耦合发生在邻近的绕行周期时间内。对 $M > 1$ 多束团，根据上面介绍的束团串振荡模式的一般频率表示式

$$\omega_p = (pM + \mu)\omega_0 + m\omega_\beta + l\omega_s \quad (13.114)$$

其中， μ 为耦合束团振荡模式指标 (coupled bunch mode index)。不难理解，有 M 个束团就有 M 个振荡模式，对应 $\mu = 0, 1, 2, \dots, (M - 1)$ ，参考图 13.10 与 13.11，分别对应几种横向与纵向振荡模式。不同的 μ 体现的不同振荡模式，其偏差可以描述如下

$$\tilde{y}_n^{(\mu)} \text{ 或 } \tilde{z}_n^{(\mu)} \propto e^{i2\pi\mu\frac{n}{M}} \quad (13.115)$$

如果束团串在储存环中为均匀填充 (uniform fill)，则不同振荡模式彼此相位差固定，有

$$\Delta\mu = 2\pi\frac{\mu}{M} \quad (13.116)$$

可以想像，由束团串形成的这些振荡模式不属于任何一个束团，就像“波”一样，形成模，有各自的频率。周遭环境形成的阻抗函数同为频率的函数，因此，这些振荡模之中的几个如果落到对应频率的主导的阻抗峰值——即受到特定窄带阻抗函数的“青睐”——则整体束团串体现在该振荡频率的振荡模式将共振而变得不稳定。那些不受“青睐”的束团串振荡模式将维持稳定。略去推导细节，此处给出一个乍看让人惊讶的结果：

定理 13.15. 耦合束团振荡总增长率为零

忽略外部阻尼效应情况下，假设 M 个束团形成束团串，共有 M 个振荡模，其耦

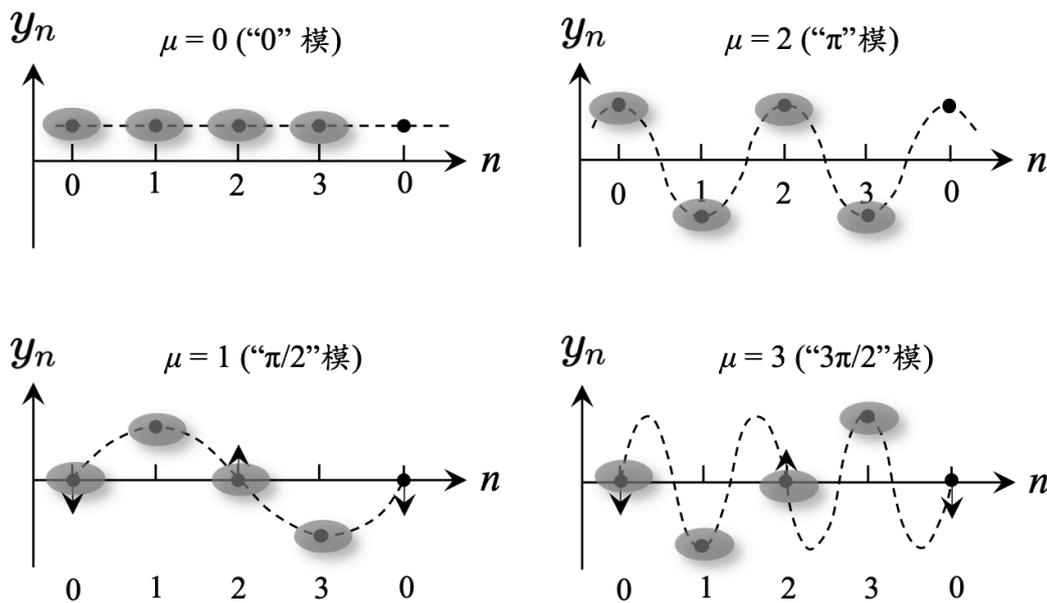


图 13.10: 对 $M = 4$ 束团串, 共有四种横向振荡模式, 分别标注为 $\mu = 0, 1, 2, 3$, 不同振荡模式彼此相位差 $\Delta\mu = 2\pi n/M = 2\pi/4 = \pi/2$ 。这里假设 $n = 0$ 为最末尾束团, 即整体束团串在图中向右运动。

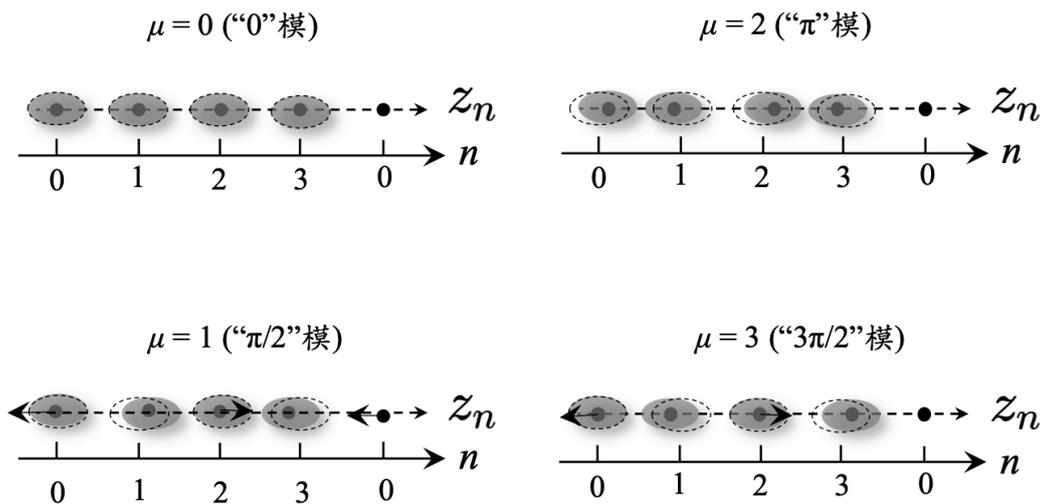


图 13.11: 对 $M = 4$ 束团串, 共有四种纵向振荡模式, 分别标注为 $\mu = 0, 1, 2, 3$, 不同振荡模式彼此相位差 $\Delta\mu = 2\pi n/M = 2\pi/4 = \pi/2$ 。这里假设 $n = 0$ 为最末尾束团, 即整体束团串在图中向右运动。

合束团振荡总增长率为零，写为

$$\tau_{\text{总}}^{-1} = \sum_{\mu=0}^{M-1} \tau_{\mu}^{-1} = 0 \quad (13.117)$$

其中， μ 为耦合束团振荡模式指标。此式适用于纵向与横向耦合束团情况。 □

对第12章介绍的罗宾逊不稳定性，有 $M = 1, n = 0, m = 0, \ell = 1$ ，则 $\omega_p = p\omega_0 + \omega_s$ ，因此，阻抗函数取值仅发生在当 ω_p 落在窄带频宽范围内，一般为 $p = h$ ，其中， $h = \omega_{\text{RF}}/\omega_0$ 为 RF 谐波数。

这里试着应用有效阻抗的概念，近似推导罗宾逊不稳定性增长率。由定理 12.5 知

$$\tau_n^{-1} = \text{Im} \Delta\omega_{\parallel} \propto \text{Re} \left(\frac{Z_0^{\parallel}}{n} \right)_{\text{eff}} \propto \sum_p \text{Re} \frac{Z_{\parallel}(\omega_p)}{\omega_p} \cdot h_{\ell=1}(\omega_p) \propto \sum_p \omega_p \cdot \text{Re} Z_{\parallel}(\omega_p) \quad (13.118)$$

其中，对高斯束团分布，束团功率谱有

$$h_{\ell}(\omega) = (\omega\sigma_{\tau})^{2\ell} e^{-(\omega\sigma_{\tau})^2} \quad (13.119)$$

对单束团罗宾逊不稳定性而言， $\omega_p = p\omega_0 + \omega_s$ ，其中，由于谐振腔阻抗为窄带阻抗，故仅 $p \approx \pm h$ 为主要贡献。已知纵向阻抗实部为频率的偶函数，因此增长率可简化为

$$\tau_n^{-1} \propto h\omega_0 [\text{Re} Z_{\parallel}(h\omega_0 + \omega_s) - \text{Re} Z_{\parallel}(h\omega_0 - \omega_s)] \quad (13.120)$$

与 §12.3.2 结果一致。

注 细心的读者可能发现，以上估算似乎没有体现 above transition $\eta > 0$ 或 below transition $\eta < 0$ 的区别。其实 η 藏在定理 12.5 中的系数 B 。

目前来说，纵向耦合束团不稳定性一般不会对加速器运行造成太大问题，因为目前室温或超导谐振腔的设计能够很好地将(不想用到的)模式抑制做得很好²³。上面提过，横向耦合束团不稳定性则是“天花板”，一般需要外部逐束团反馈系统 (bunch-by-bunch feedback system) 提供阻尼。



笔记 上一小节最后提到，TCBI 也可以通过正色品抑制。既然如此，那为什么还需要外部逐束团反馈系统？多此一举？主要原因是，除了抑制头尾不稳定性，如果还为了抑制 TCBI 而将色品调得更大些，那么动力学孔径 (dynamic aperture) 就会变小 (参考 §7.11)，这不是我们乐见的。为了尽量不牺牲动力学孔径，安置逐束团反馈系统或许是值得付出的代价。

作为半定量讨论，多束团或耦合束团不稳定性，其不稳定性增长率表征的是束团串整体视为一种振荡模式 (“波”) 的振幅增长率，势必与“阈值电流”相关。这里的“阈值电流”指的是束团串里的单束团电流还是束团串整体的电流呢？答案是后者，似乎显而易见。即 $I_b \rightarrow MI_b$ ，其中， M 为束团串中的束团个数。此结论同时适用于横向与纵向耦合束团不

²³写成术语有: the higher-order modes (HOMs) are effectively de-Q'd.

稳定性。这个结论看起来直观，但如何从数学式中体现？不妨回到有效阻抗定义，分母的束团功率谱求和表示式

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} h_{\ell}(\omega_p) \quad (13.121)$$

其中，以高斯分布为例，则 $h_{\ell}(\omega_p)$ 有

$$h_{\ell}(\omega) = (\omega\sigma_{\tau})^{2\ell} e^{-(\omega\sigma_{\tau})^2} \quad (13.122)$$

对 p 求和从 $-\infty$ 至 ∞ ，束团串振荡频率的一般表示式

$$\omega_p = (pM + \mu)\omega_0 + m\omega_{\beta} + \ell\omega_s \approx PM\omega_0 \quad (13.123)$$

其中，由于 $\mu \leq (M-1)$ 、 $m\omega_{\beta}$ 、 $\ell\omega_s$ ，都可以近似吸收到 P 中。于是，以上求和表示式即求

$$\sum_{P=-\infty}^{\infty} e^{-(Px)^2} \quad (13.124)$$

其中， $x = M\omega_0\sigma_{\tau}$ 。上式求和的结果为一种特殊函数，称 ϑ_3 函数，为椭圆函数理论中的一种函数。片刻思考后知道， $x \leq 1$ 。将 x 视为小量展开，有

$$\sum_{P=-\infty}^{\infty} e^{-(Px)^2} \equiv \vartheta_3(0, e^{-x^2}) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{x} \left[1 + 2e^{-(\pi/x)^2} + 2e^{-(2\pi/x)^2} + \dots \right] \quad (13.125)$$

保留第一项，则有

$$Z_{\perp, \text{eff}}(\omega_p) \approx \frac{M\omega_0\sigma_{\tau}}{\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{p=-\infty}^{\infty} Z_{\perp}(\omega_p) h_{\ell=0}(\omega_p) \propto M \quad (13.126)$$

结合定理 12.5 的结果，有

$$\begin{aligned} \Delta\omega_{\perp} - i\mathcal{A}(Z_{\perp})_{\text{eff}} &\propto MI_b \\ \Delta\omega_{\parallel} &= +i\mathcal{B}\left(\frac{Z_{\parallel}}{n}\right)_{\text{eff}} \propto MI_b \end{aligned} \quad (13.127)$$

于是，许多单束团的不稳定性增长率或许按以上思路可以推广到多束团情况。但是，这是基于如上将 ϑ_3 函数近似展开后保留最低阶的结论， $x \ll 1$ 对应到 $\sigma_{\tau} \rightarrow 0$ 假设。如果尾场函数的特征长度不是远大于束长，则以上近似展开不再适用， $I_b \rightarrow MI_b$ 推广也不再成立。

13.8.6 电阻壁不稳定性

第 11 章介绍过单位长度、圆柱对称的电阻壁纵向阻抗有

$$Z_{\parallel}(\omega) = [1 - i \operatorname{sgn}(\omega)] \frac{1}{2bc} \sqrt{\left(\frac{Z_0 c}{4\pi}\right) \frac{2|\omega|}{\pi\sigma}} \quad (13.128)$$

其中， σ 为管壁金属电导率， b 为管壁半径。对应的单位长度电阻壁横向阻抗有

$$Z_{\perp}(\omega) = \frac{2c}{b^2\omega} Z_{\parallel}(\omega) = [1 - i \operatorname{sgn}(\omega)] \frac{1}{b^3} \sqrt{\left(\frac{Z_0 c}{4\pi}\right) \frac{2}{\pi\sigma|\omega|}} \quad (13.129)$$

由于电阻壁阻抗到处存在，且电阻壁阻抗对频率的特殊依存关系，电阻壁导致的集体不稳定性扮演不同于上面提到的宽带或窄带阻抗导致的单束团或多束团不稳定性。对

纵向来说，

$$\left(\frac{Z_{\parallel}}{n}\right)_{\text{eff}} \propto Z_{\parallel}(\omega_p) \cdot h_{\ell}(\omega_p) \quad (13.130)$$

其中，束团功率谱 $h_{\ell=0} \propto e^{-(\omega\sigma\tau)^2}$ 主要集中在低频部分，而纵向阻抗 $Z_{\parallel} \propto \sqrt{|\omega|}$ 在低频部分与束团功率谱重叠较少（相对于横向情况，以下讨论）。因此，电阻壁纵向不稳定性一般不造成太大问题。

对横向电阻壁效应，情况变得不再乐观，主要由于：

- $Z_{\perp} \propto 1/\sqrt{|\omega|}$ ，在低频部分将与束团功率谱开始有明显重叠，横向有效阻抗 $(Z_{\perp})_{\text{eff}}$ 增加。
- 由上面电阻壁纵向阻抗 $Z_{\parallel} \propto 1/b$ 知，其横向阻抗 $Z_{\perp} \propto 1/b^3$ 。当管壁半径减小时，电阻壁横向阻抗增加将变得非常显著。

因此，如果不慎，将导致电阻壁横向不稳定性！电阻壁不稳定性为低频阻抗、长程尾场导致的横向耦合束团（或多束团）不稳定性 — 前述的“天花板”。

略去推导细节，对最低阶横向模 $\ell = 0$ ，复频率有

$$\Delta\omega_{\perp} \approx -i \frac{MI_b c}{8\sqrt{\pi}\nu_{\beta}(E/|e|)} \cdot \sum_{p=-\infty}^{\infty} (Z_{\perp})_{\text{eff}} \quad (13.131)$$

或其不稳定性增长率为

$$\tau^{-1} \approx -\frac{MI_b c}{8\sqrt{\pi}\nu_{\beta}(E/|e|)} \cdot \sum_{p=-\infty}^{\infty} \text{Re}(Z_{\perp})_{\text{eff}} \quad (13.132)$$

其中，

$$\omega_p = (pM + \mu + \nu_{\beta}) \cdot \omega_0 \quad (13.133)$$

由上面讨论知，主要的横向有效阻抗将由低频部分贡献。由于 p 由 $-\infty$ 至 ∞ ， μ 为正整数， ν_{β} 包含整数部分与小数部分，可以预见，最终决定增长率的正负号将由 ν_{β} 的小数部分决定，即最终主要由如下两频率决定横向有效阻抗

$$\begin{aligned} \omega_p &= \omega_+ \equiv (\Delta\nu) \cdot \omega_0 \\ \omega_p &= \omega_- \equiv (\Delta\nu - 1) \cdot \omega_0 \end{aligned} \quad (13.134)$$

其中， $\nu_{\beta} = \text{正整数} + \Delta\nu$ ， $\Delta\nu > 0$ 。代回 τ^{-1} 即可得到近似估算的增长率。

定理 13.16. 电阻壁横向不稳定性

为横向耦合束团（或多束团）不稳定性，其不稳定性增长率为

$$\begin{aligned} \tau^{-1} &\approx -\frac{MI_b c}{8\sqrt{\pi}\nu_{\beta}(E/|e|)} \cdot \sum_{p=-\infty}^{\infty} \text{Re}(Z_{\perp})_{\text{eff}} \\ &\propto \frac{MI_b}{\nu_{\beta}E} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\Delta\nu}} - \frac{1}{\sqrt{\Delta\nu}} \right) \end{aligned} \quad (13.135)$$

其中，

- $\Delta\nu = \nu_\beta - \text{正整数} > 0$
- ν_β 为横向 betatron tune
- M 为总束团数
- I_b 为束团平均电流 (以储存环周长为平均)
- c 为光速
- E 为粒子参考能量

以上公式中， τ^{-1} 的正负号由 $\Delta\nu \geq 1/2$ 决定，有

$$\tau^{-1} \propto \left(\frac{1}{\sqrt{1-\Delta\nu}} - \frac{1}{\sqrt{\Delta\nu}} \right) \begin{cases} > 0, & \Delta\nu > 1/2 \text{ (不稳定)} \\ < 0, & \Delta\nu < 1/2 \text{ (稳定)} \end{cases} \quad (13.136)$$

此外，此电阻壁横向不稳定性发生的频率较低，约为 $\omega_p = (1 - \Delta\nu)\omega_0$ 。

证明 参考 Alexander Wu Chao, *Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators*, John Wiley & Sons (1993) 一书的 pp.177-178。

注 在实际加速器运行，是不是 betatron tune 一定要满足以上半整数关系？最好满足。如果不满足，但能想办法提供足够的阻尼效应抑制电阻壁横向不稳定性也可行。

与其它集体不稳定性相比较，电阻壁不稳定性是一种特别机制：既展现窄带阻抗特性，也体现宽带阻抗特性。怎么说？展现窄带特性，因为只有非常低频——在低于绕行频率 $\leq \omega_0$ ——才有明显的电阻壁集体效应。同时体现宽带阻抗特性，因在求解增长率时，横向有效阻抗量级的评估需要在大范围 p 中加总。

13.8.7 离子导致的集体不稳定性

作为零星讨论，这里介绍一个不同于前面介绍的实体部件导致的集体不稳定性，是由在电子加速器真空管道中的(正)离子云导致的集体效应²⁴。

为什么真空管道中存在正离子？首先，加速器金属真空管道尽管要抽真空，但只能说是相对真空²⁵，而不是绝对真空。于是，管道中的离子通过加速器中加速粒子经过时与残留气体分子的碰撞、电离不断产生。这些离子中的一些可能会被电子束产生的电位井捕获，如果此机制形成反馈条件，将导致不稳定的电子束团运动。这些离子在束团周围来回振荡，与电子的库仑相互作用可能带动电子束形成振荡运动。如果电子束-离子系统形成“共振”，就可能产生一种集体相干不稳定性。此离子驱动的不稳定性可细分两类：

²⁴如果在加速器中的绕行束团带正电荷，比如：正子束、质子束，则存在“电子云”集体效应。

²⁵实际加速器中的管道真空大约 $10^{-8} \sim 10^{-7}$ Pa。真空又细分静态真空与动态真空，动态真空是包含束流环境时的真空，真空度一般比静态真空高一些。

- 离子捕获不稳定性 (ion trapping instability) \Rightarrow 离子属于大致静态的分布，随着时间尺度在几分之一秒的量级上达到平衡密度。避免在储存环中的 RF buckets 全部填满电子束，通过在束团串中留下适当长度的间隙可以消除离子捕获不稳定性。

\rightsquigarrow 大致的分析思路为：以离子为主角，评估逐个电子束团经过储存环某处时，对该处离子的 kick，主要为横向 x' 或 y' 。由于离子带正电，因此电子束对离子的影响为将离子向中心轴方向踢，有 $\Delta x' = -a_x x$ 或 $\Delta y' = -a_y y$ ，其中，

$$a_{x,y} = \frac{N_e}{N_b} \frac{2r_p}{\sigma_{x,y}(\sigma_x + \sigma_y)} \frac{1}{A} \quad (13.137)$$

其中， N_e 为单电子束团的电子数， N_b 为束团串个数， A 为离子的质量数 (mass number)， $r_p \approx 1.535 \times 10^{-18} \text{ m}$ 为经典质子半径。在储存环中，离子将被一连串的电子束团串踢，中间偶有空隙时，则当作真空漂移段处理。于是，当电子束团串绕行储存环一周期间，对离子的影响可以如下形式描述

$$\begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}_{s=h\lambda_{\text{RF}}} = \left[\begin{pmatrix} 1 & \lambda_{\text{RF}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_u & 1 \end{pmatrix} \right]^{N_b} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_{\text{RF}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{h-N_b} \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}_{s=0} \quad (13.138)$$

这里 $u = x, y$ ， h 为谐波数。要求总矩阵的迹 (trace) 小于 2 可得离子稳定性条件。对均匀分布 ($N_b = h$) 的电子束团串，有

$$A \geq \frac{N_e}{N_b^2} \frac{r_p h \lambda_{\text{RF}}}{2\sigma_u(\sigma_x + \sigma_y)} \quad (13.139)$$

可以看到，太轻的离子容易受捕获而导致不稳定。对一般情况，可以通过数值求解得到总矩阵的稳定性，参考图 13.12。可以看到，在储存环不全填满电子束的情况下，能够缓解离子捕获不稳定性。一般预留 10% 的空隙 (ion clearing gap)。如果预留空隙不可行，可能在储存环局部区域施加清洁电场 (clearing field) 抑制此离子捕获效应。

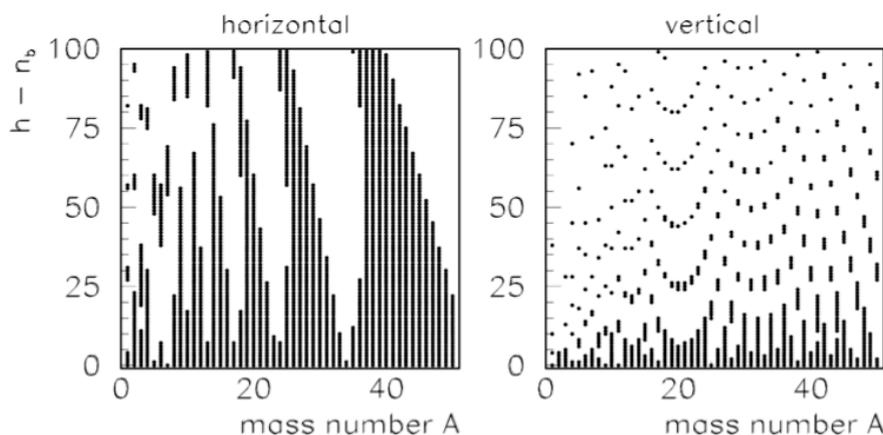


图 13.12: 基于 BESSY II 储存环参数，利用线性传输矩阵理论计算离子捕获不稳定性结果。图例取自 S. Khan 一书。

- 快电子-离子不稳定性 (fast beam-ion instability, FBII) \Rightarrow 离子分布随着电子逐圈绕行，低发射度的电子横向 betatron 振荡，连着捕获的离子也跟着振荡，从而影响后方束团，在一个绕行周期内将恢复初期样貌 (因此称“快”)。容易发生在电子束团串

经过，或者正电子束团经过时，其不稳定性增长率 $\propto e^{\sqrt{t}}$ 。

↪ 对目前多数的电子同步辐射储存环，快电子-离子不稳定性不是太严重的问题。缓解快电子-离子不稳定性的方法有增加色品，调整或适当安排电子束团串的空隙等。

注 对离子捕获不稳定性感兴趣的读者，可参考 Carlo J. Bocchetta and Albin Wrulich, The trapping and clearing of ions in ELETTRA, Nucl. Instrum. Methods A **278**, 807-817. [https://doi.org/10.1016/0168-9002\(89\)91205-9](https://doi.org/10.1016/0168-9002(89)91205-9)。

注 对快电子-离子不稳定性感兴趣的读者，可参考以下原始论文：

- T.O. Raubenheimer and F. Zimmermann, Fast beam-ion instability. I. Linear theory and simulations, Phys. Rev. E **52**, 5487 (1995). <https://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.52.5487>
- G.V. Stupakov, T.O. Raubenheimer, and F. Zimmermann, Fast beam-ion instability. II. Effect of ion decoherence, Phys. Rev. E **52**, 5499 (1995). <https://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.52.5499>
- J. Byrd et al., First Observations of a “Fast Beam-Ion Instability”, Phys. Rev. Lett. **79**, 79 (1997). <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.79.79>

13.8.8 自由电子激光不稳定性

第 10 章介绍的自由电子激光，本质上是一种单束团集体不稳定性，又称自由电子激光不稳定性 (free-electron laser instability)。虽然第 10 章并没有介绍利用 Vlasov 方程分析，但一些教科书介绍的标准方法则是用 Vlasov 方程描述电子束相空间分布函数如何随时空演化，用 Maxwell 方程描述辐射场如何随时空演化，称 Vlasov-Maxwell 方程组或 Maxwell-Klimontovich 方程组。细节此处不论，对此感兴趣的读者，可参考：

- Kwang-Je Kim, Zhirong Huang, and Ryan Lindberg, Synchrotron Radiation and Free-Electron Lasers — Principles of Coherent X-Ray Generation, Cambridge University Press (2017)
- Evgeny L. Saldin, Evgeny A. Schneidmiller, and Mikhail V. Yurkov, The Physics of Free Electron Lasers, Springer (1999)

除了采用 Vlasov-Maxwell 方程组或 Maxwell-Klimontovich 方程组之外，也可另辟蹊径，结合第 11 章介绍的尾场、阻抗的概念，推导 FEL 色散方程。对此感兴趣的读者，可参考 G. Stupakov and S. Krinsky, Derivation of FEL gain using wakefield approach, PAC 2003 (RPPG025). <https://accelconf.web.cern.ch/p03/PAPERS/RPPG025.pdf>。

13.9 讨论：复频率的实部与虚部

关于集体效应的粒子动力学，上一章着重介绍了宏粒子模型，这一章则主要介绍基于 Vlasov 方程的动理学模型。无论是哪种模型，敏锐的读者应该察觉到一个共同的物理量：复振荡频率。对横向集体效应，主要的振荡频率围绕 betatron 振荡；对纵向集体效应，主要的振荡频率围绕同步振荡。

前面 §7.9 介绍过，在粒子加速器中，光学稳定的磁聚焦传输段对应一组理想的“工作点”(working point)，即 $(\nu_{x0}, \nu_{y0}, \nu_{s0})$ ，表征粒子在加速器中的横纵向运动状态。设计时应该尽量避开可能存在的共振线。如果工作点不幸落在共振线上，那么很可能导致粒子由于共振而丢失，造成加速器性能下降。当时介绍工作点时，默认这些振荡频率为正实数 $(\nu_{x0}, \nu_{y0}, \nu_{s0}) \in \mathbb{R}^+$ 。

事实上，工作点是有可能在加速器运行过程逐渐漂移的而非固定不动的。当时 §7.9 抛出的问题：工作点漂移的说法是怎么来的？现在我们试着通过回答此问题，回顾这两章关于复频率的分析思路。

考虑在束团内的集体作用，以横向 y 为例(参考 §12.3.1)²⁶，写成

$$\frac{F_y}{\gamma mc^2} = -\frac{q^2 Ny}{L\gamma mc^2} W_{\perp} \equiv Ky \quad (13.140)$$

则有如下形式²⁷

$$y'' + \left(\frac{\nu_{y0}}{R}\right)^2 y = Ky \quad \Rightarrow \quad y'' + \left[\left(\frac{\nu_{y0}}{R}\right)^2 - K\right] y = 0 \quad (13.141)$$

其中， R 为储存环平均半径或磁聚焦结构单元节长度。上式等效的 betatron tune 可写为

$$\nu_y^2 \equiv \nu_{y0}^2 - KR^2 \quad (13.142)$$

这里的 K 可以是纯实数，也可能是纯虚数或同时带有实部与虚部的复数，根据不同情况有所不同。假设 $|KR^2| \ll \nu_{y0}^2$ ，则 tune shift 有

$$\Delta\nu_y = \nu_y - \nu_{y0} \approx -\frac{KR^2}{2\nu_{y0}} \quad (13.143)$$

此结果的意思是，束团集体效应会使束团中不同粒子的工作点有不同程度的漂移。这个漂移还可细分为束团整体工作点的漂移，称频移 (frequency shift 或 tune shift)，或是束团内不同粒子间个别工作点的分散，称频散 (frequency spread 或 tune spread)。

如前所述， K 可能为复数，包含实部与虚部。此时， $\Delta\nu_y$ 的实部对应 tune shift 为实数，为振荡频率的偏移或频散； K 的虚部则对应可能的集体效应增长率或衰减率。

²⁶纵向 z 可参考 §12.3.2。

²⁷视不同情况，有时候等式右边的 y 与等式左边的 y 一样，比如：BBU 或 Robinson 不稳定性。有时候等式两边的 y 则不一样，比如：强头尾不稳定性或头尾不稳定性。这里简单起见，仅考虑等式两边同一个 y 。

注 有些读者或许会想，上句描述能不能改为 K 的实部对应 tune shift $\Delta\nu_y$ 的实部，为振荡频率的偏移或频散； K 的虚部则对应 $\Delta\nu_y$ 的虚部，为集体效应增长率或衰减率。留意，此结论是在 $y'' + \left(\frac{\nu_{y0} + \Delta\nu_y}{R}\right)^2 y = Ky$ 得到的。对一般情况，如果运动方程不是如上宏粒子振荡子模型形式，尤其对 coasting beam 模型，则结论未必总是如此。

第11章介绍过直接空间电荷场 (direct space charge field) 与间接空间电荷场 (indirect space charge field) 的差别：direct space charge field 指的是由束团内粒子彼此间产生的场，indirect space charge field 则是指通过间接途径产生的场，比如：存在金属真空管道或周遭环境的磁极导致的场 (参考 §1.20)。关于 indirect space charge field 导致的频移，可用一个专有名词量化，称 Laslett tune shift。

定义 13.3. Laslett tune shift

为间接空间电荷场导致的 betatron 振荡频率频移，分四类：

- 非相干频移 (incoherent Laslett tune shift) \Rightarrow 束团个别、不同粒子各自由于间接空间电荷场导致的 betatron 振荡频率与理想情况下的 betatron 振荡频率的差值。这些彼此稍微不同的 betatron 振荡频率以 Laslett tune shift 表征。
- 相干频移 (coherent Laslett tune shift) \Rightarrow 束团中心 (beam centroid) 由于间接空间电荷场导致的 betatron 振荡频率与理想情况下的 betatron 振荡频率的差值。一般实验测量到的束团整体的 betatron 振荡频率为此。
- 未聚束频移 (unbunched beam Laslett tune shift) \Rightarrow 顾名思义，为长束团由于间接空间电荷场导致的 betatron 振荡频率与理想情况下的 betatron 振荡频率的差值。更多讨论可参考 §1.20。
- 聚束频移 (bunched beam Laslett tune shift) \Rightarrow 顾名思义，为短束团由于间接空间电荷场导致的 betatron 振荡频率与理想情况下的 betatron 振荡频率的差值。更多讨论可参考 §1.20。



笔记 Laslett tune shift 公式根据不同情况稍有不同，可参考 Handbook §2.4.6.2。 □

13.10 浅谈：横向不稳定性的“四维”Vlasov 分析

前面 §13.5、13.6 介绍的 Vlasov 分析仅限于纵向集体效应，即扮演驱动源的为纵向尾场、阻抗，粒子动力学也限于纵向运动，此时为二维的 Vlasov 分析，相空间坐标为二维 (z, δ) 或 (ϕ, J) 。乍看之下，初学的读者可能会认为分析横向集体效应时也依循类似的情况，即扮演驱动源的换成横向尾场、阻抗，粒子动力学也限于横向运动，即

$$\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{dx}{ds} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dx'}{ds} \frac{\partial f}{\partial x'} = 0 \quad (13.144)$$

其中，

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= x' \\ \frac{dx'}{ds} &= -\left(\frac{\omega_{\beta x}}{c}\right)^2 x + \frac{1}{E_0} F_x(z, s) \end{aligned} \quad (13.145)$$

但实际分析中则不是如此 \Rightarrow 横向不稳定性需要采用“四维”Vlasov 分析。

这里的“四维”指的是 (x, x', z, δ) 。为什么四维？难道上面二维写法有错？上面二维写法没有错。写成四维是因为我们真正关心的不是横向尾场导致横向本身的效应，而是横向尾场引起的横向运动，同时结合纵向运动过程，最终导致的纵向不稳定性。虽然名为横向不稳定性，且驱动源也是横向尾场、阻抗，但是真正关心的束团稳定性问题还是发生在纵向。根源在横向，但实际关心的是纵向。

由此，分析横向不稳定性的“四维”Vlasov 方程应写成

$$\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{dx}{ds} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dx'}{ds} \frac{\partial f}{\partial x'} + \frac{dz}{ds} \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{d\delta}{ds} \frac{\partial f}{\partial \delta} = 0 \quad (13.146)$$

其中，

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= x' \\ \frac{dx'}{ds} &= -\left(\frac{\omega_{\beta x}}{c}\right)^2 x + \frac{1}{E_0} F_x(z, s) \\ z' &= -\eta\delta \\ \delta' &= \frac{1}{\eta} \left(\frac{\omega_s}{c}\right)^2 z + \frac{x}{E_0} \frac{\partial F_x(z, s)}{\partial z} \rightarrow \frac{1}{\eta} \left(\frac{\omega_s}{c}\right)^2 z \end{aligned} \quad (13.147)$$

当 $\sigma_x \ll \sigma_z \sqrt{\omega_s / \eta \omega_\beta}$ 时，我们将上面最后一式等式右边第二项略去²⁸。

目前大多数横向不稳定性的分析就在此基本方程的基础上开展，对四维相空间分布函数 $f(x, x', z, \delta) = f_x(x, x') f_{\parallel}(z, \delta)$ ，对横向相空间分布函数 $f_x(x, x')$ 的展开一般仅取部分束团特征，比如，限定在横向质心运动，又称 **dipole moment**，然后对纵向相空间分布函数 $f_{\parallel}(z, \delta)$ 的处理则相对更细致些，会对纵向相空间分布的半径方向与角度方向分别展开，取径向模与角向模。

²⁸这一项存在使得系统为保辛。但为了简化分析，许多分析还是把此项略去。细节此处不论，感兴趣的读者可参考 Alexander Wu Chao, *Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators*, John Wiley & Sons (1993) 一书的 §6.6。

细心的读者或许会问，这么做的四维 Vlasov 分析是否自治？严格上说，不自洽。为了保住自治性，付出的代价太高。

第十三章 补充习题

1. 以二维相空间 (q, p) 为例，说明对保守哈密顿系统而言，一阶近似下相空间面积不变能够给出 Vlasov 方程

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial p} = 0$$

其中， $f(q, p)$ 为相空间分布函数。此方程的通解非唯一，证明此方程的一个解为 $f(q, p) = \mathcal{F}(H)$ ，其中， \mathcal{F} 为一行为良好的函数。

2. 不考虑束团内粒子间交互作用情况下，多粒子形成的束团分布可以以二阶矩描述²⁹。已知 Vlasov 方程

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0$$

其中， $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$, $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ 为各别单粒子运动方程。

- a) 利用 Vlasov 方程，推导上题结果。先定义束团分布的一阶矩为质心相空间坐标，二阶矩为束团相空间尺寸。
 - b) 当考虑束团内存在长程集体效应时，上面 Vlasov 方程中的哪一项是导致该方程开始变得复杂的源头？
 - c) 试想，Vlasov 方程是怎么巧妙地将各别单粒子运动方程融合，包含束团内集体效应，从而描述束团整体束团的动力学？这个过程并不是一蹴可几的，而是经历几代人的论证才得到的丰硕成果。
3. 试简述势阱畸变效应 (potential well distortion) 与 Haissinski 方程。
4. 已知哈密顿系统的演化方程保辛，或称其动力学变量随时间演化满足辛变换 (symplectic transformation)

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

但是，数值求解以上哈密顿运动方程时，对时间 t 的离散化可能导致演化过程不再保辛。

- a) 以一维简谐振子为例，有 $H = \frac{1}{2}(q^2 + p^2)$ ，写下谐振子运动方程及其解。
- b) 以数值积分显形式 Euler 法为例，说明此法对时间 t 的离散网格将导致演化不再保辛。这里的 Euler 法指的是按如下差分形式近似一阶微分

$$\frac{dz}{dt} \approx \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t}$$

其中， $z = q, p$ 。则简谐振子系统能量在一个 Δt 时间之后有

$$E_{i+1} = E_i(1 + \Delta t^2)$$

利用辛条件证明在一个 Δt 时间前后，相空间 (q, p) 对时间的演化不保辛。事实上，除了系统能量，谐振子振幅、相空间面积也都随时间单调增加至无穷大。

- c) 仍以简谐振子为例，考虑隐形式 Euler 法，则系统能量在一个 Δt 时间之后有

$$E_{i+1} = \frac{E_i}{1 + \Delta t^2}$$

²⁹这种描述方式对高斯分布束团恰好准确 (exact)，对其它形式的分布函数则仅为近似 (approximate)。

利用辛条件证明在一个 Δt 时间前后，相空间 (q, p) 对时间的演化不保辛。基于此数值积分方法，除了系统能量，谐振子振幅、相空间面积也都随时间单调减小至零。

d) 根据以上 (b,c) 结果，简述数值积分保辛的可能思路。提示：考虑“一显一隐”。

解 参考 M.R. Roussel, Symplectic integration methods. <https://people.uleth.ca/~roussel/C4010nonlin/slides/12symplectic.pdf> 或 D. Donnelly and E. Rogers, Symplectic integrators: An introduction, Am. J. Phys. **73**, 938–945 (2005). <https://doi.org/10.1119/1.2034523>

总结：第三部分

到目前为止，我们已经完成了第三部分关于多粒子集体效应的讨论。集体效应包含场动力学与粒子动力学。场动力学着重于求解粒子经过电磁部件时激励的电磁场，更准确地说，是源粒子经过电磁部件时，对后方测试粒子产生的尾场函数与阻抗函数。根据感兴趣的空間尺度，尾场可区分为短程尾场 (short-range wake) 与长程尾场 (long-range wake)，对应的阻抗为宽带阻抗 (broadband impedance) 与窄带阻抗 (narrowband impedance)。一般来说，窄带阻抗的中心频率相对于宽带阻抗的中心频率较低。尾场与阻抗的分析面向一般较“封闭”，分析的对象多为电磁部件³⁰，需要较全面的时变电磁场理论知识。篇幅所限，我们仅介绍了几个较具代表性的尾场阻抗计算，如：空间电荷场、有限电导率圆柱金属真空管、圆柱形结构的谐振腔、RLC 模型尾场阻抗等。

集体效应的粒子动力学的分析就可能涉及加速器磁聚焦结构的局域或全域整体特性，因此需要结合第二部分第7章、第8章学过的知识。上一章与这一章介绍了集体效应的粒子动力学的两种主要分析方法，包含较粗糙、但物理图像清晰的宏粒子模型 (macroparticle model) 与较细致、完整的动理学理论 (kinetic theory)。篇幅所限，我们仅介绍了几个较具代表性的集体效应，如：束团崩溃不稳定性、罗宾逊不稳定性、强头尾不稳定性、微束团不稳定性、微波不稳定性、模式耦合不稳定性等。

除了第12章、第13章，加上第二部分第7章、第8章对于单粒子横向与纵向动力学的介绍，整体而言，此讲义已经包含基本的粒子加速器束流动力学知识。下面第四部分将针对三个应用专题分别介绍，包含该专题的基本内容，与当前、未来可能的研究课题。

³⁰相干同步辐射 (coherent synchrotron radiation, CSR) 与空间电荷 (space charge) 尾场为例外，但也可视为是一种“虚拟”的电磁部件。

