

电磁辐射与加速器束流动力学导论

**Introduction to Accelerator Beams, Collective Dynamics,
Electromagnetic Radiation and Free-electron Lasers**

作者：蔡承颖 (Cheng-Ying Tsai, C.-Y. Tsai)

特别声明

此笔记/讲义非最终版，内容可能存在笔误、谬误，仍在迭代修改中。此讲义不定期更新。

第十一章 集体效应的场动力学：尾场与阻抗

内容提要

- 空间电荷效应
- 追赶长度
- 尾场函数及其特性
- 阻抗函数及其特性
- Panofsky-Wenzel 定理
- 宽带阻抗的几种分析模型
- 能量损耗因子、kick factor
- 有效阻抗

前面第7章、第8章介绍的粒子动力学都属于单粒子动力学，即束团中个别粒子的运动由各自独立的运动方程决定。对带电粒子束而言，单位时间通过一位置的横截面的电荷越多表示束团电流越大。这里的单位时间可以是以单个束团时间长度为单位，或是以束团串、绕行时间周期为单位；前者称峰值电流 (peak current)，后者称平均电流 (average current)。加速器的效能往往与峰值或平均电流强度有关。更准确地说，取决于束团的“亮度”^{1,2}。亮度越高的粒子束团意味着束团峰值或平均电流越高、束团能散低、横向发射度小等。即，粒子束团在相空间的密度越大：在六维相空间的单位体积内的粒子数目越多。束团内带电粒子彼此“挤”在一起，其间的相互作用电磁场就开始显著而不能忽略。束团内粒子间彼此影响可能导致集体效应 (collective effects)。一般来说，在粒子加速器中，束团的集体效应属于多粒子动力学，单粒子的图像不再适用。

加速器粒子束团可视为一种非中性等离子体 (non-neutral plasma)，束团中的 (同号) 带电粒子越密集，束团内部互相排斥的 (库仑) 场越明显。因此，束团内某一粒子的运动不再独立于其它粒子，而是受其它粒子影响。此外，如果系统存在物理边界，则这些场会与周遭环境交互作用³，比如，束团整体产生的库仑场会留在金属管壁一段时间，或发

¹不只辐射场，粒子束团也能定义“亮度”。这么定义/量化的目的是希望把辐射束与电子束从某些视角当作同一回事。

²作为附注，这里介绍一下“对撞机亮度”(luminosity)，定义为单位时间单位反应截面 (cross section) σ_{\star} 的对撞次数

$$\frac{dN_{\star}}{dt} = \mathcal{L}\sigma_{\star}, \quad \mathcal{L} \equiv \frac{1}{\sigma_{\star}} \frac{dN_{\star}}{dt} = \frac{N_{+}N_{-}f_c}{2\pi\sqrt{(\sigma_{x,+}^{*2} + \sigma_{x,-}^{*2})(\sigma_{y,+}^{*2} + \sigma_{y,-}^{*2})}}$$

其中， $\sigma_{x,y,+,-}^{*}$ 为在对撞点 \star 的对撞束团横向 x, y 尺寸， $+, -$ 为两束对撞束团的标记符号， $N_{+,-}$ 分别为两束对撞束团的粒子数， f_c 为对撞束团在对撞环中的对撞频率。

对撞亮度分峰值对撞亮度 (peak luminosity) 与累积对撞亮度 (integrated luminosity)，后者可写为 $\int \mathcal{L} dt$ 。在对撞过程中，不同粒子间的反应截面不同，以单位 barn(谷仓) 表示 $\Rightarrow 1 \text{ b} = 10^{-24} \text{ cm}^2$ 。一般来说，峰值对撞亮度 (peak luminosity) 是设计对撞机阶段的指标，而平均或累积对撞亮度 (average or integrated luminosity) 才是一台对撞机能够成功、长期运行产出物理的指标。对 LHC， $\mathcal{L} \approx 10^{34} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ ；对撞率大约 10^9 s^{-1} 。如果顺利运行一年 (experimental year)，即 10^7 秒或 1/3 年，则有累积对撞亮度 $\int \mathcal{L} dt = 10^{41} \text{ cm}^{-2} = 100 \text{ fb}^{-1} = 10^5 \text{ pb}^{-1}$ 。

³束团与环境交互作用所涉及的物理效应大概有三种：

1. 焦耳热效应
2. 电磁感应
3. 电磁场衍射效应

热(焦耳热效应)、或反过来影响同一束团里的其它粒子、或如果场存留在周遭环境较长时间,比如被局限在谐振腔结构中,则会影响后方其它经过的束团粒子或周期绕行时的本身束团粒子——只要机制不违反因果律与推迟关系,那些机制就原则上存在。由于这些场是由束团的粒子产生的,又反过来影响束团里的其它或自身粒子,因此,场动力学与粒子动力学可以互相关联/耦合。基于这种机制产生的效应称集体效应 (collective effects)。

由上可知,集体效应包含场动力学 (field dynamics) 与粒子动力学 (beam dynamics):

- 场动力学 \Rightarrow 束团产生的场的计算、分析,称尾场;
- 粒子动力学 \Rightarrow 尾场如何反过来影响粒子束团。

自洽的分析需要结合场动力学与粒子动力学。

自由电子激光是一种集体效应,但是这里的讨论不涉及自由电子激光集体不稳定性。

11.0 问答预览

1. 集体效应是什么?它与单粒子动力学有什么区别?
 \Rightarrow 集体效应是指束团内粒子相互作用产生的整体动力学效应,比如:空间电荷场和尾场。与单粒子动力学不同,因为束团内粒子之间的相互作用导致单个粒子的运动不再独立,而是受到其他粒子的影响。
2. 为什么在强流粒子束中需要考虑集体效应?
 \Rightarrow 在强流粒子束中,粒子之间的相互作用不可忽略,产生的电磁场会显著影响束团的运动,导致束流品质下降,比如束团特性恶化和能量损失等。
3. 平均场近似和微扰理论在分析集体效应中有什么作用?
 \Rightarrow 平均场近似将束团内粒子产生的电磁场视为对单个粒子的平均场,简化了分析。微扰理论则假设束团自场远小于外部场,可以忽略束团自场对单粒子运动的影响,进一步简化分析。
4. 什么是追赶长度?
 \Rightarrow 追赶长度是指尾场从产生位置(“源位置”)传播到测试粒子位置所需的长度。
5. “三无”定理是什么?
 \Rightarrow “三无”定理指出,当粒子速度为光速、金属为理想导体、真空管壁结构完全平滑且均匀时,将不存在尾场和阻抗。“三无”定理揭示了现实世界不可避免会存在尾场和阻抗。
6. 空间电荷场对束团有什么影响?
 \Rightarrow 空间电荷场会导致束团横向发散和纵向能量分布改变,如果没有适当设计控制,将影响束流品质。
7. 什么是束内散射效应和 Touschek 效应?
 \Rightarrow 束内散射效应是指束团内粒子之间近距离、多次小角度碰撞产生的效应,会导致束团发射度和能散增加。Touschek 效应是指束团内粒子之间近距离、单次大角度碰撞导致的粒子丢失,影响束团寿命。

8. 如何计算有限电导率金属真空管的电磁场?

⇒ 采用 Leontovich 边界条件和傅里叶变换, 可以计算有限电导率金属真空管的电磁场。

9. 什么是反常趋肤效应?

⇒ 反常趋肤效应是指当电子平均自由程大于寻常趋肤深度时, 金属管壁的阻抗会增加。这会导致尾场函数的特征长度和结构尺寸发生变化。

10. 什么是尾场加速? 它有什么优势?

⇒ 尾场加速是指利用前方束团产生的尾场加速后方束团。其优势是加速梯度高, 可以缩短装置尺寸。

11.1 定性介绍

束团内每个粒子携带电荷，因此，彼此间存在交互作用。但是，如果束团中每个粒子以光速 $v = c$ 运动，则根据 Maxwell 平面电磁波理论，束团中某一粒子产生的电场与磁场有类似于平面电磁波形式，即

$$\mathbf{E} = \mathbf{B} \times c\mathbf{e}_z$$

则束团中另一粒子感受到此电磁场产生的洛伦兹力有

$$\mathbf{F}/q = \mathbf{E} + c\mathbf{e}_z \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times c\mathbf{e}_z + c\mathbf{e}_z \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

即粒子间彼此的电场力与磁场力将完美抵消，而没有净交互作用。然而，束团中的粒子仅能以 $v < c$ 速度运动， $|\mathbf{F}/q| \neq 0$ ，因此存在一定程度的交互作用。对极低电流与极端相对论粒子，束团内的交互作用有时候可以忽略。但更多时候，加速器则是操作在强流、中低能量段。因此，不可避免需要考虑带电粒子束的集体效应。

在继续讨论前，以下介绍两个概念：平均场近似 (mean-field approximation) 与微扰理论 (perturbation theory)。

11.1.1 平均场近似

集体效应体现在束团运动具有一定的集体行为。但是，束团内部的库仑场不仅导致集体效应，还有其它效应，如：束内散射效应 (intra-beam scattering, IBS) 等。集体效应的分析如果通过直接、暴力的单粒子运动方程开始，给每个原本独立的单粒子微分方程间加入耦合项，巨细靡遗地考虑所有粒子彼此间的作用，则分析将变得无比复杂。为了简化分析，时常采用平均场近似 (mean field approximation)，即，影响束团内某一粒子的场以束团内所有其余粒子产生的场的线性叠加量化，忽略束团内局部、特定粒子对某一粒子的相对影响⁴。这种近似处理不一定适用于束团内相邻很近的粒子间散射效应，但是，对大多数目前感兴趣情况的集体效应分析已经足够。

讨论集体效应往往需要明确两个概念：驱动源 (driving source) 与驱动机制 (driving mechanism)。集体效应种类繁多，驱动源与机制各异，分析较为复杂。为简单起见，以下针对“场动力学”部分仅介绍：

- 束团自场 (self-field, Coulomb field) \Rightarrow 空间电荷 (space charge) 场；
- 电阻壁 (resistive wall) 场 \Rightarrow 圆柱金属真空管的电磁场计算；
- 谐振腔场 \Rightarrow 圆柱谐振腔的电磁场计算；

⁴平均场近似不是只有在加速器集体效应分析才出现，它几乎无所不在。比如，在固体物理中，用平均场代替电子与电子间的相互作用，称 Hattree-Fock 近似。统计力学中的伊辛模型 (Ising model)、凝聚态物理中用来描述玻色-爱因斯坦凝聚 (Bose-Einstein Condensates, BEC) 的 Gross-Pitaevskii 方程等都是基于平均场近似的概念。

- 尾场与阻抗概念、定义与性质。

先介绍三个特定情况，然后提炼、总结，定义尾场函数与阻抗函数。尾场与阻抗是分析粒子加速器集体效应的“标准语言”。

11.1.2 微扰理论

集体效应分析的理论根源为麦克斯韦方程组与洛伦兹力方程。麦克斯韦方程组等式右边的“源”与等式左边的“场”应满足自洽性。这种“场”与“源”的互相驱动、彼此耦合使得分析非常困难。因此，有必要针对特定问题进行近似、简化。在粒子加速器中，源于束团的自场通常远小于外部磁聚焦结构场，即

$$\text{束团自场 } (E_1, B_1) \ll \text{外部磁聚焦结构场 } (E_0, B_0)$$

利用这个特性可以大大简化分析。首先，可以假设束团自场很小，因此，单粒子运动行为可以由第7章、第8章给出。在以 (E_0, B_0) 决定单粒子运动轨迹作为已知的前提下，再计算束团自场 (E_1, B_1) 对单粒子运动行为的微扰修正。

敏锐的读者看到这里，或许会有如下疑惑：当束团内两粒子彼此靠得很近时，库仑自场是不是很大，会不会使微扰理论不再成立？

- 当束团内两粒子彼此靠得很近时，微扰理论将面对的“危机”由前面介绍的平均场近似“保护”，即在平均场近似框架下，不考虑束团内两粒子彼此靠得很近时的情况。
- 对实际数值计算，当碰到束团内两粒子彼此靠得很近时，一般采用两种方式处理：
 1. 切片 (slice)：将束团内众多粒子沿着一个维度 (通常选择纵向 z)，把粒子数据归入统计堆 (bin)，做成直方图 (histogram) 后，同一个 bin 里的粒子视为一个宏粒子，从而避免粒子间距太近可能导致的数值发散问题。
 2. 插值 (interpolation)：将束团内离散粒子集合以一连续函数拟合，视为连续函数，可避免发散问题。有时候，插值与切片同时搭配使用。
- 以一个将在 §15.3 讨论的实际例子看，束团自身产生的电场振幅约有 $1 \sim 5 \text{ MV/m}$ ，谐振腔电场幅值则约有 50 MV/m ，满足以上微扰关系。

 **练习 11.1** 回忆一下第10章介绍的自由电子激光理论，SASE 机制涉及的电子束散粒噪声与这里介绍的平均场近似是否自洽？ ■

微扰理论可以视为大自然对加速器集体效应研究的“馈赠”，虽然不是全部，但是在粒子加速器集体效应研究中，绝大多数 (非全部) 情况都适用于微扰理论。此种情况或许有别于等离子体中的集体效应研究。

定律 11.1. 加速器集体效应 vs. 等离子体集体效应

研究加速器集体效应与研究等离子体集体效应使用的数学与物理工具非常类似，均涉及非线性单粒子动力学与多粒子集体动力学，但是，两个领域存在一个较大区别，即，在加速器中，多数情况下，束团产生的尾场远小于外部场。不同的是，在等离子体中，束团产生的自场可能与外部场差不多或甚至更大。

因此，在加速器集体效应分析中，很大程度上，可以利用微扰理论这一有力工具分析集体效应动力学。

注 这些对比非常类似于量子电动力学 (quantum electrodynamics, QED) 与量子色动力学 (quantum chromodynamics, QCD)。参考 A.W. Chao, Lectures on Accelerator Physics, World Scientific (2020), §8.1.6. □

以下给出加速器集体效应比较正式的定义与研究方法。粒子动力学将在下一章介绍。

定义 11.1. 集体效应 (collective effects)

集体效应泛指发生在束团内部或临近束团间与环境交互作用时，涉及束团整体的动力学效应。发生集体效应时，会出现相干 (coherent) 现象，束团的某些特征会表现出整体性、一致性。集体效应按时间/长度尺度分，短程集体效应有单束团不稳定性、长程集体效应则有多束团不稳定性。长程、短程效应判据视束团尺寸与驱动源时空尺度而定。按机制分，有一类明显具有阈值条件 (threshold condition)，超过阈值时，束团将不稳定；低于阈值时，束团仍保持稳定；另一类则不具有明显的阈值条件，凡具有非零电流的束团，就存在束团不稳定性。

驱动集体效应的来源^a(driving source) 多样，机制 (driving mechanism) 不尽相同，研究方法也各异。一般常见方法有：

- 宏粒子 (macroparticle) 模型：对于长程效应，有时可将束团串中的每个束团视为一个宏粒子，分析其质心运动。对短程效应，可以将一个束团视为头、尾两个宏粒子，分析个别头、尾宏粒子运动。这个方法适用于理想情况下的解析分析。现在许多粒子跟踪模拟 (particle tracking simulation) 程序也采用这个思路，将一束团视为多个宏粒子，利用对尽可能多的宏粒子的运动分析，预测真实情况下，束团整体的动力学演化过程。对粒子跟踪模拟，这个思路适用于单一束团或束团串。计算效率取决于计算资源与程序设计。
- 连续体 (continuum) 模型：将一束团视为连续体，分析束团相空间分布函数的演化过程。一般情况下，会将相空间分布函数按特定方式“解耦/简化”，通过选取合适的、行为良好的“基底”函数。接着，对个别基底函数，分析其动力学特性，属于解析法。数值上也可以通过求解束团相空间分布函数应遵循的方程 — Vlasov 方程或 Vlasov-Fokker-Planck 方程 — 给出束团相空间分布特

性。这些又称动力学 (kinetic) 分析。有些时候, 如果求解束团相空间分布函数不容易, 或者更关心的是束团分布特性, 可以用矩方法 (moment method), 仅分析分布函数的几个低阶矩。

- 如果集体效应涉及束团内部粒子的离散本质, 即散粒噪声导致的效应, 则需要额外引入离散分布初始条件, 如: 自放大自发辐射 (SASE) 自由电子激光不稳定性。

“能驱动集体效应的源可能导致相干与非相干效应。”

尽管以上描述了“集体效应”一词的意思。这里再理清几个可能的误解:

- 上面描述似乎表明, 在某种意义上, 集体效应指的是束团被自己产生的场影响, 是否违反因果律?
- ⇒ 好问题! 具有深刻物理内涵、但不好回答、令人难为情的问题。
- ⇒ 因果律在集体效应分析中需要得到高度重视: 任何可能违反因果律的情况都要谨慎看待, 否则就可能出现违反基本物理的情况。准确地说, 排除后座力 (反作用) 影响⁵, 同一粒子 不可能 在当下时刻、被自身产生的尾场所影响。注意到, 这里面要同时满足“同一粒子”、“立刻”。电磁场传播最快不能超过光速, 传输一段距离总是需要有限时间。束团其实可以被自己产生的场影响: 束团可能在某一时刻 (比如 t_i) 产生场, 这个场被囚禁在某个真空管道类似于谐振腔的结构中。在稍后某一时刻 (比如 $t_f > t_i$), 在环形加速器中, 当这个同样的束团再次经过此真空管道时, 如果稍早留在管道中的场还未消散, 那么束团就可能被自己之前所产生的场影响。此外, 束团内包含许多粒子, 如果是束团“前方”粒子产生的场, 短暂留在真空管道, 在束团“后方”的粒子只要满足推迟条件 (或者说, 不违反因果律与光速 $\neq \infty$ 的要求), 同一束团后方粒子受到前方粒子留下来的场影响也是可能发生的。以上描述的情况都不违反因果律。
- ⇒ 后面 §11.5 将给出因果律要求的数学形式。
- ⇒ 是个不好回答、令人难为情的问题, 因为有时候面对复杂问题时, 为了简化分析, 粒子速度采用 $v = c$ 近似。只要不影响眼前的问题的正确性, 有时候睁一只眼闭一只眼, 就默许粒子速度 $v = c$ 了。因此, 现阶段只能说, 明白因果律很重要, 关键时刻要小心, 不然会随时出错。

- 考虑束团内部不同位置的两个粒子, 命名为 A 与 B, 那么, A 对 B 或 B 对 A 的直

⁵这里忽略瞬时的后座力 (反作用), 又称辐射后座力 (radiation reaction)。在此处讨论的集体效应框架下, 忽略这种后座力, 我们假设这么做是合理的。此处粒子产生的场我们认为是库仑场的一部分, 目前感兴趣的是产生的库仑场与周遭环境交互作用时, 残留在真空管壁, 进而回头影响束团的机制。这里的场暂且不当作辐射场。如果粒子产生的是辐射场, 那么可能存在瞬时的后座力 (反作用) 反映在该粒子自身。试想, 现在有两个粒子, 一个带电, 一个不带电。假设有同样大小的力施加在两个粒子上, 它们都获得力而加速。但是, 那个受加速且带电的粒子会辐射 (另一个不带电的受加速不辐射), 因此该粒子将获得小一些的加速度 (由于能量守恒, 一小部分能量形成辐射场能量了)。此时, 粒子的运动方程不再是熟悉的、基于牛顿第二定律形式的洛伦兹力方程形式而需要部分修正。目前来说, 这些后座力 (反作用) 效应在讨论集体效应时均忽略不计。感兴趣的读者可以参考 Jackson 一书的 Chapter 16。

接影响(不通过环境交互作用)算不算是集体效应?

- ⇒ 按上面对集体效应的定义,严格来说,需要存在束团与环境交互作用的机制。束团内不同粒子间的直接影响有时候未必适用于集体效应的分析框架。此讲义不打算严格区分这部分,读者只需要知道有两个例外情况即可:空间电荷效应、相干同步辐射效应。面对这两个效应时,很多时候还是套用此处介绍的集体效应分析框架,但未必这两种情况的所有结果/性质都严格满足尾场、阻抗的定义。
- ⇒ 类似于许多加速器教科书,此讲义将从介绍空间电荷——一个例外情况——开始,然后再回“正轨”,介绍尾场与阻抗。

11.1.3 追赶长度

如前一子节所讨论,不考虑后座力(反作用)情况下,粒子自身产生的场不可能在当下就立刻影响到粒子自己。现在,我们可以定义产生尾场的粒子为源粒子(source particle);定义感受到尾场的粒子为测试粒子(test particle)。在一个束团内的某一个粒子,它可以既扮演源粒子影响后方其它粒子,也可以扮演测试粒子,受到前方粒子留下来的尾场影响。以下讨论集体效应时,将做一个假设,称刚性束团近似(rigid beam approximation):当测试粒子经过引起尾场的结构时,源粒子产生尾场,但是源粒子与测试粒子的相对距离不受尾场影响。参考图 11.1,在残留尾场的结构里(比如一段金属真空管道), q_1 为产生尾场的源粒子,纵向时空坐标有

$$z_1 = s_1 - \beta ct_1 \quad (11.1)$$

q_2 为接受尾场的测试粒子,纵向时空坐标有

$$z_2 = s_2 - \beta ct_2 \quad (11.2)$$

对短程尾场,源粒子与测试粒子的交互作用在同一束团内,不妨假设⁶ $s_1 = s_2$ 。为简化起见,考虑源粒子与测试粒子同轴情况,有 $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{0}$ 。令 $t_1 - t_2 = \tau$, 此时有 $z_1 - z_2 = -\beta c\tau$, 即假设 q_1, q_2 相对距离 $|z_1 - z_2| = \beta c\tau$ 不变,束团就好像是刚性体。离开尾场结构后,源粒子与测试粒子按第 7 章、第 8 章的纯光学传输矩阵演化。



笔记 如果尾场结构很长,那么是不是刚性束团近似就要失效?看起来是。但是,可以适当推广刚性束团近似的思路,比如,将尾场结构切开,在磁聚焦结构传输段中的某个位置,先让刚性束团的源粒子与测试粒子根据尾场模型“调制”一下⁷,则相空间坐标的 (x', y', δ) 就有一个微扰改变,但位置坐标 (x, y, z) 不变;然后,让此受微扰调制的刚性束团按第 7 章、第 8 章的纯光学传输矩阵演化一段很短的距离。接着,再让根据传输矩阵演化的束团经历下一位置的尾场结构“调制”一下,然后再传输,再调制... 反复迭代过程。这么一来,刚性束团近似在尾场结构中依然成立,并且也兼顾了分析的准确性。这种思路很

⁶这是“假设”,也可视为是一种“近似”。基于这个假设,我们默认忽略了追赶长度效应,即假设尾场在产生尾场的位置处能“瞬间”影响测试粒子。在一些极端情况下,此假设不再适用。

⁷读者将会发现,这里用“调制”一词或许是恰当的,前方粒子作为源,产生尾场;后方粒子作为测试,感受尾场。尾场一般是时变场,因此,束团内不同粒子的纵向能量分布 $\delta(x, y, z)$ 或横向动量 $x'(x, y, z), y'(x, y, z)$ 也就存在坐标依存关系。

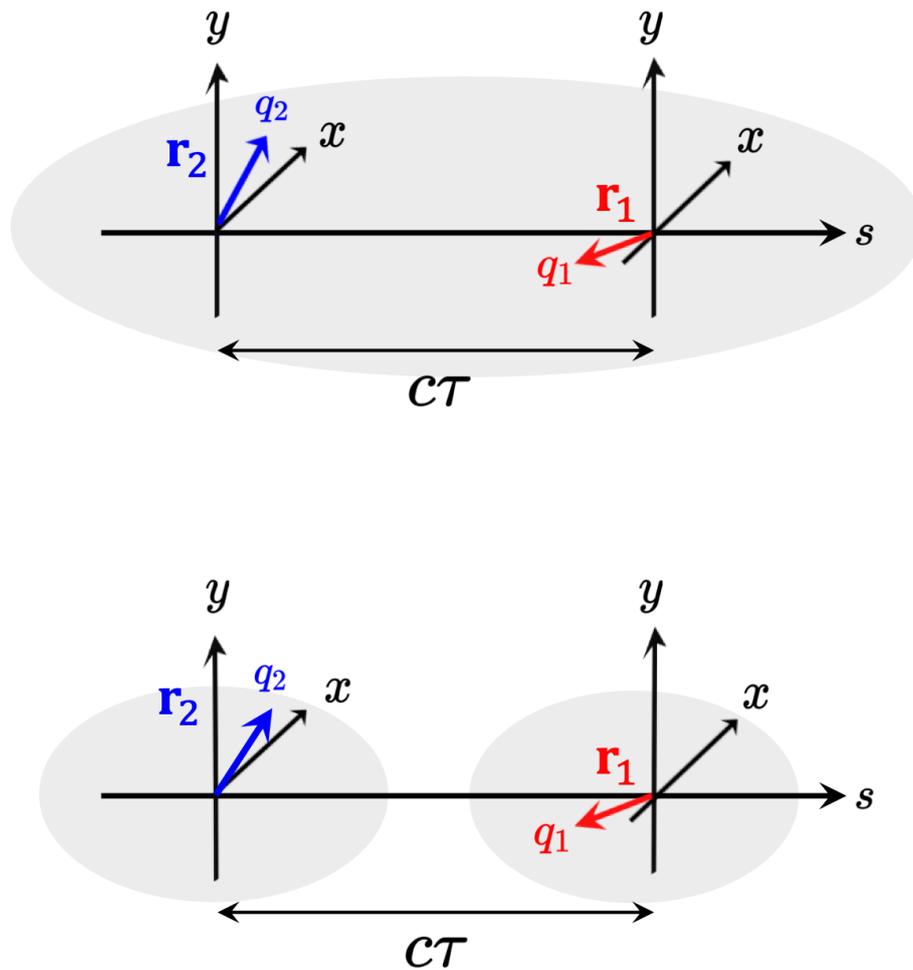


图 11.1: 定义尾场时的测试粒子 (test particle, q_2) 与源粒子 (source particle, q_1) 的位置关系, 基于刚性束团近似。这里的测试粒子与源粒子可以是同一束团, 也可以不同束团。

直观, 已经无声无息、被广泛应用在众多粒子加速器模拟软件中, 有时称 kick-drift model。

笔记 绝大多数情况下, 源粒子在前方, 测试粒子在后方, 即 $z_1 > z_2$ 。唯二例外: 空间电荷 (space charge) 尾场与相干同步辐射 (coherent synchrotron radiation, CSR) 尾场, 将分别 在第 14 章与第 15 章介绍。

上面定义了尾场模型中的源粒子与测试粒子之后, 下面介绍基于此模型的一个重要物理量, 称追赶长度 (catch-up distance)。利用追赶长度的概念, 能够大致给出尾场的特征长度与结构尺寸的关系。在测试粒子与源粒子间距短于此长度内, 将感受不到源粒子通过不连续结构产生的尾场。

定理 11.1. 追赶长度 (catch-up distance)

参考图 11.2, 当源粒子经过真空管壁不连续处 (蓝色凸起处), 假设其在位置 $z = 0, s = 0, t = 0$ 时刻, 产生尾场。源粒子的库仑场在不连续处向四面散射, 当源粒子在 t 时刻经过位置 $s = ct$ 时, 尾场将赶在 $z - \Delta$ 处, 其中

$$\Delta \approx \frac{b^2}{2s} \quad (11.3)$$

这里的 s 称追赶长度, b 为真空管壁半径。当测试粒子与源粒子间距短于此长度时, 测试粒子在 t 时刻将感受不到源粒子通过不连续结构产生的尾场。

证明 根据几何关系, 恒有 $s = ct = \sqrt{(s - \Delta)^2 + b^2}$, 解 s 。

注 此处的追赶长度可视为尾场的形成长度 (wake formation length)。比较第 4 章、第 5 章、第 9 章介绍的同步辐射场与波荡器辐射场的形成长度。 □

catchup 是“番茄酱”, catch-up 才是追赶。

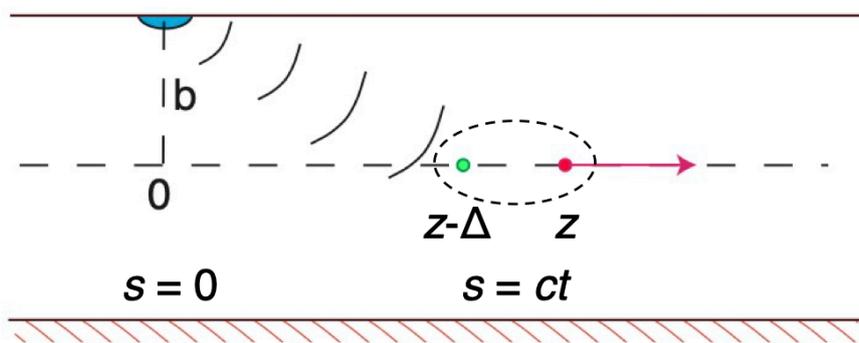


图 11.2: 追赶长度示意图。红色源粒子经过真空管壁不连续处 ($s = 0$ 蓝色凸起处), 该处将散射红色粒子携带的库仑场, 当红色粒子行进到 $s = ct$ 位置时, 散射的电磁场传递到 $z - \Delta$ 处 (视为测试粒子处)。这里的 s 称追赶长度。

笔记 对尾场结构长度短于追赶长度 $L < s$, 或者, 对极短束团 $\sigma_z < \Delta$ 导致追赶长度很长, 此时尾场还未进入稳态, 而是处于暂态。此种情况的分析要特别小心。这一章讨论的尾场、阻抗计算都是基于稳态情况。对绝大多数情况, 目前文献仅讨论稳态情况, 少

数情况讨论地较细致，如：相干同步辐射 (CSR) 尾场或阻抗，参考第15章。

练习 11.2 参考图 11.2，证明散射的尾场可以在 $t = \gamma b/c$ 时刻后追上源粒子。 ■

解 根据几何关系，有 $ct = \sqrt{(\beta ct)^2 + b^2}$ ，解 t 。这时候不能假设源粒子为光速前进，否则尾场永远追不上。 ■

11.1.4 “三无”定理

在正式定义尾场与阻抗之前，我们将介绍三个算例作为铺垫。先从“三无”定理开始。三个算例将分别对应三个不完美情况。

定理 11.2. “三无”定理

同时满足以下三个条件时，将不存在集体效应的尾场，也不存在对应的阻抗：

1. 束团以 $v = c$ 沿 z 运动
2. 金属为理想导体 $\sigma = \infty$
3. 金属真空管壁结构完全平滑、均匀

证明 自行论证。利用 Maxwell 方程与 Lorentz 力方程。

言下之意，当以上任何一个条件被打破时，将存在尾场与阻抗。实际上，在现实世界中三个条件都不满足（“三无”）：

1. 粒子速度 $v < c$ ，不存在 $v = c$
2. 不存在理想导体 $\Rightarrow \sigma < \infty$
3. 金属真空管壁即使结构均匀，细部总是存在表面粗糙度，不可能完全平滑 □

对应上面第 1 种不完美情况，即粒子速度 $v < c$ ，其实是一个古老又重要的效应，称空间电荷场 (space charge field) 效应，将在下一节 §11.2 介绍。为简化起见，既然考虑了第 1 种不完美，就暂时忽略 2、3，即不考虑有限边界的真空管壁：粒子束在无边无际、完全自由的空间中传输。§11.3、§11.4 将介绍其它两种不完美情况，分别对应“三无”定理的第 2、3 种情况。

注 真实世界是三个条件“都”不满足。但是，理论分析时一般仅考虑一个条件不满足，但其余两条件仍满足理想情况 \Rightarrow 各个击破。数值模拟可能可以同时考虑两个以上不理想情况。

11.2 空间电荷场

空间电荷场 (space charge field) 对强流粒子束、高亮度粒子束的影响体现在众多层面,除了可能导致相干的集体效应外,还有非相干效应、共振(第7章介绍过)、频移(tune shift)等,最终导致束流品质下降,工作点偏离设计预期等负面影响。由于这一章重点在场动力学,我们先介绍空间电荷场。下一章重点是粒子动力学。

定义 11.2. 空间电荷作用 (space charge)

束团内每个粒子携带电荷,因此,彼此间存在交互作用。由 Maxwell 方程组可以看出,这些电荷源、电流源能够在束团内部产生电场、磁场。空间电荷作用是一种远距离(long-range)集体作用,被归类为那些可以通过平滑的(smooth)、连续的(continuous)束团分布函数的 ρ, \mathbf{J} 描述的电磁场效应。这些效应通常可以用上述的平均场(mean field)近似,即,束团内某一个粒子所受的空间电荷场为(除该粒子外的)束团“整体”对该粒子的场的加总。

注 可以看到,上面关于空间电荷作用的定义不完全等于、而是包含于束团内库仑场 $\mathbf{E}_q(\mathbf{r}_i) = \sum_{j \neq i}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2}$ 。或者说,空间电荷场只包含了束团整体库仑场中远距离(long-range)的贡献,即空间电荷场 \in 库仑场。空间电荷效应忽略了束团内某一个粒子附近、近距离(short-range)粒子对其碰撞的影响。这些碰撞还分小角度与大角度散射,将个别分析。

注 怎么区分远距离与近距离? 对粒子间距离的判据一般采用德拜长度(Debye length)或称德拜半径(Debye radius),是等离子体的重要参量,常用 λ_D 表示,有

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{n_0 e^2}} \approx 69 \sqrt{\frac{T(K)}{n_0 (\text{m}^{-3})}} \text{m} \quad (11.4)$$

其中, T 为束团“温度”, n_0 为束团粒子数密度。德拜长度体现等离子体的一种电荷屏蔽效应:当所讨论的长度尺度大于德拜长度时,可以将等离子体看作是整体电中性的;反之,则是带有电荷的。加速器束团属于非中性等离子体,从前面讨论的平均场近似,当所讨论的长度尺度大于德拜长度时,粒子-粒子间的二体碰撞(binary collision)效应可暂时不考虑以简化分析。当所讨论的长度尺度小于德拜长度时,粒子-粒子间的二体碰撞(binary collision)就不再能忽略,那时候我们一般不称空间电荷作用,而称束内散射(intrabeam scattering)效应或 Touschek 效应。

注 这里德拜长度的定义式里有束团“温度” T , 对应到加速器里的物理量,将与横向角散、纵向能散有关,有

$$k_B T_{\perp} = m_e \gamma^2 \sigma_x^2 c^2, \quad k_B T_{\parallel} = m_e c^2 \sigma_{\delta}^2 \quad (11.5)$$

一般有 $k_B T_{\parallel} \ll k_B T_{\perp} \ll m_e c^2$ 。可以看到，束团有横向温度与纵向温度。德拜长度也有横向德拜长度与纵向德拜长度。

注 计算德拜长度或束团温度时，要注意计算的量是在实验室坐标或是质心静止坐标。

练习 11.3 对能量 1 GeV、归一化发射度 $\epsilon_{\perp} = 1 \mu\text{m}$ 、相对能散 $\sigma_{\delta} = 10^{-4}$ 的电子束，假设束团传输过程的 $\beta_x = 10 \text{ m}$ ，估算束团的横向与纵向温度。

解 由题意知， $\gamma \approx 2000$ ，则 rms 角散 $\sigma_{x'} = \sqrt{\epsilon_{\perp}/\gamma\beta_x} = 7 \times 10^{-6}$ 。因此，横向温度有 $T_{\perp} \approx 100 \text{ eV}$ 。纵向温度有 $k_B T_{\parallel} \approx 5 \times 10^{-3} \text{ eV}$ 。如预期， $k_B T_{\parallel} \sim 10^{-5} k_B T_{\perp} \ll m_e c^2 = 511 \text{ keV}$ 。

上面定义空间电荷作用后，以下介绍如何计算自由空间中相对论束团的空间电荷场。要计算束团整体的空间电荷场，先分解问题，从计算一个相对论运动的电荷产生的(库仑)场开始。接着，再计算一源粒子对一测试粒子的场。最后，利用叠加原理加总/积分得到束团整体的空间电荷场。

笔记 许多文献可能出现专有名词：直接空间电荷场 (direct space charge field) 与间接空间电荷场 (indirect space charge field)。这里的 direct space charge field 指的是由束团内粒子彼此间产生的场。Indirect space charge field 指的则是通过间接途径产生的场，比如：存在金属真空管道或周遭环境的磁极导致的场 (参考 §1.20)。

从粒子的共同移动坐标 (或称粒子本身的静止坐标) 开始，根据库仑定律，有

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\mathbf{r}'}{r'^3} \quad (11.6)$$

对电子而言，有 $q = -e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ 。利用狭义相对论的洛伦兹变换，对空间坐标有

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y \\ z' &= \gamma z - \beta\gamma ct \\ t' &= \gamma t - \frac{\beta\gamma}{c} z \end{aligned} \quad (11.7)$$

其中， $t \equiv 0$ 。此外，电场分别在实验室坐标与粒子静止 (t') 坐标中可以写为

$$\begin{aligned} E_x &= \gamma E'_x \\ E_y &= \gamma E'_y \\ E_z &= E'_z \end{aligned} \quad (11.8)$$

于是，在实验室坐标系，有

源电荷 q 在空间中的库仑场。

$$\begin{aligned}
 E_x &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\gamma x}{[x^2 + y^2 + \gamma^2(s - vt)^2]^{3/2}} \\
 E_y &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\gamma y}{[x^2 + y^2 + \gamma^2(s - vt)^2]^{3/2}} \\
 E_z &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\gamma z}{[x^2 + y^2 + \gamma^2(s - vt)^2]^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\gamma(s - vt)}{[x^2 + y^2 + \gamma^2(s - vt)^2]^{3/2}}
 \end{aligned} \tag{11.9}$$

其中, $z = s - vt$ 。写成向量形式, 有

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\mathbf{r}}{\gamma^2 \mathcal{R}^3} \\
 \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{v} = v\hat{\mathbf{z}}
 \end{aligned} \tag{11.10}$$

留意, \mathcal{R} 里面有 γ^{-1} 。

其中, $\mathbf{r} = (x, y, s - vt)$ 、 $\mathcal{R} = \sqrt{(s - vt)^2 + \gamma^{-2}(x^2 + y^2)}$ 。现在, 已经得到相对论运动的单电子产生的库仑场 ($q = -e$), 其沿着 $+z$ 夹角的电场强度分布如图 11.3 所示⁸。可以看出, 当 θ 接近 $\pi/2$ 时, 电场幅值最大。图 11.3 显示, 相对论电子产生的库仑场 (或称空间电荷场) 就像一片松饼 (pancake), 粒子能量越大, 松饼越薄。对极端相对论粒子来说, $\mathbf{v} \rightarrow c\hat{\mathbf{z}}$, 场分布就像是 δ 函数, 有

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q\rho}{\rho^2} \delta(s - ct), \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E} \tag{11.11}$$

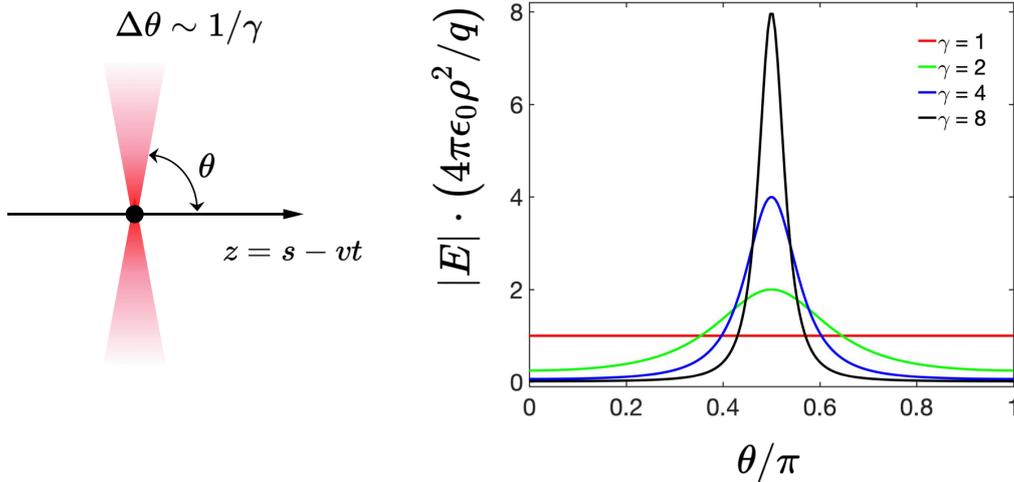


图 11.3: 横向 $E_\rho \propto \gamma/r^2$ 。纵向 $E_z \propto 1/r^2\gamma^2$ 。当 $\gamma = 1$ 时, 即粒子静止, 此时库仑场分布在四面八方, 各向同性。

接着, 再计算一源粒子对一测试粒子的场。作为测试粒子 q , 距离源粒子后方 l 处 ($z = s_0 - l = vt - l, l > 0$ 或对测试粒子, 有 $s - vt = -l$), 横向偏差 a , 即 $x = a, y = 0$ 。则感受到的横向与纵向洛伦兹力可以分别写为⁹

横向外推,
纵向前后推
 $F_z \propto -l$ 。

⁸留意, 在 Stupakov and Penn 一书中, 该图 Fig. 11.1 的 $\gamma = 1$ 曲线有误。

⁹实验室坐标系的横向与纵向洛伦兹力还可以写成 γ 与粒子静止坐标系的混合形式, 有 $F_x = qE'_x/\gamma = F'_x/\gamma, F_z = qE'_z = F'_z$ 。

$$F_x = q(E_x - vB_y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 a}{\gamma^2 \left(\ell^2 + \frac{a^2}{\gamma^2}\right)^{3/2}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 a}{\gamma^4 \left(\ell^2 + \frac{a^2}{\gamma^2}\right)^{3/2}} \quad (11.12)$$

$$F_z = qE_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 \ell}{\gamma^2 \left(\ell^2 + \frac{a^2}{\gamma^2}\right)^{3/2}} \quad (11.13)$$

注意到, 对 γ 为有限大小情况下, 纵向力与 a 仍有关系。考虑在 $\gamma \gg 1$ 情况下, 当 $\ell > \frac{|a|}{\gamma}$ 时, 即测试粒子在有效张角 $\pm 1/\gamma$ 范围外, 上式分母可以适当化简, 有

$$F_x \propto \frac{|a|}{\ell^3 \gamma^4}, \quad F_z \propto -\frac{1}{\ell^2 \gamma^2} \quad (11.14)$$

当 $\gamma \rightarrow \infty$ 时, $F_{x,z} \rightarrow 0$ 。注意到, 横向与纵向空间电荷力对 γ 有不同的依赖关系。

目前考虑的是一源粒子产生的场对一测试粒子的效应。最后, 利用叠加原理计算束团整体在测试粒子 z 位置的空间电荷场, 其中, $z = s - \beta ct$ 。令 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, 假设束团线密度满足归一化条件 $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda(z) dz = 1$, 则前面介绍的 $E_{x,y}$ 可写成 E_ρ 。由在 z' 位置具有部分电荷 dq' 产生的场, 此处写为 dE_ρ

$$dE_\rho(z, z', \rho) = dE_\rho(z, z'; \rho, s) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dq'}{\gamma^2 \left[(z - z')^2 + \frac{\rho^2}{\gamma^2}\right]^{3/2}} \quad (11.15)$$

这里先做一个“有瑕疵”、但能简化计算的假设: 假设测试粒子坐标的横向位置 ρ 距离束团核心很远, 即 $\rho \gg \sigma_{x,y}$, 或者说, 不考虑束团的横向尺寸。此近似称 **thin beam approximation**、**thread beam approximation** 或 **line bunch approximation**。后面我们将回头讨论这个“有瑕疵”的假设。现在, 考虑在空间中 (ρ, z) 位置处的一测试粒子, 利用叠加原理计算束团整体的空间电荷场对在 z 位置的贡献, 有

$$E_\rho(z, \rho) = \int dE_\rho(z, z', \rho) = \frac{Q\rho}{4\pi\epsilon_0\gamma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda(z') dz'}{\left[(z - z')^2 + \frac{\rho^2}{\gamma^2}\right]^{3/2}} \quad (11.16)$$

其中, $\int dq' = Q \int \lambda(z') dz' = Q$, Q 为(含号的)束团总电荷量, 积分项的 $\lambda(z)$ 表明对不同束团纵向线密度分布, 其横向场各异。即 $E_\rho(z, \rho)$ 与 $\lambda(z)$ 有关。图 11.4 给出高斯分布束团的横向电场对纵向 z 坐标的函数依存关系, 对不同束长的依赖关系。考虑两个极端情况:

- 当 $\rho \ll \gamma\sigma_z$ 时, 即观察位置距离束团“很近”时, $E_\rho(z, \rho) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q\lambda(z)}{\rho}$ 。
- 当 $\rho \gg \gamma\sigma_z$ 时, 即观察位置距离束团“很远”时, $E_\rho(z, \rho) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q\gamma\rho}{(\gamma^2 z^2 + \rho^2)^{3/2}}$ 。

练习 11.4 对空间电荷场的理论计算感兴趣的读者, 不妨试着推导以上结果。 ■

解 仔细琢磨之后, 会发现, 考虑 $\rho \ll \gamma\sigma_z$ 极端情况时, 加上 **thin beam approximation** $\rho \gg \sigma_{x,y}$ 条件, 有 $\sigma_{x,y} \ll \gamma\sigma_z$ 。这是在实验室坐标的结果。按洛伦兹坐标变换, 在束团质心运动的静止坐标系 (l) 中, 纵向长度为 $\sigma'_z = \gamma\sigma_z$ (即相比实验室坐标束长拉伸了 γ 倍), 横向不变, 于是有 $\sigma'_{x,y} \ll \sigma'_z$ 。因此, 同时采用 $\rho \ll \gamma\sigma_z, \rho \gg \sigma_{x,y}$ 两个假设的意思是, 在束团质心运动的静止坐标系中, 束团形态仍像是 **thin beam**、**thread beam** 或 **line bunch**。

其实, 对 $\gamma \gg 1$ 的高能电子, 即使在实验室坐标系中的束团不是长条形束团, 比

如: $\sigma_{x,y} \sim \sigma_z$, 则在质心运动的静止坐标系中, 一般来说, thin beam approximation 或 line bunch approximation 仍然可用。因此, 可以在质心静止坐标系中先计算库仑场, 然后再通过洛伦兹坐标变换回到实验室坐标系。 ■



笔记 一般情况的积分通常没有解析解是很正常的。一般为了验证公式正确性或合理性, 会考虑极端情况。极端情况一般能有解析解。中间情况则通过数值求解。

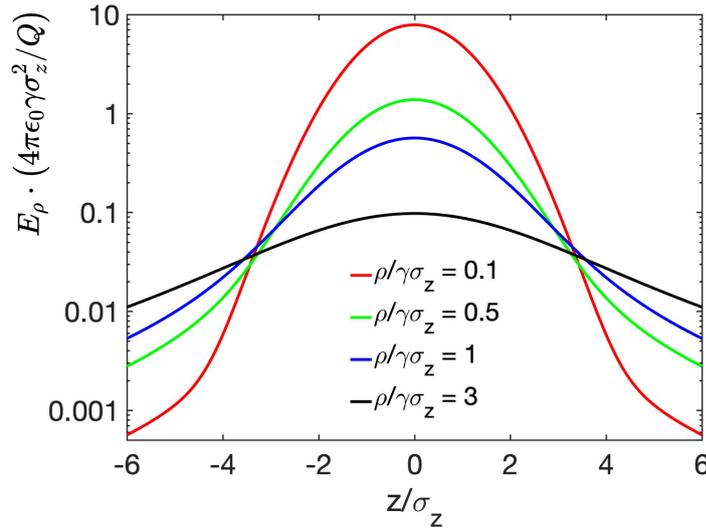


图 11.4: 高斯分布束团 $\lambda(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}}$ 的横向电场对纵向 z 坐标的函数依存关系, 对不同束长的依赖关系。这里 $z > 0$ 表示束团头部, $z < 0$ 则为束团尾部。当写成 $E_\rho \cdot (4\pi\epsilon_0\gamma_z^2/Q)$ 之后, 积分仅与 ρ/γ_z 有关。

上面计算束团整体的横向空间电荷场, 现在考虑纵向空间电荷场。仍假设 thin beam approximation, 即 $\rho \gg \sigma_{x,y}$, 于是源粒子的 $x \approx 0, y \approx 0$ 。由在 z' 位置具有部分电荷 dq' 产生的场, 此处写为 dE_z

$$dE_z(z, z') \approx \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0\gamma^2} \frac{z - z'}{|z - z'|^3} \quad (11.17)$$

利用叠加原理计算束团整体的空间电荷场对其贡献, 有

$$E_{\parallel}(z) = \int dE_z(z, z') = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\gamma^2} \int dz' \lambda(z') \frac{z - z'}{|z - z'|^3} \quad (11.18)$$

当 $z \rightarrow z'$ 时, 以上积分发散, 因为分母 $|z - z'|$ 存在奇点 (singularity) $z = z'$ 。追溯原因, 会发现正是 thin beam approximation 这个“有瑕疵”的近似导致! 回忆一下, 其实这类发散问题在大二电磁学课堂求解无穷长线电荷密度 λ 周围的电场时也发生过。解决这个问题的办法之一, 就是引入有限尺寸的横向分布, 不再采用 $x \approx 0, y \approx 0$ 近似。因此, 如果要继续推进上面的纵向空间电荷场的积分, 我们需要重新构建 dE_z 。现在考虑束团具有横向有限尺寸为圆形 (半径为 a), 电荷密度在横向为均匀分布 $\lambda_{\perp} = \frac{q}{\pi a^2}$, 其中, q 为薄圆盘电荷 (不是束团整体电荷), 则在横向 ρ 至 $\rho + d\rho$ 范围内, 电荷有

$$dq = \lambda_{\perp} \times dA_{\perp} = \frac{q}{\pi a^2} \times 2\pi\rho d\rho \quad (11.19)$$

接着，利用大二静电场学过的薄带电圆环，在中心轴上产生的电场有

$$dE_z(\rho) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0\gamma^2} \frac{z-z'}{\left[(z-z')^2 + \frac{\rho^2}{\gamma^2}\right]^{3/2}} = \frac{2q\rho d\rho}{4\pi\epsilon_0\gamma^2 a^2} \frac{z-z'}{\left[(z-z')^2 + \frac{\rho^2}{\gamma^2}\right]^{3/2}} \quad (11.20)$$

积分从 $\rho = 0$ 至 $\rho = a$ ，得到

$$\begin{aligned} dE_z &= \frac{2q}{a^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0\gamma^2} \int_0^a \rho d\rho \frac{z-z'}{\left[(z-z')^2 + \frac{\rho^2}{\gamma^2}\right]^{3/2}} = \frac{2q}{a^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-(z-z')}{\left[(z-z')^2 + \frac{\rho^2}{\gamma^2}\right]^{1/2}} \Bigg|_{\rho=0}^{\rho=a} \\ &= \frac{2q}{a^2} \frac{(z-z')}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-1}{\left[(z-z')^2 + \frac{a^2}{\gamma^2}\right]^{1/2}} + \frac{1}{|z-z'|} \right) \end{aligned} \quad (11.21)$$

其中， q 为薄圆盘电荷（不是束团整体电荷）。整体束团电荷 Q 与 q 的关系可用纵向一维线密度表示，即 $q = Q\lambda(z)dz$ 。于是，束团整体在 z 位置的电场按叠加原理有

$$\begin{aligned} E_{\parallel}(z) &= \int dE_z(z, z') = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\gamma^2} \int dz' \lambda(z') \frac{z-z'}{|z-z'|^3} \quad \Leftarrow z \rightarrow z' \text{ 为奇点} \\ &\rightarrow -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \lambda(z') (z-z') \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{\gamma^2} + (z-z')^2}} - \frac{1}{|z-z'|} \right) \end{aligned} \quad (11.22)$$

现在，此式当 $z \rightarrow z'$ 时已经不存在奇点，积分式收敛。考虑两个极端情况：

- 当 $a \ll \gamma\sigma_z$ 时，

$$\frac{1}{\left[(z-z')^2 + \frac{a^2}{\gamma^2}\right]^{1/2}} \approx \frac{1}{|z-z'|} \left(1 - \frac{a^2}{2\gamma^2(z-z')^2} \right) \quad (11.23)$$

因此，有

$$\begin{aligned} E_{\parallel} &\approx -\frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \lambda(z') (z-z') \left[\frac{1}{|z-z'|} \left(1 - \frac{a^2}{2\gamma^2(z-z')^2} \right) - \frac{1}{|z-z'|} \right] \\ &= \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \lambda(z') \operatorname{sgn}(z-z') \frac{a^2}{2\gamma^2(z-z')^2} \end{aligned} \quad (11.24)$$

- 当 $a \gg \gamma\sigma_z$ 时，

$$\frac{1}{\left[(z-z')^2 + \frac{a^2}{\gamma^2}\right]^{1/2}} \rightarrow 0 \quad (11.25)$$

因此，有

$$E_{\parallel} = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \lambda(z') \operatorname{sgn}(z-z') \quad (11.26)$$

根据图 11.5，对 thin beam 情况，即 $a \ll \gamma\sigma_z$ ，积分式也可以近似写为

$$E_z \sim \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\gamma^2\sigma_z^2} \log \frac{\gamma\sigma_z}{a} \quad (11.27)$$

虽然此式在 $a \rightarrow 0$ 的渐进形式最终仍然发散，但通过以上分析，我们可以看出更多：此发散为对数形式发散，相对而言属于弱发散。

到目前为止，我们已经推导得到了束团内某个位置的横向与纵向空间电荷场的数学

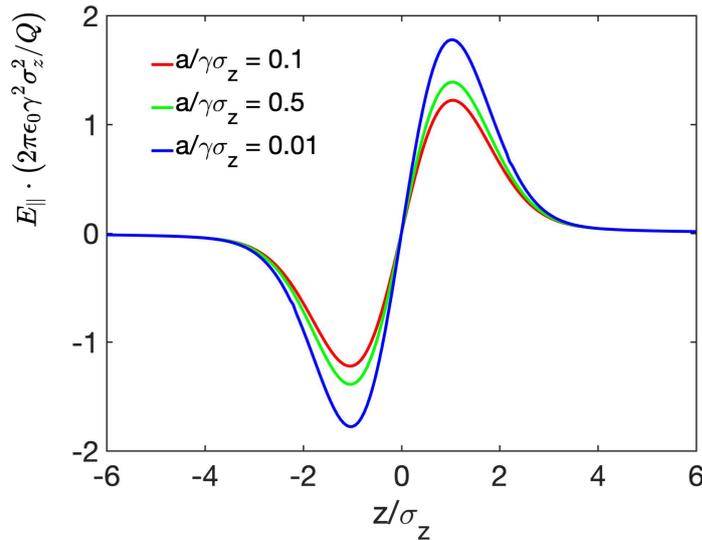


图 11.5: 高斯分布束团 $\lambda(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}}$ 的纵向电场对 z 坐标的函数依存关系, 在不同横向位置的依赖关系。这里 $z > 0$ 表示束团头部, $z < 0$ 则为束团尾部。

表示式, 有

$$E_\rho(z, \rho) = \int dE_\rho(z, z', \rho) = \frac{Q\rho}{4\pi\epsilon_0\gamma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda(z') dz'}{[(z-z')^2 + \frac{\rho^2}{\gamma^2}]^{3/2}} \quad (11.28)$$

$$E_{||}(z) = \int dE_z(z, z') = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\gamma^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \lambda(z') \frac{z-z'}{|z-z'|^3}$$

可以看到, $E_{||}(z) \propto (z-z')$, 即束团内 $z > 0$ 的头部粒子感受到束团整体给予一往前推力, 使头部粒子获得些能量; 束团内 $z < 0$ 的尾部粒子感受到束团整体给予一往后推力, 使尾部粒子失去些能量。束团整体能量不变; 此空间电荷场视为束团内部的自场。此外, $E_\rho(z, \rho) \propto \rho$, 即无论束团内的头部或尾部粒子都感受到横向外推力: 空间电荷场对束团横向影响可视为 xy 同时散焦。

🔴 **练习 11.5** 对空间电荷场的理论计算感兴趣的读者, 不妨试着推导以上结果。 ■

🔴 **练习 11.6** 利用 MATLAB 或 Mathematica 画出图 11.4 与图 11.5 结果。 ■

🔴 **练习 11.7** 上面的分析考虑了一维线束团, 采用 thin beam approximation。为避免发散, 用了横向均匀分布的束团。考虑如下三维高斯束团, 并重复以上分析。

$$\rho(x, y, z) = \frac{Q}{(2\pi)^{3/2}\sigma_x\sigma_y\sigma_z} e^{-x^2/2\sigma_x^2 - y^2/2\sigma_y^2 - z^2/2\sigma_z^2}$$

解 参考 Stupakov and Penn 一书的 §11.4。 ■

练习 11.8 以上讨论假设束团在自由空间中传输。考虑束团在理想导体、圆柱对称、半径 b 的金属管道中传输，试着推导 $E_\rho(z, \rho), E_\parallel(z, \rho)$ 。当理想导体换为有限电导率导体时，将是下一节要介绍的计算。 ■

练习 11.9 接续上题，考虑束团在全高 $2h$ 的理想导体平行板，试着推导 E_x, E_y, E_\parallel 。 ■

练习 11.10 再续上题，考虑束团在 $2a \times 2b$ 的矩形、理想导体平行板，试着推导 E_x, E_y, E_\parallel 。 ■

极端相对论粒子产生的电磁场 \approx 均匀平面电磁波 以上讨论了相对论粒子产生的空间电荷场，给出

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\mathbf{r}}{\gamma^2 \mathcal{R}^3}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \quad (11.29)$$

其中，

$$\mathbf{r} = (x, y, s - vt), \quad \mathcal{R} = \sqrt{(s - vt)^2 + \gamma^{-2}(x^2 + y^2)} \quad (11.30)$$

当 $\gamma \rightarrow \infty$ 时，场分布就像是 δ 函数，有

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q\rho}{\rho^2} \delta(s - ct), \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E} \quad (11.31)$$

将 δ 函数以傅里叶变换展开后，每个频率成分就像单频的均匀平面电磁波，即 TEM 波 (参考 §1.9)。

极端相对论粒子产生的空间电荷场对一测试粒子的响应就好比均匀平面电磁波对一测试粒子的响应。以此比拟为进一步分析的方法称 Weizsacker-Williams 近似 (Weizsacker-Williams approximation)，又称虚光子法 (method of virtual quanta) 或等效光子近似 (equivalent photon approximation)。此分析思路适用于高频响应分析。对 Weizsacker-Williams 近似感兴趣的读者，可参考 J.D. Jackson 一书的 §15.4 或 C. Brau 一书的 §5.2。

11.2.1 束内散射效应与 Touschek 效应

上面我们主要讨论了空间电荷场的计算，适用于描述粒子间距长于 Debye 长度的情况。短于 Debye 长度内的物理效应还有束内散射效应与 Touschek 效应。细节此处不论，如下总结其定性描述与常用公式。

定义 11.3. 束内散射效应 (intrabeam scattering, IBS)

束团内每个粒子携带电荷，因此，彼此间存在交互作用。除了长程、平均场的空间电荷作用外，对束团内某一粒子，存在 中距离、小角度、多次散射 产生的效应，

称束内散射效应 (IBS)。每次碰撞导致束团内粒子之间小部分动量交换, 可能发生在不同维度 (p_x, p_y, p_z) 间。一般而言, IBS 过程为缓变过程, 将造成束团发射度增加、能散增加、束团拉伸等。 □

定理 11.3. IBS 估算公式

假设束团为高斯分布, x, y 间没有耦合, 传输段允许存在色散, 假设纵向为弱聚焦, 则有如下修正的 Piwinski 公式^{a,b}

$$\frac{1}{T_i} = \frac{1}{\epsilon_i^{1/2}} \frac{d\epsilon_i^{1/2}}{dt} = \frac{1}{2\epsilon_i} \frac{d\epsilon_i}{dt} \quad (11.32)$$

其中, $i = x, y, z$, ϵ_i 为各方向的几何发射度。对纵向而言, 还可以写成如下较熟悉的形式

$$\frac{1}{T_z} = \frac{1}{\sigma_\delta} \frac{d\sigma_\delta}{dt} \quad (11.33)$$

修正的 Piwinski 公式 (modified Piwinski formula) 为

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_x} &= A \times \left\langle f \left(\frac{1}{\tilde{a}}, \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}, \frac{\tilde{q}}{\tilde{a}} \right) + \frac{\mathcal{H}_x^2 \sigma_h^2}{\epsilon_x} f(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{q}) \right\rangle \\ \frac{1}{T_y} &= A \times \left\langle f \left(\frac{1}{\tilde{b}}, \frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}, \frac{\tilde{q}}{\tilde{b}} \right) + \frac{\mathcal{H}_y^2 \sigma_h^2}{\epsilon_y} f(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{q}) \right\rangle \\ \frac{1}{T_z} &= A \times \left\langle \frac{\sigma_h^2}{\sigma_\delta^2} f(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{q}) \right\rangle \end{aligned} \quad (11.34)$$

其中,

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi r_0^2 c N_b}{8\gamma_0 \Gamma}, \quad \frac{1}{\sigma_h^2} = \frac{1}{\sigma_\delta^2} + \frac{\mathcal{H}_x^2}{\epsilon_x} + \frac{\mathcal{H}_y^2}{\epsilon_y} \\ \mathcal{H}_x &= \gamma_x \eta_x^2 + 2\alpha_x \eta_x \eta_{px} + \beta_x \eta_{px}^2 \\ \mathcal{H}_y &= \gamma_y \eta_y^2 + 2\alpha_y \eta_y \eta_{py} + \beta_y \eta_{py}^2 \\ \tilde{a} &= \frac{\sigma_h}{\gamma_0} \sqrt{\frac{\beta_x}{\epsilon_x}}, \quad \tilde{b} = \frac{\sigma_h}{\gamma_0} \sqrt{\frac{\beta_y}{\epsilon_y}}, \quad \tilde{q} = \beta_0 \sigma_h \sqrt{\frac{2d}{r_0}} \\ f(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{q}) &= 8\pi \int_0^1 (\log)_P \frac{1-3u^2}{\tilde{P}\tilde{Q}} du \\ (\log)_P &\approx 2 \ln \left(\frac{\tilde{q}}{2} \left(\frac{1}{\tilde{P}} + \frac{1}{\tilde{Q}} \right) \right) - 0.577 \\ \tilde{P}^2 &= \tilde{a}^2 + (1 - \tilde{a}^2) u^2 \\ \tilde{Q}^2 &= \tilde{b}^2 + (1 - \tilde{b}^2) u^2 \\ \Gamma &= 8\pi^3 \beta_0^3 \gamma_0^3 \epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z \end{aligned} \quad (11.35)$$

- $\langle \dots \rangle$ 为对加速器传输段或储存环周长做平均
- Γ 为束团六维相空间体积, 定义为

$$\Gamma = \prod_{i=x,y,z} \int_0^{2\pi} d\phi_i \int_0^\infty dJ_i \beta_0 \gamma_0 e^{-J_i/\epsilon_i} = 8\pi^3 \beta_0^3 \gamma_0^3 \epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z \quad (11.36)$$

- N_b 为束团总粒子数
- β_0, γ_0 为洛伦兹相对论因子, c 为光速
- $\beta_{x,y}, \alpha_{x,y}, \gamma_{x,y}$ 为 Courant-Snyder 参量, $\epsilon_{x,y,z}$ 为 (即时的) 束团几何发射度
- $\eta_{x,y}$ 为色散函数
- $r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}$ 为粒子经典半径, 对电子而言, 有 $r_0 = 2.81794 \times 10^{-15}$ m
- d 为冲击参数 (impact parameter) 最大值, 表征粒子-粒子间的碰撞距离。一般取束团横向尺寸的较小值, 即 $d = \min(\sigma_x, \sigma_y)$

注意到, 纵向增长率 T_z^{-1} 只有一项, 而横向增长率 $T_{x,y}^{-1}$ 则含有两项, 其中, 第一项为束团本身的有限横向发射度的直接影响, 第二项则与色散 $\eta_{x,y}$ 及纵向贡献 (通过 $\mathcal{H}_{x,y}$) 有关。回忆 §7.10 介绍过的关于 $\mathcal{H}_{x,y}$ 的物理图像, 横向增长率的第二项效应非常类似于同步辐射量子激发效应, 即纵向的粒子小角度、多次散射导致能量改变, 此能量改变可能通过在加速器中某个存在色散 ($\eta_{x,y}$ 或 η_{p_x, p_y}) 的位置, 耦合到横向维度, 对 $T_{x,y}^{-1}$ 造成影响。

注 IBS 的完整推导过程非常困难、复杂。对细节讨论或推导感兴趣的读者, 可参考 A. Wolski 一书的 Chapter 13。

证明 原始论文与推导可参考 A. Piwinski, Intra-Beam Scattering in Presence of Linear Coupling, Report No. DESY 90-113 (1990). <https://lib-extopc.kek.jp/preprints/PDF/1990/9012/9012074.pdf>、J.D. Bjorken and S.K. Mtingwa, Intrabeam scattering, Part. Accel. **13**, 115-143 (1983). <https://inspirehep.net/literature/180068>、高能近似的简化公式可参考 K.L.F. Bane, A Simplified Model of Intrabeam Scattering, Proceedings of EPAC 2002, Paris, France (WEPRI120). <https://accelconf.web.cern.ch/e02/PAPERS/WEPRI120.pdf>

^a此处援引修正的 Piwinski 公式, 最初由 K.L.F. Bane 给出。相较于原始的 Piwinski 公式, 形式上非常接近, 但是修正后的式子更具应用性。

^b还有另一个等价形式, 基于量子场论分析, 以散射矩阵 (scattering matrix) 表示, 称 Bjorken-Mtingwa 公式, 此处不论。

性质 11.1. 几个基于 Piwinski 理论的特性

根据 Piwinski 理论, 可以证明有以下恒等式

$$f(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{q}) + \frac{1}{\tilde{a}^2} f\left(\frac{1}{\tilde{a}}, \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}, \frac{\tilde{q}}{\tilde{a}}\right) + \frac{1}{\tilde{b}^2} f\left(\frac{1}{\tilde{b}}, \frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}, \frac{\tilde{q}}{\tilde{b}}\right) = 0 \quad (11.37)$$

忽略同步辐射效应与其它除了 IBS 以外的效应, 可以进一步得到三个维度的发射度 $\epsilon_{x,y,z}$ 满足

$$\left\langle \frac{1}{\beta_x} \right\rangle \epsilon_x + \left\langle \frac{1}{\beta_y} \right\rangle \epsilon_y + \left(\frac{1}{\gamma_0^2} - \left\langle \frac{\eta_x^2}{\beta_x^2} \right\rangle - \left\langle \frac{\eta_y^2}{\beta_y^2} \right\rangle \right) \epsilon_z = \text{常数} \quad (11.38)$$

其中, $\langle \dots \rangle$ 表示对储存环周长做平均。

证明 略。感兴趣的读者可参考 Piwinski 原始论文或 A. Wolski 教科书。 □



笔记 思考一下, 这个恒等式能给出什么物理图像?

已知束团发射度 $\epsilon_{x,y,z} > 0$, 如果系数 $\left(\frac{1}{\gamma_0^2} - \left\langle \frac{\eta_x^2}{\beta_x^2} \right\rangle - \left\langle \frac{\eta_y^2}{\beta_y^2} \right\rangle\right) > 0$, 因为 $\beta_{x,y} > 0$, 则存在一个解使得三个方向的束团发射度均有界。如果系数 $\left(\frac{1}{\gamma_0^2} - \left\langle \frac{\eta_x^2}{\beta_x^2} \right\rangle - \left\langle \frac{\eta_y^2}{\beta_y^2} \right\rangle\right) < 0$, 则可能存在至少某个维度的发射度无限制增长的情况。兹举一例说明, 由 §7.10 知

$$\left\langle \frac{\eta_x^2}{\beta_x^2} \right\rangle \approx \frac{1}{\nu_x^2} \quad (11.39)$$

考虑由 FODO 磁聚焦结构形成的周期传输段, 由 §8.1, 有 $\nu_x^{-2} \approx \alpha_c \approx \eta + \gamma^{-2}$, 即

$$\frac{1}{\gamma_0^2} - \left\langle \frac{\eta_x^2}{\beta_x^2} \right\rangle \approx \frac{1}{\gamma_0^2} - \alpha_c = -\eta \quad (11.40)$$

对平面加速器, $\langle \beta_x \rangle \approx \rho/\nu_x$, 忽略 y 方向 η_y 的影响, 有

$$\frac{1}{\rho} (\nu_x \epsilon_x + \nu_y \epsilon_y) - \eta \epsilon_z = \text{常数} \quad (11.41)$$

于是, 当 below transition 时 ($\eta < 0$), 发射度存在有界解; 当 above transition 时 ($\eta > 0$), 至少一个维度发射度可能无限制增长。无奈一般情况下, 储存环一般操作在 above transition, 所以看似束团发射度将可能无限制增长。但是, 注意到, 上面分析忽略了同步辐射效应。幸运的是, 同步辐射阻尼效应往往能够缓解 IBS 增长。由 §8.3、§8.4 介绍过的内容, 可以在同步辐射阻尼方程中加入 IBS 效应项进行分析

$$\frac{d\epsilon_i}{dt} = \frac{2}{\tau_i} (\epsilon_{i0} - \epsilon_i) + \frac{2}{T_i} \epsilon_i \quad (11.42)$$

其中, τ_i 为同步辐射阻尼时间, T_i 为束内散射增长时间, ϵ_{i0} 为仅考虑同步辐射效应时的平衡发射度。假设如果存在新平衡时的发射度, 写作 ϵ_{i1} , 则有

$$\frac{2}{\tau_i} (\epsilon_{i0} - \epsilon_{i1}) + \frac{2}{T_i} \epsilon_{i1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon_{i1} = \frac{\epsilon_{i0}}{1 - \frac{\tau_i}{T_i}} \quad (11.43)$$

其中, ϵ_{i0} 为排除 IBS, 仅考虑同步辐射阻尼效应与量子激发效应后的旧平衡解。求解此方程需要伴随上面修正的 Piwinski 公式迭代求解。一般情况下, 考虑同步辐射阻尼效应后, IBS 导致的束团增长已经相对缓慢。因此, 除非对于极低发射度储存环, 一般 IBS 效应不会太严重。

注 一般来说, 质子同步加速器的 IBS 增长率较电子同步加速器的 IBS 增长率小, 或增长时间较长。对质子同步加速器, IBS 增长时间可能是以“小时”计; 对电子同步加速器, IBS 增长时间可能是“分钟”量级, 与能量有关。关于电子同步加速器的 IBS 测量, 可参考 K. Tian et al., Low-Energy Intrabeam Scattering Measurements at the SPEAR3 Storage Ring, The 5th International Particle Accelerator Conference, IPAC 2014 (MOPRO104). <https://accelconf.web.cern.ch/ipac2014/papers/mopro104.pdf>。



笔记 缓解电子同步加速器的束内散射效应的几个可能方案:

- 适当提升粒子参考能量 \Rightarrow 增长率 $\propto A \propto \gamma_0^{-1}$, 由于存在同步辐射效应, 能量应适当选取, 不宜太高。
- 降低束团电流 \Rightarrow 在储存环中安装高次谐波腔 (higher harmonic cavity, HHC), 使拉伸平衡时的束长。HHC 腔有时又称朗道谐振腔 (Landau cavity)。
- 安装阻尼扭摆器 (damping wiggler) 增加辐射阻尼率以抵抗束内散射增长。
- 采用圆束团 (round beam) \Rightarrow 一般 (三代) 同步辐射储存环的束团为扁束团 (flat beam), 横向 y 方向容易受束内散射效应而增加发射度。采用圆束团方案能有效缓解, 但需要适当设计磁聚焦结构传输段。

定义 11.4. Touschek 效应 (Touschek effect)

束团内每个粒子携带电荷, 因此, 彼此间存在交互作用。除了长程、平均场的空间电荷作用外, 对束团内某一粒子, 存在 近距离、大角度、单次散射 产生的效应, 称 Touschek^a 效应。单次碰撞即可能导致束团内粒子较大的动量改变, 跳出加速器设计的能量接收 (energy acceptance) 范围, 造成束团粒子丢失等。

^aBruno Touschek 同时也是世界上第一台正负电子对撞机的发起人。

定理 11.4. Touschek 寿命估算公式

假设束团为高斯分布, xy 间没有耦合, 且束团不在 $D \neq 0$ 的净色散段, 由于 Touschek 效应导致的束团粒子丢失可用单位时间内束团粒子数 dN_b/dt 评估, 有

$$\frac{dN_b}{dt} = -\frac{N_b^2 \beta_0^3 c r_0^2}{8\pi \gamma_0^2 \sigma_x \sigma_y \sigma_z \delta_{\max}^3} D(\xi) \quad (11.44)$$

其中, 无量纲参数 $\xi = \frac{\delta_{\max}^2 \beta_x}{\beta_0^2 \gamma_0^2 \epsilon_x}$, $D(\xi)$ 称为 Touschek 函数

$$D(\xi) = \xi^{3/2} \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u^2} \left(\frac{u}{\xi} - 1 - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{u}{\xi} \right) \right) du \quad (11.45)$$

函数通过数值积分得到, 形如图 11.6。

- δ_{\max} 为能量接受度 (energy acceptance), 通常为纵向相空间“高度”(bucket height)^a 或是动力学能量接受度, 取两者较小值为 δ_{\max}
- N_b 为束团内即时粒子数
- β_0, γ_0 为洛伦兹相对论因子, c 为光速
- β_x, ϵ_x 为束团的 Courant-Snyder 参数与几何发射度
- $\sigma_{x,y,z}$ 为束团横纵向尺寸 (rms, 假设高斯分布)
- $r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}$ 为粒子经典半径, 对电子而言, 有 $r_0 = r_e = 2.81794 \times 10^{-15} \text{ m}$

Touschek 寿命定义为

$$\frac{1}{\tau_T} = -\frac{1}{N_b} \frac{dN_b}{dt} = \frac{N_b \beta_0^3 c r_0^2}{8\pi \gamma_0^2 \sigma_x \sigma_y \sigma_z \delta_{\max}^3} D(\xi) \quad (11.46)$$

注意到，此粒子数衰减率仍存在随束团内(即时的)粒子数 N_b 的依赖关系。对传统储存环而言，在真空管道中的残余气体散射可能是决定束团寿命的主要因素。但是，近年随着相关技术发展，对更低发射度电子储存环而言，Touschek 效应已经成为决定束团寿命的主要因素。由于诸多因素局限，能够调控 Touschek 寿命的参数不多，一般为拉伸束长(使 RF bucket 更宽，如安装高次谐波腔^b)或提高能量接受度(使 RF bucket 更高)。提高能量接受度较有效，但这两项操作某种程度上将互相抵触，所以需要全面优化、权衡。

注 对高亮度电子储存环，Touschek 寿命的数量级约几个小时。残余气体散射可以控制到数十小时。对同步辐射用户，一般实验站可能要求数小时的稳定同步辐射光束供应。一般来说， $\geq 3\%$ 的能量接受度(energy acceptance)能够保证合理的 Touschek 寿命。Touschek 寿命在不同类型加速器可能很不一样，对对撞机，Touschek 寿命可能短地多(如：分钟量级)。

注 对细节讨论或推导感兴趣的读者，可参考 A. Wolski 一书的 Chapter 13。对存在 xy 耦合或色散的一般情况，结果复杂地多，分析可参考 A. Piwinski, The Touschek effect in strong focusing storage rings, Tech. Rep. DESY 98-179, DESY, Hamburg, Germany (1998). <https://arxiv.org/pdf/physics/9903034.pdf>

证明 原始论文可参考 C. Bernardini, G. F. Corazza, G. Di Giugno, G. Ghigo, J. Haissinski, P. Marin, R. Querczoli, and B. Touschek, Lifetime and Beam Size in a Storage Ring, Phys. Rev. Lett. **10**, 407 (1963). <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.10.407>

^a有时又称 RF 接受度，写成 δ_{RF} 。

^b储存环中如果安装高次谐波腔(又称朗道谐振腔)，则环里将包含一个主腔(fundamental RF cavity)，一个谐波腔。两个腔的纵向相空间拓扑结构与一个主腔不一样，可视为两个 RF bucket 的融合。当条件适当时，能够使束团所处的 bucket 更宽，同时可能引致更大的同步振荡频散(frequency spread)。高次谐波腔可再细分主动腔(active HHC)或被动腔(passive HHC)，主动腔能够满足束长拉伸的最优条件，被动腔只能部分满足最优条件，各有优缺。对双 RF 腔储存环动力学感兴趣的读者，可参考 S.Y. Lee 一书的 Chapter 3, §V.6。



笔记 有关 IBS 与 Touschek 效应的综述讨论与一些历史背景介绍，可参考 Anton Piwinski, James D. Bjorken, and Sekazi K. Mtingwa, Phys. Rev. Accel. Beams **21**, 114801 (2018). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevAccelBeams.21.114801>



笔记 已知高次谐波腔能够有效拉伸束长与增加同步振荡频率。前者能增加束团 Touschek 寿命与缓解束内散射；后者能抑制单束团纵向集体效应。作为半开放问题，高次谐波腔的存在是否能抑制横向集体效应？

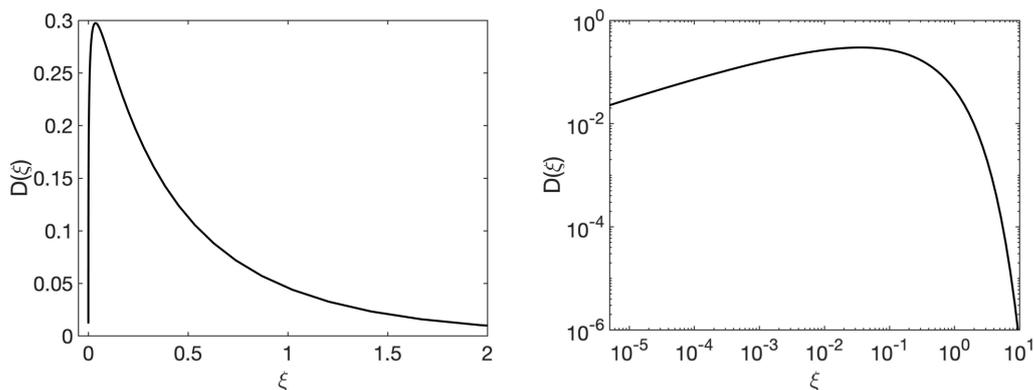


图 11.6: Tauschek 函数。左图为线性标度, 右图为双对数标度。



笔记 一个值得思考的问题: 束流稳定性 (stability) 与束流寿命 (lifetime) 乍看之下似乎追求的目标是一致的: 束流越稳定, 其寿命就越长。但从工程设计的角度来说, 这两个概念是否一致、还是存在可能的矛盾? 留意, 为了增强束流稳定性, 有时候需要在加速器中安装反馈系统 (feedback system, 参考 §12.4)。由前面讨论知道, 通过安装高次谐波腔拉伸束长可以增加 Tauschek 寿命。但是, 高次谐波腔与反馈系统不完全兼容, 在一定程度上需要相互调解。因此, 从工程设计的角度看, 束流稳定性与寿命谁应优先 (优化), 有时候需要根据不同机器参数进一步评估。

回顾一下, 这一节主体介绍的是束团内空间电荷场的计算, 对应到三无定理的第 1 种不完美情况, 不考虑有限真空管壁边界, 因此默认满足第 2、3 种完美假设。由推导的空间电荷场结果知, 当 $\gamma \rightarrow \infty$ 时, $E_{\rho,z} \rightarrow 0$ 。此结果符合预期, 因为当 $\gamma \rightarrow \infty$ 时, 束团内每个粒子产生的库仑场都像是一张无限薄的松饼一样, 因此不影响临近粒子。但是, 实际上粒子速度 $v < c$, 松饼不再是无限薄, 而存在 $\sim a/\gamma$ 横向厚度, 因此多少会影响临近粒子。

11.2.2 浅谈: 结晶束

这一节介绍了空间电荷场、束内散射、Tauschek 散射, 本质上为束团内带电粒子间的库仑场。结合束团内粒子间的库仑场与第 7、8 章介绍的单粒子横纵向动力学, 我们大概建立了“束团粒子动力学”的一个物理图像: 许多粒子在加速器中沿着设计轨迹, 相对于参考粒子进行振荡运动。在实验室坐标如此, 在参考粒子的静止坐标也有类似的图像。外部磁场 (比如, 四极铁) 或外部电场 (比如, 加速腔) 作为聚焦源, 束团的库仑场则产生抵抗外部场的散焦源。有没有可能存在一种状态 — 可能在一个维度或者多个维度, 当外部聚焦源与内部散焦源恰好抵消呢? 可能。当满足一定条件时, 存在这种状态, 此时的束团又称结晶束 (crystalline beam)。

定义 11.5. 结晶束

一般为离子束。在储存环加速器中，粒子的运动由外部电场和磁场约束。相对于参考粒子，当粒子在储存环中的相对运动停止时，类似于晶体晶格 (crystal lattice) 中的原子，此时束团称结晶束。结晶束可能产生前所未有的高亮度束流。

□

定理 11.5. 形成结晶束的必要条件

在储存环中，形成多维结晶束的必要条件包含：

- 交变梯度储存环运行在 below transition (滑相因子 $\eta < 0$)
- 磁聚焦结构的重复周期数至少比束团内粒子的最大 betatron tune 大 $2\sqrt{2}$ 倍以上。一般大 4 倍更好。

以上第一个条件的由来与粒子在弯转过程的库仑交互作用有关。第二个条件是为了避开声子 (phonon) 振荡模式^a与磁聚焦结构重复周期数的“共振”。如果束团只形成一维结晶，则第二个条件可适当放宽。

证明 参考 J. Wei, H. Okamoto, and A.M. Sessler, Necessary Conditions for Attaining a Crystalline Beam, Phys. Rev. Lett. **80**, 2606 (1998). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2606>

^a声子振荡模式与束团的结晶结构相关。

□

要形成结晶束，需要对束团进行冷却 (参考 §8.3.4)。结晶束最初在 1980 年代在新西伯利亚 (Novosibirsk) 实验室首次被观测到，当时采用电子冷却 (electron cooling) 技术。要存储结晶束需要精心设计储存环的聚焦结构，包含横向与纵向。一般来说，通过采用分子动力学 (molecular dynamics, MD) 方法研究结晶束的运动行为，要求对束团内粒子间的库仑场具备精确的数值计算。任何外部非理想的聚焦源都可能“加热”结晶束，因此，如果要长时间存储结晶束，需要有效的束团冷却技术。关于结晶束的更多讨论，包含各种冷却技术、结晶束应用等，此处不论。感兴趣的读者可参考 U. Schramm and D. Habs, Crystalline ion beams, Progress in Particle and Nuclear Physics 53, Issue 2, 583-677 (2004). <https://doi.org/10.1016/j.pnpnp.2004.03.002>

11.3 有限电导率圆柱金属真空管的电磁场计算

又称圆柱金属真空管的电阻壁 (resistive wall) 或阻抗壁电磁场计算。简化起见, 既然考虑了第 2 种不完美情况, 就仍假设 1、3 是完美情况, 即粒子速度 $v = c$ 、真空管壁完全光滑。

前面第 1 章学过, 考虑一侧为理想导体、一侧为理想电介质情况, 由法拉第定律知, 对时变场而言, 如果知道切线方向边界条件 $E_t = 0$, 则法向边界条件 $B_n = 0$ 可以获得。此结果为在实验室静止坐标的描述, 在与束团质心共同前进的坐标系 (beam frame) 是否成立? 利用洛伦兹变换知, 在 beam frame 不再有磁场, 而在 beam frame 的电场仍然满足¹⁰ $E'_t = 0$ 。所以, 在 beam frame 与在实验室静止坐标均有在分界面上切向电场为零的结论; 但是法向 (时变) 磁场为零的条件在 beam frame 不需要, 因没有磁场, 自动成立。这是理想导体的结果。如果不是理想导体, 分析将在频域处理, 则分界面边界条件应该推广, §1.3 介绍过, 有 Leontovich 边界条件, 此处总结如下:

定理 11.6. 电磁场分界面边界条件: 有限电导率情况

又称 Leontovich 边界条件。当一侧为理想电介质, 一侧为有限电导率 σ 的金属导体时, 导体侧不再是 $\mathbf{E} = \mathbf{H} = \mathbf{0}$ 。在分界面两侧, 切向电场与切向磁场皆连续。在包含分界面上与导体侧内, 切向电场与切向磁场满足以下 Leontovich 边界条件

$$\tilde{\mathbf{E}}_t = \zeta(\omega)\tilde{\mathbf{H}}_t \times \mathbf{n} \quad (11.47)$$

其中,

- \mathbf{n} 为理想介质指向导体的单位向量
- $\zeta(\omega)$ 称表面阻抗 (surface impedance)^a

$$\zeta(\omega) = Z_s/Z_0 = -\frac{ik}{\sigma} = [1 - i \operatorname{sgn}(\omega)] \sqrt{\frac{Z_0|\omega|}{2c\sigma}} \quad (11.48)$$

- $\operatorname{sgn}(\omega)$ 为符号函数 (sign function), 根据宗量正负, 取值分别为 ± 1

证明 参考 G. Stupakov and G. Penn, Classical Mechanics and Electromagnetism in Accelerator Physics, Springer (2018), §12.1.

注 对于理想导体情况, $\sigma \rightarrow \infty$, 则 $\zeta \rightarrow 0$, 有 $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ 。

注 这里的 Leontovich 边界条件是在频域表示的时谐形式, 在时域的瞬时表示需要连同场一起做逆傅里叶变换。

注 以上 Leontovich 边界条件为 SI/MKS 单位制表示。如果是 CGS/高斯单位制, 则写成 $\tilde{\mathbf{E}}_t = \zeta(\omega)\tilde{\mathbf{H}}_t \times \mathbf{n}$, 其中, $\zeta(\omega) = [1 - i \operatorname{sgn}(\omega)] \sqrt{\frac{|\omega|}{8\pi\sigma}}$ 。

^a有些文献称 ζ 为表面阻抗, 有些则称 Z_s 为表面阻抗, 宜留意。

¹⁰这里的 t 不是微分, 只是表示与束团共同移动的坐标系 (beam frame)。

必要的工具齐备之后，现在考虑计算有限电导率圆柱金属真空管的电磁场，参考图 11.7，源粒子 q_1 与测试粒子 q_2 经过一段结构均匀、有限电导率的圆柱金属真空管。束团整体往右方以 $v = c$ 前进，管壁半径为 b ，电导率 σ 。现在想要计算 q_1 作用在 q_2 上的纵向电场 E_z ，假设彼此间距 s 固定，希望求得的场表示成 s 的函数，即 $E_z(s, t)$ 或写成 $E_z(z = s - ct)$ 。

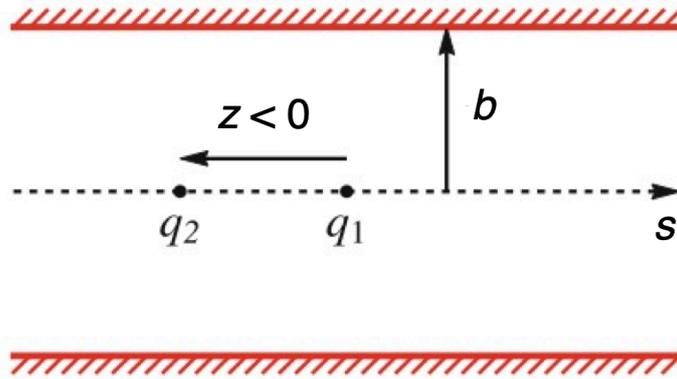


图 11.7: 源粒子 q_1 与测试粒子 q_2 经过一段结构均匀、有限电导率的圆柱金属真空管。束团整体往右方以 $v = c$ 前进，管壁半径为 b ，电导率 σ 。注意，这里的局域 z 坐标与全域 s 坐标满足 $z = s - ct$ 。作为源粒子后方的测试粒子，恒有 $z < 0$ 。

当金属为理想导体时，形同没有管壁的情况，管道真空的电磁场就如前面自由空间电荷场一样，为¹¹

$$\begin{aligned} E_\rho(\rho, s, t) &= E_\rho(\rho, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q_1}{\rho} \delta(s - ct) \\ B_\theta(\rho, s, t) &= B_\theta(\rho, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q_1}{c\rho} \delta(s - ct) \end{aligned} \quad (11.49)$$

但是，我们现在要分析的对象不是无边界的自由空间，而是存在半径 b 的有限电导率的金属真空管道中的电场。怎么做？首先，因为是有限电导率，我们准备采用 Leontovich 边界条件，所以必须先将电磁场从时域转换到频域。将上式做傅里叶变换，利用定义¹²

$$B_\theta(\rho, z) = \frac{1}{2\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{B}_\theta(\rho, \omega) e^{i\omega z/c} \Leftrightarrow \tilde{B}_\theta(\rho, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dz B_\theta(\rho, z) e^{-i\omega z/c} \quad (11.50)$$

其中， $z = s - ct$ ，则有

$$\tilde{B}_\theta(\rho, \omega) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{2q_1}{\rho} \quad (11.51)$$

好，现在有了 \tilde{B}_θ 之后，怎么求 E_z ？代 Leontovich 边界条件。回忆一下，这里的 \tilde{B}_θ 是基于无边界的自由空间电荷场。这么做是一种近似。片刻思考后，会发现，对无边界的自由空间或是有边界的金属真空管道，在管壁附近的磁场行为其实非常类似：理想导体边界要求满足的磁场边界条件 $B_n = 0$ 完美成立。或者说，此分析采取的思路如下：

¹¹这里的 δ 是 Dirac delta 函数，不是能量偏差坐标。此外，这里有 $z = s - ct$ 。

¹²或利用 δ 函数的积分公式

$$\delta(z) = \delta(s - ct) = \frac{1}{2\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-s/c)}$$

无边界自由空间的磁场 = 理想导体边界的磁场 \approx 有限电导率导体边界的磁场。

对理想导体, 有 $\sigma^{-1} = 0$ 。由于一般金属电导率虽不是无限大, 但其倒数 $\sigma^{-1} \ll 1$ 已经可以视为小量。因此, 上述思路也可视为一种微扰方法。现在得到有限电导率导体边界的磁场之后, 电场可以根据 Leontovich 边界条件得到, 有

$$\tilde{E}_z \Big|_{\rho=b} = -\zeta(\omega) \frac{\tilde{E}_\theta(b)}{\mu_0} = -[1 - i \operatorname{sgn}(\omega)] \sqrt{\frac{Z_0 |\omega|}{2c\sigma}} \frac{c}{4\pi} \frac{2q_1}{b} \quad (11.52)$$

这是在有限电导率导体边界面上的电场。我们的最终目标是求解真空管道内中空区域——特别是轴心区域——的电场。因此, 我们需要一个场方程。在圆柱坐标系下, 有¹³

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial s^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \quad (11.53)$$

注意, 这是时域方程, 按傅里叶变换到频域¹⁴, 有

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial \rho} = 0 \quad (11.54)$$

其解有

$$\tilde{E}_z(\rho) = C_1 + C_2 \ln \rho \quad (11.55)$$

轴心 $\rho = 0$ 处电场不该发散, 于是要求 $C_2 = 0$, 因此,

$$\tilde{E}_z(\rho) = C_1 \equiv \tilde{E}_z(\rho = b) \quad (11.56)$$

或

$$\tilde{E}_z(\rho) = -[1 - i \operatorname{sgn}(\omega)] \sqrt{\frac{Z_0 |\omega|}{2c\sigma}} \frac{c}{4\pi} \frac{2q_1}{b} \quad (11.57)$$

一般来说, 定义单位长度纵向阻抗为 $Z_{\parallel}(\omega) \equiv \tilde{E}_z/q_1$ 。后面将给出阻抗函数的正式定义。此式表征真空管道内中空区域的纵向电场在不同半径处是均匀的。上式为频域表示式, 利用逆傅里叶变换, 时域表示式可写为

$$E_z(z) = \frac{1}{2\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{E}_z e^{-i\omega(t-s/c)} = \sqrt{\frac{Z_0}{2c\sigma}} \frac{q_1}{4\pi^2 b} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega [i \operatorname{sgn}(\omega) - 1] \sqrt{|\omega|} e^{-i\omega(t-s/c)} \quad (11.58)$$

敏锐的读者或许能看出来, 积分项中的 $\sqrt{|\omega|}$ 将使积分发散。



笔记 怎么办? 分析就在这停下来了? 数值积分行不行?

数值积分或解析积分从根本上说并没有改变这个积分的本质。即使如此, 我们还是能近似地做这个积分, 采用如下技巧

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega [i \operatorname{sgn}(\omega) - 1] \sqrt{|\omega|} e^{-i\omega(t-s/c)} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} d\omega [i \operatorname{sgn}(\omega) - 1] \sqrt{|\omega|} e^{-i\omega(t-s/c)} e^{-\epsilon|\omega|} \quad (11.59)$$

其中, 令 $\epsilon > 0$ 。如果此积分能做, 那么做出来之后, 再取极限 $\epsilon \rightarrow 0$, 即

这是复变函数积分。

¹³留意, 讲义第 1 章 (§1.2) 介绍波方程时, 圆柱坐标的 z 在变换到 Frenet-Serret 坐标系时, 不再是束团局域坐标 z , 而是 s , 为加速器路径长度的全域坐标。

¹⁴利用

$$E_z(s, t) = E_z(z = s - ct) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{E}_z e^{ikz}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega [i \operatorname{sgn}(\omega) - 1] \sqrt{|\omega|} e^{-i\omega\xi - \epsilon|\omega|} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\xi^{3/2}} H(\xi), \quad \xi = t - \frac{s}{c} = -\frac{z}{c} \quad (11.60)$$

其中, H 为单位步阶函数 (unit step function)。于是, 时域的电场表示式可写成

$$E_z(z) = \sqrt{\frac{Z_0}{2c\sigma}} \frac{q_1}{4\pi^2 b} \frac{\sqrt{2\pi}}{(-z/c)^{3/2}} H(-z/c) = \frac{q_1 c}{4\pi^{3/2} b} \sqrt{\frac{Z_0}{\sigma(-z)^3}} H(-z) \propto \frac{1}{|z|^{3/2}} \quad (11.61)$$

其中, $z < 0$ 。

 **练习 11.11** 试着完成上面复变函数积分。 ■

解 此积分可以通过划定并绕开分支切割后, 在复平面积分。也可以通过以下积分公式求得:

$$\int_0^{\infty} dx \sqrt{x} e^{\pm i x \xi \pm \epsilon x} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{(\mp \epsilon \mp i \xi)^{3/2}}$$

$$\int_0^{\infty} dx \sqrt{x} e^{i x \xi - \epsilon x} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{(\epsilon - i \xi)^{3/2}}$$

 **笔记** 以上积分技巧先引入 ϵ , 然后让 $\epsilon \rightarrow 0$ 。似乎等同于将 $\omega \rightarrow \omega + i\epsilon$ 。思考一下, 此代换与处理朗道阻尼效应的方式是否一致? ■

到此为止, 我们得到了单位长度在源粒子后方 z 处 ($z < 0$) 的测试粒子感受到的电阻壁纵向电场时域表示式。一般来说, 定义单位长度纵向尾场为 $W_{\parallel} \equiv -E_z/q_1$ 。后面将给出尾场的正式定义。对比一下上一节介绍的空间电荷场, $E_z \sim \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\gamma^2 \sigma_z^2} \log \frac{\gamma \sigma_z}{a} \propto 1/\gamma^2$, 可以发现, 当粒子能量越高时, 空间电荷场贡献越小, 但电阻壁尾场不变, 相对而言对束团的影响也就越大。

结束这一小节前, 回顾一下以上分析所采取的思路。尽管这里的电场已经是考虑了有限电导率金属管道的电场, 但这里的磁场仍是理想导体边界的磁场, 或者, 仍是无边界自由空间的磁场。对无边界自由空间, 磁场来源就是束团本身产生的。对有限电导率金属管道, 导体表面存在非零切向电场 E_z , 此电场为时变场, 随时间改变的时候就有位移电流 $J_D = \epsilon_0 \partial E_z / \partial t$, 就会贡献额外磁场。明显地, 只有当位移电流 \ll 束团电流时, 位移电流引起的磁场才能忽略, 以上分析才成立。以前大二电磁学课堂学过, 位移电流 $\partial/\partial t \leftrightarrow -i\omega$ 与频率成正比, 因此, 当尾场越高频时, 以上分析就越不适用。

现在, 应用以上结果, 考虑有一电荷量 Q 、rms 束长 σ_z 的一维纵向高斯束团 $\lambda(z)$, 当经过半径 b 金属真空管道时, 估算束团整体单位长度损失的能量。先改写源电荷 $q_1 \rightarrow$

$Q\lambda(z')dz'$, 则前面结果可写成

$$dE_z(z) = \frac{Q\lambda(z')dz'c}{4\pi^{3/2}b} \sqrt{\frac{Z_0}{\sigma}} |z|^{-3/2} H(-z) \quad (11.62)$$

其中, z' 为源粒子坐标。对测试粒子来说, 写为 z_2 , 任何在其前方的源粒子的贡献都需要加总, 则有

$$\begin{aligned} E_z(z_2) &= \frac{Qc}{4\pi^{3/2}b} \sqrt{\frac{Z_0}{\sigma}} \int_{z_2}^{\infty} d\zeta \lambda(\zeta) (\zeta - z_2)^{-3/2} \\ &= \frac{Qc}{2\pi^{3/2}b} \sqrt{\frac{Z_0}{\sigma}} \int_{z_2}^{\infty} d\zeta \lambda'(\zeta) (\zeta - z_2)^{-1/2} \end{aligned} \quad (11.63)$$

其中, 第二个等号采用分部积分 (integration by parts)¹⁵, $'$ 表示对 ζ 的一阶微分。对高斯分布束团 $\lambda(z) = (2\pi)^{-1/2} \sigma_z^{-1} e^{-z^2/2\sigma_z^2}$, 束团整体经过单位长度而损失的能量可以写为

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{ds} &= q \int_{-\infty}^{\infty} dz E_z(z) \lambda(z) \\ &= \frac{qQc}{2\pi^{3/2}b} \sqrt{\frac{Z_0}{\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \lambda(z) \int_z^{\infty} d\zeta \lambda'(\zeta) (\zeta - z)^{-1/2} \\ &= -\frac{qQc}{2^{5/2}\pi^2 b \sigma_z^{3/2}} \sqrt{\frac{Z_0}{\sigma}} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \end{aligned} \quad (11.64)$$

其中, 最后一步用到了如下积分公式

$$\int_0^{\infty} t^{1/2} e^{-t^2/4} dt = \sqrt{2} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \quad (11.65)$$

 **练习 11.12** 试着重复以上积分计算。 ■

 **笔记** 关于有限电导率圆柱金属真空管的尾场计算目前仍是活跃的课题, 如: 考虑非极端相对论粒子、非圆柱金属管壁等情况的尾场、阻抗计算。更完整、全面的分析此处不论, 感兴趣的读者可以参考相关文献。

 **笔记** 以上讨论的电阻壁分析是基于极端相对论粒子 $\gamma \rightarrow \infty$ 或 $v \approx c$ 。对非极端相对论粒子或低能粒子束团, 尾场的贡献同时包含了电阻壁尾场与空间电荷场, 电阻壁电磁场分析变得更复杂。感兴趣的读者可参考 Frank Zimmermann and Katsunobu Oide, Resistive-wall wake and impedance for nonultrarelativistic beams, Phys. Rev. ST Accel. Beams **7**, 044201 (2004). <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.7.044201> 或 Gennady Stupakov, Resistive-wall wake for nonrelativistic beams revisited, Phys. Rev. Accel. Beams **23**, 094401 (2020). <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevAccelBeams.23.094401>

¹⁵用到以下微分

$$\frac{1}{(\zeta - z_2)^{3/2}} = -2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{(\zeta - z_2)^{1/2}}$$

细心的读者会发现, 这里分部积分后会跑出一项

$$\frac{\lambda(\zeta)}{(\zeta - z_2)^{1/2}} \Bigg|_{\zeta=z_2}^{z=\infty}$$

代入下限后, 会出现发散情况。一般针对此种尴尬情况的做法是: 丢掉这个极点。但是, 需要检验一下 E_z 是否满足 $\int_{-\infty}^0 E_z(z_2) dz_2 = 0$ 。如果此积分条件满足, 则可丢掉此极点。

/PhysRevAccelBeams.23.094401



笔记 以上讨论的电阻壁分析是基于寻常趋肤效应 (normal skin effect, NSE)。在 §1.3 曾提到过反常趋肤效应 (anomalous skin effect, ASE)，对应到当金属中的电子平均自由程 (mean free path) 比上面计算的趋肤深度大时的情况。一般来说，反常趋肤效应主要发生在高频率、低温时，或当金属导体厚度与上面计算的趋肤深度相当时。细节此处不论，关于考虑反常趋肤效应的电阻壁分析，可参考 B. Podobedov, Resistive wall wakefields in the extreme anomalous skin effect regime, Phys. Rev. ST Accel. Beams **12**, 044401 (2009). <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.12.044401>、G. Stupakov, K.L.F. Bane, P. Emma, and B. Podobedov, Resistive wall wakefields of short bunches at cryogenic temperatures, Phys. Rev. ST Accel. Beams **18**, 034402 (2015). <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.18.034402>。



笔记 电阻壁效应对束团的影响可能体现在：单束团头尾不稳定性、多束团不稳定性、横向 betatron tune 偏移等。

11.3.1 电阻壁阻抗尾场计算的实用公式

单侧傅里叶变换 假设

$$\lambda = \sqrt{\frac{Z_0 \sigma |k|}{2}} [i + \text{sgn}(k)] \quad (11.66)$$

给定阻抗函数，采用逆傅里叶变换

$$f(z \leq 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikz} dk \quad (11.67)$$

计算尾场函数时，可能涉及的一些傅里叶变换公式整理如下¹⁶：

$\tilde{f}(k)$	$f(z)(z < 0)$
$\frac{1}{k}$	$-i$
$\frac{1}{k^2}$	z
$\frac{1}{k^{n+1}}$	$-\frac{i}{n!} (iz)^n$
$\frac{\lambda}{k^2}$	$-4i \sqrt{\frac{Z_0 \sigma}{4\pi}} z ^{1/2}$
$\frac{\lambda}{k^3}$	$-\frac{8}{3} \sqrt{\frac{Z_0 \sigma}{4\pi}} z ^{3/2}$
$\frac{1}{\lambda}$	$-\frac{i}{2\pi} \sqrt{\frac{4\pi}{Z_0 \sigma}} z ^{-1/2}$
$\frac{k}{\lambda}$	$-\frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{4\pi}{Z_0 \sigma}} z ^{-3/2}$
$\frac{k^2}{\lambda}$	$\frac{3i}{8\pi} \sqrt{\frac{4\pi}{Z_0 \sigma}} z ^{-5/2}$
$e^{i\alpha\lambda} (\alpha > 0)$	$\sqrt{\frac{Z_0 \sigma}{4\pi}} \alpha z ^{-3/2} e^{-\pi \frac{Z_0 \sigma \alpha^2}{4\pi z }}$

¹⁶此处 $\lambda = i\zeta\sigma$ ，其中， ζ 为 Leontovich 边界条件系数。留意，表格里的 λ 不是波长，而是包含 k 的函数依存关系。此外，这不是单纯的傅里叶变换，而是考虑了因果律的傅里叶变换。公式修改自 Alexander Wu Chao, Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators, John Wiley & Sons (1993) 一书 p.45。A.W. Chao 一书采用 CGS 单位制。

两个特殊积分 分析电阻壁导致的能量损失时，可能涉及如下形式的积分

$$\int_0^{\infty} e^{-a\omega^2+i\omega y} \sqrt{\omega} d\omega \quad (11.68)$$

其中， $a > 0, \pm y > 0$ 。此积分结果涉及第一类修正贝塞尔函数 \mathcal{I} 。计算此积分一般从如下积分公式开始

$$\int_0^{\infty} e^{-a\omega^2+i\omega y} \frac{d\omega}{\sqrt{\omega}} = \frac{\pi\sqrt{|y|}}{\sqrt{8a}} [\mathcal{I}_{-1/4}(b) \pm i\mathcal{I}_{1/4}(b)] e^{-b} \quad (11.69)$$

其中， $b = y^2/8a$ 。等式两边同时对 y 微分一次，留意 b 中包含 y ，有

$$\int_0^{\infty} e^{-a\omega^2+i\omega y} \sqrt{\omega} d\omega = \frac{\pi y \sqrt{|y|}}{4a\sqrt{8a}} \{ \mathcal{I}_{-3/4}(b) - \mathcal{I}_{1/4}(b) \pm i [\mathcal{I}_{-1/4}(b) - \mathcal{I}_{3/4}(b)] \} e^{-b} \quad (11.70)$$

其中，

$$\mathcal{I}'_{\nu}(b) = \mathcal{I}_{\nu+1}(b) + \frac{\nu}{b}\mathcal{I}_{\nu}(b) = \mathcal{I}_{\nu-1}(b) - \frac{\nu}{b}\mathcal{I}_{\nu}(b) \quad (11.71)$$

此外，分析可能也涉及以上积分结果的再一次积分，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\mathcal{I}_{-3/4}\left(\frac{u^2}{4}\right) - \mathcal{I}_{1/4}\left(\frac{u^2}{4}\right) \right] e^{-\frac{3u^2}{4}} |u|^{3/2} du = \frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\sqrt{2\pi}} \quad (11.72)$$

计算此积分用到了以下公式

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \mathcal{I}_{\nu}(bx) x^{\nu} dx = \frac{(2b)^{\nu} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} (a^2 - b^2)^{\nu+1/2}} \quad (11.73)$$

及其对 a 的一次微分

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \mathcal{I}_{\nu}(bx) x^{\nu+1} dx = \frac{2a(2b)^{\nu} \Gamma(\nu + \frac{3}{2})}{\sqrt{\pi} (a^2 - b^2)^{\nu+3/2}} \quad (11.74)$$



笔记 关于以上两个特殊积分的更多讨论，可参考 A. Piwinski, Wake fields and Ohmic losses in flat vacuum chambers, DESY HERA 92-04 (1992). <https://cds.cern.ch/record/234999/files/DESY-92-04.pdf>。

11.3.2 浅谈：金属管壁的电导率、反常趋肤效应与表面阻抗

回忆一下，在 §1.3 介绍趋肤效应时，对良导体而言，有限电导率 $\sigma < \infty$ 的事实，结合电磁感应现象，就有趋肤效应（又称集肤效应），即当电磁波打在金属良导体表面时，在表面引致的电流分布呈现集中在导体表面的趋势，沿导体纵深方向逐渐衰减的现象。还记得，当时介绍趋肤效应时，我们只把导体的电导率当作一常数。较令人满意的金属导体模型需要结合量子力学与统计力学才能完整描述。现在，我们试着给出基于经典电磁场理论构造物质电导率的理论模型，称 Drude 模型 (Drude model)。尽管非基于第一原理的模型，但在结合部分实验量测参数后，仍能够给出关于直流电导率 (DC conductivity) 的表示式与其修正的交流电导率 (AC conductivity) 表示式。

Drude 模型由德国物理学家 P. Drude 在 1900 年提出，又称 Drude-Lorentz 模型。该模型描述电子在金属导体中的传输特性，是分子运动论的一个应用，假设电子在金属导体中的运动可通过经典力学方法处理，很像一个弹珠台，其中电子不断在较重的、相对

固定的正离子之间来回反弹，参考图 11.8。尽管电子每次经历不尽相同的时间后与离子产生碰撞，假设其平均时间为 τ ，或者换句话说，碰撞频率为 $1/\tau$ ，则根据洛伦兹力方程，在平均时间 τ 的尺度里，有

$$\frac{d\langle \mathbf{p}(t) \rangle}{dt} = q\mathbf{E} - \frac{\langle \mathbf{p}(t) \rangle}{\tau} \quad (11.75)$$

其中， $\mathbf{p}(t) = m\mathbf{v}$ 为电子动量， $q = -e < 0$ 为电子电荷。此处洛伦兹力省略了 $\frac{\langle \mathbf{p}(t) \rangle}{m} \times \mathbf{B}$ 项，假设外部场为电场主导。此外，这里先假设外部电场为静电场。

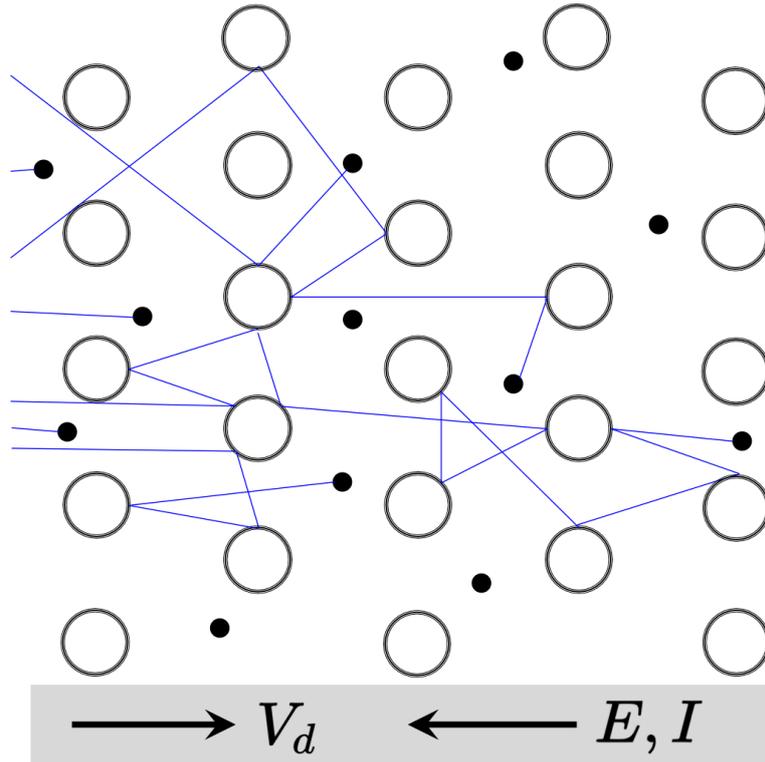


图 11.8: Drude 模型。其中，黑色点为电子，空心球为 (正) 离子， V_d 为漂移速度， \mathbf{E}, I 为电场与电流方向。图例修改自 https://en.wikipedia.org/wiki/Drude_model。

考虑多次反弹碰撞的平均图景，电子向前面反弹的机会将与向后面反弹的机会相等，因此，在与上一次碰撞之后的这段期间，对电子动量的之前的贡献都可以忽略，此次碰撞后，电子获得的动量有

$$\langle \mathbf{p} \rangle = q\mathbf{E}\tau \quad (11.76)$$

电子在金属导体里的运动一般为低速、非相对论情况¹⁷，因此，将上式与 $\langle \mathbf{p} \rangle = m\langle \mathbf{v} \rangle$ 关联，再利用 $\mathbf{J} = nq\langle \mathbf{v} \rangle = nq\langle \mathbf{p} \rangle/m$ ，其中 n 为电子体密度，则有

$$\mathbf{J} = \left(\frac{nq^2\tau}{m} \right) \mathbf{E} \quad (11.77)$$

其中， \mathbf{J} 与 \mathbf{E} 的比值即为电导率 σ ，写为

$$\sigma \equiv \frac{nq^2\tau}{m} \quad (11.78)$$

¹⁷比如，一般在铜金属中，有 $v \sim 10^{-3}$ m/s。

此电导率 σ 又称 DC 电导率，有时为了区别以下即将介绍的 AC 电导率，将这里的 σ 写为 σ_0 。

对时变电场，按类似分析，省略了磁场项，假设外部场为电场主导。忽略磁场的前提现在多了一个条件，即时变电场感应导致的磁场不能太大，即频率不能太高。采用时谐形式

$$\mathbf{p}(t) = \text{Re}(\tilde{\mathbf{p}}(\omega)e^{-i\omega t}), \quad \mathbf{E}(t) = \text{Re}(\tilde{\mathbf{E}}(\omega)e^{-i\omega t}), \quad \mathbf{J}(t) = \text{Re}(\tilde{\mathbf{J}}(\omega)e^{-i\omega t}) \quad (11.79)$$

则洛伦兹力方程有

$$\frac{d\langle \mathbf{p}(t) \rangle}{dt} = q\mathbf{E} - \frac{\langle \mathbf{p}(t) \rangle}{\tau} \Rightarrow -i\omega\langle \tilde{\mathbf{p}}(\omega) \rangle = q\tilde{\mathbf{E}}(\omega) - \frac{\langle \tilde{\mathbf{p}}(\omega) \rangle}{\tau} \quad (11.80)$$

其中，关联欧姆定律与电流密度的定义，有

$$\tilde{\mathbf{J}}(\omega) = \sigma(\omega)\tilde{\mathbf{E}}(\omega), \quad \tilde{\mathbf{J}}(\omega) = nq\frac{\langle \tilde{\mathbf{p}}(\omega) \rangle}{m} \quad (11.81)$$

则可得 AC 电导率

$$\begin{aligned} \sigma(\omega) &= \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau} \\ &= \frac{\sigma_0}{1 + \omega^2\tau^2} + i\omega\tau\frac{\sigma_0}{1 + \omega^2\tau^2} \end{aligned} \quad (11.82)$$

其中，当 $\omega = 0$ 时， $\sigma(\omega) = \sigma_0$ 。

既然给出了 AC 电导率，我们就能给出 DC 电导率的适用范围。由上式可看出，当分母的 $\omega\tau \ll 1$ 时，即电磁波频率远低于金属内电子-离子碰撞频率 $1/\tau$ 时，换句话说，外部电场场振荡时间长于电子-离子碰撞时间，此时尽管外部电场为时变场，我们仍可采用 DC 电导率。这是为什么以前在大学电磁学课堂介绍电导率时可直接视为常数而与频率无关。给个实际例子：对铜， $\sigma_0 = 5.9 \times 10^7 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ 、 $n = 8.5 \times 10^{28} \text{m}^{-3}$ ，于是， $\tau^{-1} = 41.5 \text{THz}$ 或 $\tau \sim 25 \text{fs}$ 。因此，对铜金属而言，当打在铜上的电磁波频率远低于 40THz 时，分析采用 DC 电导率模型即足够。

到此为止，我们得到了 DC 电导率与 AC 电导率，总结如下：

定理 11.7. 电导率的 Drude 模型

又称 Drude-Lorentz 模型。按经典力学描述，有 DC 电导率模型

$$\sigma_0 \equiv \frac{nq^2\tau}{m} = \frac{\omega_p^2\tau}{Z_0c} \quad (11.83)$$

其中， $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$ 为等离子体频率（参考 §1.3）， $Z_0 \approx 377 \Omega$ 为自由空间阻抗。与 AC 电导率模型

$$\begin{aligned} \sigma(\omega) &= \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau} \\ &= \frac{\sigma_0}{1 + \omega^2\tau^2} + i\omega\tau\frac{\sigma_0}{1 + \omega^2\tau^2} \end{aligned} \quad (11.84)$$

其中，虚数部分表示金属中的电子运动形成的等效电流 落后 于电场，这是由于电

子无法立即响应，而需要大约 τ 时间来对外部电场的变化作出响应。这里的 Drude 模型是应用于电子的；后来发现它既可以应用于电子，也可以应用于空穴（即半导体中的正电荷载子）。但并不是说 Drude 模型能预言它们的存在性。

注 DC 电导率适用范围一般限制在频率 2 THz 以下。当频率高于 2 THz 之后，采用 AC 电导率，同时留意 Drude 模型给出的电导率的准确性开始降低。

注 Drude 模型并不对所有金属的电导率都与实验量测结果符合得很好，只有部分金属、在部分频率区间符合较好，这是因为在其它频率区间出现 Drude 模型没有考虑到的物理效应，如：金属的能带结构。更多讨论可参考 M. Dressel and M. Scheffler, Verifying the Drude response, *Ann. Phys. (Leipzig)* **15**, 535-544 (2006). <https://doi.org/10.1002/andp.200651807-810>.

注 更全面讨论关于物质特性的理论，有自由电子气体模型 (free-electron gas model)。更完整的分析则需要考虑量子力学与统计力学，可参考固体物理教科书，此处不论。



笔记 当这里的金属换成等离子体时，按类似的分析将能得到等离子体的等效介电系数或等效折射率，细节此处不论。

由上讨论知，DC 电导率模型一般适用于当电磁波频率不高于 2 THz 时。当电磁波频率再高时，就要采用 AC 电导率模型。但即使介绍 AC 电导率模型时，上面的分析仍省略了磁场贡献，即频率不能无止尽高。当频率再高时，电磁波看到的金属就不再是金属，而像是等离子体，此时，等离子体内的电子振荡频率不再跟得上外部超快振荡的电场，而是由离子体频率 $\omega_p \sim 10^{16}$ rad/s 量化，大约在 UV 区间。

回到阻抗尾场分析，上面电阻壁分析基于 DC 电导率模型。当频率范围不适用于 DC 电导率模型时，应适当推广至 AC 电导率模型。可以想像，由于 AC 电导率中含有额外的频率依存关系，因此其尾场函数的特征长度将跟着改变。

以上基于 Drude 的电导率模型中， τ 为相邻两次碰撞时间。根据这个物理量，在两次碰撞间内，有对应的电子的平均自由径 (mean free path)，定义如下：

定义 11.6. 平均自由程 ℓ

或称平均自由径 (mean free path)，指粒子 (可以是原子、分子、电子、光子等) 在材料中与材料内的其它相对静止的粒子碰撞时，相邻两次碰撞之间的时间内经过的路程的统计平均值。平均自由程的大小与粒子所处材料参数有关，定义为

$$\ell = \frac{1}{nA_{\perp}} \quad (11.85)$$

其中, n 为材料内相对静止的粒子的体密度, A_{\perp} 为粒子相互碰撞过程的有效截面积。

定律 11.2. 比尔-朗伯定律 (Beer-Lambert law)

粒子束轰击材料时, 束团强度 (如粒子数、单位面积粒子数等, 无特定量纲限制) 随穿透深度指数衰减, 有

$$I = I_0 e^{-x/\ell} \quad (11.86)$$

其中, ℓ 为平均自由程。或者, 一个等价的定义, 即穿透系数 T 有

$$T = \frac{I}{I_0} = e^{-x/\ell} \quad (11.87)$$

以上定义基于现象学描述, 对应的微分方程有

$$\frac{dI}{dx} = -nA_{\perp}I = -\frac{I}{\ell} \quad (11.88)$$

注 一般在室温情况下, 金属中的电子的平均自由程 $\ell \sim 100 \text{ \AA}$, 大约是几十个原子半径。在低温情况下, 当金属纯度较高时, 甚至有 $\ell \sim \text{cm}$ 。以上为现象学定义, 如果对材料特性更进一步量化, 则可以通过费米速率量化平均自由程, 有 $\ell = \tau v_F$, 其中, v_F 为费米速率 (参考如下定义)。

定义 11.7. 费米速率 v_F

费米速率 (Fermi velocity) v_F 可与电子平均自由径 ℓ 相互关联, 有

$$v_F = \frac{\ell}{\tau} \quad (11.89)$$

其中, τ 为相邻两次碰撞 (平均) 时间, 费米速率 v_F 表征物质中在费米能级 (Fermi level, 写为 E_F 或 μ) 以上的电子的速率。在能带理论中, 费米能级定义为在达热平衡时, 找到电子的概率为 $\frac{1}{2}$ 的假想能级。

注 费米能级为假想能级, 不需要对应到真正存在的能级, 在任何温度皆有定义。

笔记 更多讨论可参考固体物理教科书, 此处不论。

性质 11.2. 铝、铜金属的一些特性参数

如下表:

	Al(铝)	Cu(铜)	单位
n	18	8.5	10^{28} m^{-3}
v_F	2.0	1.6	10^6 m/s
ω_p	2.4	1.7	10^{16} rad/s
ℓ/σ_0	4.0	6.6	$10^{-16} \text{ \Omega m}^2$

室温情况下，铝、铜、不锈钢金属电导率有 (SI/MKS 单位制)

$$\sigma_0 = \begin{cases} 3.5 \times 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}, & \text{铝 (aluminum)} \\ 5.9 \times 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}, & \text{铜 (copper)} \\ 1.4 \times 10^6 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}, & \text{不锈钢 (stainless steel)} \end{cases}$$

其它材料特性参数可参考 C. Kittel, Introduction to Solid State Physics, 8th ed., John Wiley & Sons (2005) 或 Ashcroft and Mermin, Solid State Physics, Cengage Learning (1976) 一书的 Chapter 1。 □

上面介绍了 DC 电导率 σ_0 与 AC 电导率 $\sigma(\omega)$ 用来表征外部电场与金属表面电流密度的响应关系后，这里介绍一下“反常趋肤效应”(anomalous skin effect, ASE)，此效应发生在电子平均自由径 ℓ 长于考虑金属表面的寻常趋肤效应 (normal skin effect, NSE) 所对应的趋肤深度 $\delta_{\text{NSE}}(\omega)$ 时。当电子在金属中的平均自由路程比寻常趋肤长度大时，意味着金属中的电子流较难在金属表层附近流动，也就表征此时金属管壁的阻抗将增加。对应实际情况，此效应容易发生在极高频电磁波或金属处于低温环境下。

回忆一下，在 §1.3 介绍过 Leontovich 边界条件，用来关联有限电导率 σ 的金属导体边界上的电场、磁场，有

$$\tilde{\mathbf{E}}_t = \zeta(\omega) \tilde{\mathbf{H}}_t \times \mathbf{n} \quad (11.90)$$

其中，

- \mathbf{n} 为理想介质指向导体的单位向量
- $\zeta(\omega) = -\frac{ik}{\sigma} = [1 - i \operatorname{sgn}(\omega)] \sqrt{\frac{Z_0 |\omega|}{2c\sigma}}$ 称表面阻抗 (surface impedance)¹⁸
- $\operatorname{sgn}(\omega)$ 为符号函数 (sign function)，根据宗量正负，取值分别为 ± 1

以上结果适用于 DC 与 AC 电导率，即 σ 可以是常数 σ_0 或 $\sigma(\omega)$ ，但仍假设寻常趋肤效应。

对反常趋肤效应，以上结果需要推广。以下略去推导，仅给出结果：

定理 11.8. 电磁场分界面边界条件：有限电导率、考虑反常趋肤效应情况
在包含分界面上与导体侧内，切向电场与切向磁场满足以下边界条件

$$\tilde{\mathbf{E}}_t = \zeta(\omega) \tilde{\mathbf{H}}_t \times \mathbf{n} \quad (11.91)$$

其中，

- \mathbf{n} 为理想介质指向导体的单位向量

¹⁸表面阻抗与表面电阻都是频率的函数，区别在于阻抗为复数，包含实部与虚部。更一般性的定义为表面阻抗。

- $\zeta(\omega)$ 称表面阻抗 (surface impedance)^a, 有

$$\zeta(\omega) = iZ_0 \frac{\omega \ell}{cF(\omega)} \quad \text{SI 单位: Ohm} \quad (11.92)$$

其中, ℓ 为电子平均自由径, 一般给定。上式中的其它参量有

$$F(\omega) = \frac{\psi}{\pi} \int_0^\infty \ln \left[1 + \frac{\kappa + \xi \chi(t)}{t^2} \right] dt \quad (11.93)$$

$$\psi = 1 + i\omega\tau, \quad \tau = \frac{\ell}{v_F}, \quad \kappa = -\frac{\omega^2 \ell^2}{c^2 \psi^2}, \quad \xi = i\frac{\alpha}{\psi^3} \quad (11.94)$$

$$\chi(t) = \frac{2 \left[(1+t^2) \tan^{-1}(t) - t \right]}{t^3}, \quad \alpha = \frac{3}{2} \left(\frac{\ell}{\delta_{\text{NSE}}} \right)^2 \quad (11.95)$$

$$\delta_{\text{NSE}} = \sqrt{\frac{2c}{Z_0 \sigma_0 \omega}} \quad (11.96)$$

其中, DC 电导率 σ_0 有

$$\sigma_0 = \frac{ne^2 \ell}{mv_F} = \frac{\omega_p^2 \ell}{Z_0 cv_F} \quad (11.97)$$

以上参数中, 很多时候 κ 很小而可忽略不计。在 4 K 低温环境下, 考虑反常趋肤效应的铜与铝的表面阻抗如图 11.9 给出。可以看到, 相对低频情况下, 铝的表面阻抗比铜大 (符合直观预期); 当频率高于 10 GHz 时, 铝的表面阻抗开始变得比铜小。

注 当 $|\xi| \ll 1$ 时, 以上结果退化为寻常趋肤效应 (normal skin effect)。当 $|\xi| \gg 1$ 时, 称极端反常趋肤效应 (extreme anomalous skin effect, EASE)。此时, 表面阻抗与环境温度、电磁场频率无关。

注 关于反常趋肤效应的理论推导, 可参考 R.B. Dingle, The anomalous skin effect and the reflectivity of metals I, *Physica* **19**, 311-347 (1953). [https://doi.org/10.1016/S0031-8914\(53\)80035-2](https://doi.org/10.1016/S0031-8914(53)80035-2) 与 G.E.H. Reuter and E.H. Sondheimer, The theory of the anomalous skin effect in metals, *Proc. R. Soc. Lond. A* **195**, 336-364 (1948). <https://doi.org/10.1098/rspa.1948.0123>。

注 以上边界条件为 SI/MKS 单位制表示。

^a表面阻抗与表面电阻都是频率的函数, 区别在于阻抗为复数, 包含实部与虚部。更一般性的定义为表面阻抗。

定义 11.8. 残余电阻比 Residual Resistance Ratio (RRR)

定义为低温时电导率与室温 (20° C = 293 K) 电导率的比值, 有

$$\text{RRR} \equiv \frac{\sigma_0(4 \text{ K})}{\sigma_0(293 \text{ K})} \quad (11.98)$$

在粒子加速器低温 (cryogenic) 真空管道环境, 一般假设 $\text{RRR} = 100$ 。

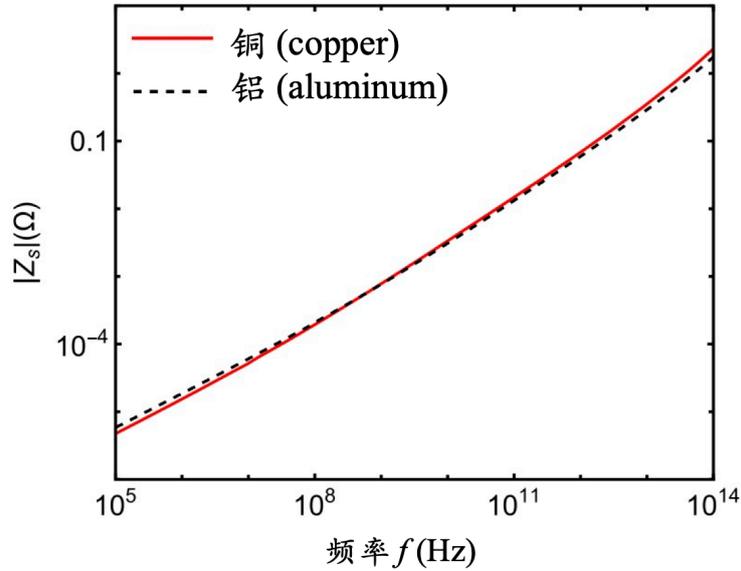


图 11.9: 低温情况下, 考虑反常趋肤效应的铜与铝的表面阻抗。假设 $RRR = 100$ 。图例取自 K. Fujita, PRAB 25, 064601 (2022)。

笔记 以铜为例, 在低温环境下, DC 电导率与室温 DC 值相比可增加 100 倍。在微波频段, 同样在室温条件下, AC 电导率与 DC 值相比则增加约 6 倍。

练习 11.13 通过数值积分, 重复图 11.9 的结果。

练习 11.14 证明当考虑寻常趋肤效应时, 以上定理能退化为 Leontovich 边界条件。

解 参考 G. Stupakov, PRST-AB 18, 034402 (2015)。

结束这一小节讨论前, 这里给出考虑反常趋肤效应时的电阻壁阻抗公式。关于阻抗函数与尾场函数, 将在后面 §11.5、§11.6 介绍。

定理 11.9. 考虑反常趋肤效应的电阻壁阻抗公式

对圆柱对称金属管壁, 单位长度 电阻壁纵向阻抗有

$$Z_{\parallel}(\omega) = -\frac{Z_0}{2\pi b} \frac{1}{\frac{Z_0}{\zeta(\omega)} + i\frac{\omega b}{2c}} \quad (11.99)$$

其中, b 为金属真空管道 (内) 半径, $\zeta(\omega)$ 为表面阻抗, 如上定理给出。对应的 单位长度 电阻壁横向阻抗有

$$Z_{\perp}(\omega) = \frac{2c}{b^2\omega} Z_{\parallel}(\omega) \quad (11.100)$$

关于横纵向阻抗函数的讨论, 可参考 §11.7.2。

对平行板金属管壁，单位长度电阻壁纵向阻抗有

$$Z_{\parallel}(\omega) = -\frac{Z_0}{\pi h} \int_0^{\infty} \frac{du}{\cosh(u)} \frac{1}{\frac{\cosh(u)}{\zeta(\omega)/Z_0} + i\frac{\omega h}{2cu} \sinh(u)} \quad (11.101)$$

其中， h 为平行板间距(全高)， $\zeta(\omega)$ 为表面阻抗，如上定理给出。 □

 **笔记** 考虑反常趋肤效应的电阻壁阻抗情况常见于超导波荡器的阻抗分析。更多讨论可参考 K. Fujita, Impedance computation of cryogenic vacuum chambers using boundary element method, Phys. Rev. Accel. Beams **25**, 064601 (2022). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevAccelBeams.25.064601> 与 G. Stupakov et al., Resistive wall wakefields of short bunches at cryogenic temperatures, Phys. Rev. ST Accel. Beams **18**, 034402 (2015). <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.18.034402>.

 **笔记** 细心的读者可能会有疑问：超导波荡器中的磁场强度约 1 ~ 3 Tesla，前面分析反常趋肤效应时假设电场主导而忽略磁场效应，磁场效应贡献多少？当存在外加磁场时，金属内电子运动轨迹将呈现螺旋拉莫尔进动 (Larmor precession)。可以预期，只要 Larmor 半径尺度比电磁波透入金属的深度长，即在透入深度尺度内没有明显的磁场导致的进动，则磁场效应的贡献就不明显而可忽略。经过估算，几个 Tesla 的磁场强度不足以导致反常趋肤效应有明显的磁场贡献。

11.3.3 浅谈：同步加速器的金属真空管样貌

这一节介绍电阻壁尾场计算时，为了简化分析，我们假设了一个非常理想的几何构型：圆柱对称且光滑的结构。在同步辐射加速器储存环中，金属真空管样貌如图 11.10 给出。接近真实的金属真空管不再是圆柱对称或规整的矩形截面，而是存在不均匀的过渡结构。这些改变源于工程实际，比如：

- 管道横向截面的水平尺寸大于垂直尺寸，其中，横向垂直方向尺寸的决定大抵与束团横向垂直尺寸有关，至少要具备充裕空间容纳垂直方向的束团尺寸。
- 除了束团真空室 (beam chamber) 外，外侧还有真空室前室 (antechamber)，主要是引导束团产生的辐射场。如果没有适当引导，则产生的辐射场可能引起束流不稳定性。
- 金属真空管壁一般基底材料为不锈钢 (stainless steel)，表面加以一层约 0.1 mm 厚的铜作为涂层以减小电阻壁阻抗。
- 一般在金属真空管道中会安装许多光子吸收器 (photon absorber)，用来吸收不想用到的辐射光，并准直引出想要的辐射光到下游实验站。光子吸收器的结构与安装位置需虑多种因素，如：同步辐射的功率分布、吸收体的材料、机械结构、引出位置、吸收体范围等，此外，吸收器吸收光子后将发热，因此，有效冷却不可忽略。

更准确的计算电阻壁尾场或阻抗自然无法通过解析方法，而需要借助数值模拟，一

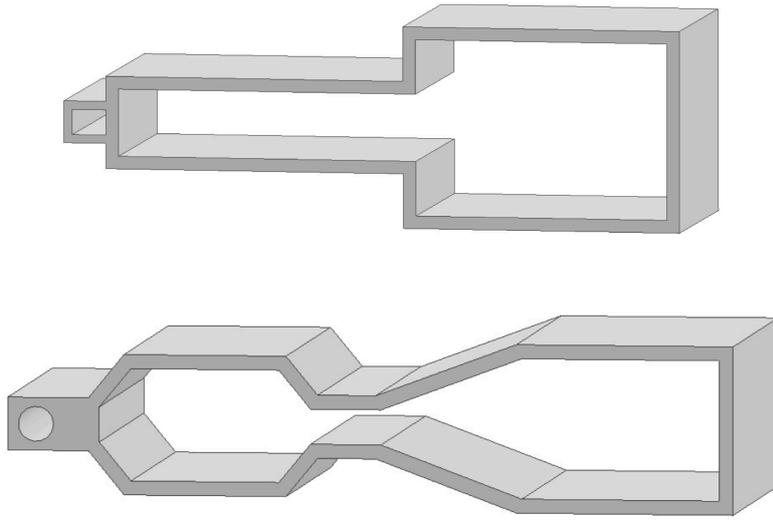


图 11.10: 同步辐射加速器中的金属真空管样貌：两图右侧腔室为束团经过的束团真空室 (beam chamber)。上图为储存环中直线插入节截面，下图为储存环中的弯转段截面。上图中的前室 (antechamber) 比下图高些，使允许/容纳直线插入节上游的弯转段产生的同步辐射场。

一般采用有限元法，细节此处不论。

11.4 圆柱谐振腔的电磁场计算

对应“三无”定理的第 3 种不完美情况，仍假设满足 1、2 的完美情况，即粒子速度 $v = c$ 、真空管壁为理想导体 $\sigma = \infty$ 。尽管假设腔壁为理想导体，并不表示所有谐振腔中的电磁场能量都被完美局限在结构里，将有一部分能量不可避免地通过谐振腔的开孔¹⁹“泄漏”到金属真空管道 (beam pipe)。因此，§1.13 介绍过的谐振腔品质因数 Q 值仍是有限大的。可以预见，会从谐振腔结构泄漏出去的场对应的是“高于”beam pipe 截止频率²⁰的场。

考虑源粒子以 $v = c$ 速度经过半径 R 、长度 L 的圆柱截面开口谐振腔 (open resonator 或 open cavity)，如图 11.11。进到谐振腔入口前，在金属真空管道中伴随在粒子附近的是像松饼一样的平面库仑场。从真空管道进入口径较大的谐振腔时，为了满足不平滑连接处管壁的边界条件，电场线必须扭曲。从远处看，就像点波源散开来 (衍射)。在谐振腔中，尾场最初先衍射，直到粒子从另一个开口即将离开谐振腔时，伴随在粒子附近的库仑场会在腔壁不平滑处反射。源粒子在入口、出口附近被“刮除”的库仑场在腔壁间往返形成驻波后，将在谐振腔中残留一段时间，然后被后面进到腔体的测试粒子看见。

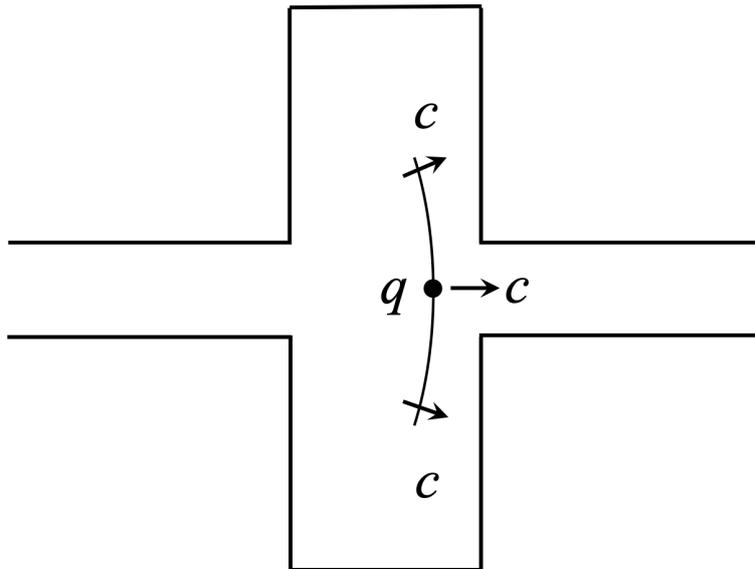


图 11.11: 源粒子以 $v = c$ 速度经过半径 R 、长度 L 的圆柱截面开口谐振腔，产生的尾场波前如图。图例修改自 Wolski 一书。

现在，更定量些，我们希望求解源粒子经过谐振腔后，留下来的电场怎么算？这里提供一种思路，但不是唯一的思路：

- 首先，源粒子在进到谐振腔前，伴随在粒子附近的场就像空间电荷场一样

$$E_{\rho}(\rho, z = s - ct) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{\rho} \delta(s - ct) \quad (11.102)$$

- 再来，当粒子进入谐振腔后，可以预期，电场形将“扭曲”。这个扭曲怎么描述？这

¹⁹这是基于工程实际考虑：不开孔的话，粒子束无法进出。此外，谐振腔一般还需要激励与调谐，部分电磁场也可能从其中泄漏出去。

²⁰回忆一下第 1 章在 §1.12 介绍的截止频率的概念。

里我们采用基底展开，背后想法是“以不变应万变”。只要基底选得好，场再怎么扭曲，以良好、完备基底展开后的系数总是能决定的。那么良好、完备的基底函数哪里找？既然这是标准的谐振腔结构，就可以套用 §1.13 介绍过的谐振腔模式解。带电粒子本身沿 s 运动即存在纵向电场，因此选择 TM 模较为合适。

- 最后，我们主要关心的是沿轴 ($x = 0, y = 0, s$) 上，源粒子给后方测试粒子的尾场形式。因此，可以将解得的 (以谐振腔模式展开的) 电场代入 $(\rho, \phi, s) = (0, 0, s)$ ，就得到谐振腔的纵向尾场。

回顾 §1.13，将圆柱型 TM 模谐振腔的基底函数总结如下：

定理 11.10. Pillbox 谐振腔 TM 模的场形与特性

假设谐振腔圆柱半径为 R ，长 L 。对 TM_{mnl} ，

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}_z(\rho, \phi, s) = E_0 \mathcal{J}_m \left(j_{m,n} \frac{\rho}{R} \right) \cos \left(\frac{\ell \pi s}{L} \right) e^{-im\phi} \\ \tilde{B}_z(\rho, \phi, s) = 0 \\ \tilde{E}_\rho(\rho, \phi, s) = -E_0 \frac{\ell \pi R}{L j_{m,n}} \mathcal{J}'_m \left(j_{m,n} \frac{\rho}{R} \right) \sin \left(\frac{\ell \pi s}{L} \right) e^{-im\phi} \\ \tilde{E}_\phi(\rho, \phi, s) = -E_0 \frac{im \ell \pi R^2}{L \rho j_{m,n}^2} \mathcal{J}_m \left(j_{m,n} \frac{\rho}{R} \right) \sin \left(\frac{\ell \pi s}{L} \right) e^{-im\phi} \\ \tilde{B}_\rho(\rho, \phi, s) = E_0 \frac{m \omega R^2}{c^2 \rho j_{m,n}^2} \mathcal{J}_m \left(j_{m,n} \frac{\rho}{R} \right) \cos \left(\frac{\ell \pi s}{L} \right) e^{-im\phi} \\ \tilde{B}_\phi(\rho, \phi, s) = E_0 \frac{i \omega R}{c^2 j_{m,n}} \mathcal{J}'_m \left(j_{m,n} \frac{\rho}{R} \right) \cos \left(\frac{\ell \pi s}{L} \right) e^{-im\phi} \end{array} \right. \quad (11.103)$$

转换到时域瞬时量，可利用 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \right]$ ， $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \right]$ ，其中，谐振频率

$$\frac{\omega}{c} = \frac{\omega_{mnl}}{c} = \pm \left[\left(\frac{\ell \pi}{L} \right)^2 + \frac{j_{m,n}^2}{R^2} \right]^{1/2} \quad (11.104)$$

其中， $j_{m,n}$ 为第 m 阶贝塞尔函数 \mathcal{J}_m 的第 n 个根，即， $\mathcal{J}_m(j_{m,n}) = 0$ 。对 TM_{mnl} ，下标要求 $m = 0, 1, 2, \dots$ 、 $n = 1, 2, 3, \dots$ 、 $\ell = 0, 1, 2, \dots$ 。

注 此处假设谐振腔的两侧金属挡板位置为 $s = 0$ 与 $s = L$ 。 □

前面提到，当粒子进入谐振腔后，可以预期，电场线将“扭曲”。与空间电荷场相比，相对于源粒子，此扭曲的电场一定程度上会“滞后”。如果谐振腔长度为 L ，不妨假设在谐振腔里的场在还未经历腔壁来回反射之前，其初始样貌存在 $L/2$ 的滞后²¹，有

$$E_\rho = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\rho} \delta_d \left(s - ct + \frac{L}{2} \right) \quad (11.105)$$

²¹参考图 11.11，可以想像当源粒子离开谐振腔时，稍早时刻产生的电场的两侧波前会稍微滞后，滞后的距离大致估算为 $L/2$ 。此结果也可以从图 11.12 右排上方看出。

其中, Dirac delta 函数 δ_d 的下标 d 表示其宗量里包含滞后项。

现在, 我们想将 $\text{TM}_{mn\ell}$ 模谐振腔的 $E_\rho(\rho, \phi, z)$ 解作为基底, 将以上 $\frac{1}{\rho}$ 函数与滞后的 δ_d 函数按此基底形式展开。Dirac delta 函数 δ_d 的展开可以写成²²

$$\delta_d\left(s - ct + \frac{L}{2}\right) = \frac{4}{L} \sum_{\ell=1}^{\infty} \cos(k_\ell s) \cos\left[k_\ell\left(ct - \frac{L}{2}\right)\right] \quad (11.106)$$

其中, $k_\ell = (2\ell - 1)\frac{\pi}{L}$ 。注意, 这里默认谐振腔由 $s = -L/2$ 延展至 $s = +L/2$, 因此前面谐振腔的解需要适当平移 s 坐标: $s \rightarrow s - \frac{L}{2}$ 。接着, 将 $\frac{1}{\rho}$ 展开成带有 \mathcal{J}'_m 的形式, 有²³

$$\frac{1}{\rho} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_{m,n}}{R} C_{nm} \mathcal{J}'_m\left(j_{m,n} \frac{\rho}{R}\right) \quad (11.107)$$

其中,

$$C_{nm} = \frac{2}{[\mathcal{J}_{m+1}(j_{m,n})]^2} \int_0^1 x \ln(x) \mathcal{J}_m(j_{m,n} x) dx \quad (11.108)$$

由问题对称性, 场与方向角 ϕ 无关, 因此 $m = 0$ 。由此, 本来的初始电场

$$E_\rho = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\rho} \delta_d\left(s - ct + \frac{L}{2}\right) \quad (11.109)$$

可以写成基底函数的展开式, 有

$$E_\rho = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{4}{LR} \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} j_{0,n} C_{n0} \mathcal{J}'_0\left(j_{0,n} \frac{\rho}{R}\right) \cos(k_\ell s) \cos\left[k_\ell\left(ct - \frac{L}{2}\right)\right] \quad (11.110)$$

当 ℓ, n 很小时, 有谐振频率 $\omega_{\ell 0n} \approx k_\ell c$ 与 $j_{0,n} C_{n0} \approx -\pi$ 。现在, 对比前面给出的 TM 模的解, 比较系数, 可决定待定系数 E_0 的值, 有

$$E_0 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{8j_{0,n}}{(2\ell - 1)} = -\frac{Z_0 c}{4\pi} \frac{q}{R^2} \frac{8j_{0,n}}{(2\ell - 1)} \quad (11.111)$$

一旦待定系数 E_0 决定后, 所有场分量都可求得。比如, 纵向电场分量有

$$E_z = -\frac{Z_0 c}{4\pi} \frac{q}{R^2} \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8j_{0,n}}{2\ell - 1} \mathcal{J}_0\left(j_{0,n} \frac{\rho}{R}\right) \sin(k_\ell s) \cos\left[\omega_{\ell 0n}\left(t - \frac{L}{2c}\right)\right] \quad (11.112)$$

再继续讨论前, 回顾一下上面做了什么? 到目前为止, 我们把初始径向电场 E_ρ 的形式改写成以谐振腔解为基底函数的展开式, 从而得到基底函数的待定系数 E_0 。有了 E_0 之后, 根据谐振腔的解, 我们把初始电场的纵向分量 E_z 写出来。尽管最初径向电场 E_ρ 的形式 $E_\rho = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\rho} \delta_d\left(s - ct + \frac{L}{2}\right)$ 是在极端相对论 $\gamma = \infty$ 前提下, 假设平滑均匀的真空管道写出来的²⁴, 如果没有谐振腔或管道不连续面出现, 则本应不存在 E_z 。但是, 从真空管道进入到谐振腔结构, E_z 分量就冒出来了。 $E_z \neq 0$ 的出现不仅没有违法自洽性, 反而, E_z 作为谐振腔内的解, 是在第 1 章根据 Maxwell 方程组, 通过分离变量法严谨分析得到的。

²²这里读者不妨可将此结果视为已知。对细节推导感兴趣的读者, 其思路可参考 J. Schwinger 一书的 §17.7 或 <https://math.stackexchange.com/questions/374301/sum-over-cosines-dirac-delta-how-to-get-the-coefficients> 或 <http://latt.if.usp.br/scientific-pages/ftotcp/Text-I.html/node6.html>

²³同样, 这里读者不妨可将此结果视为已知。对细节推导感兴趣的读者, 可自行查阅物理数学相关教科书。

²⁴其实当时论证更粗糙些, 是从无边界自由空间的空间电荷场来的。

好，现在下一个目标是找出在源粒子经过谐振腔后，后方测试粒子感受到的场。即，让刚刚得到的初始电场纵向分量随时间演化。如何随时间演化？其实演化的机制已经隐含在解里了。留意前面定理中提到， $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} [\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)e^{-i\omega t}]$ ，其中，谐振频率 ω 对不同模各异，意即，不同模对时间的演化快慢不太一样。在继续推进之前，这里介绍一种分析不同模式随时间演化的思路：不同模式各自分析。既然每个模有各自的谐振频率与基底场函数，只要不同模式之间不存在耦合，我们就可以独立、个别分析。对每个模来说，在谐振腔里的电生磁、磁生电振荡行为可以等效为谐振子。谐振子的时间演化方程有

$$\frac{d^2 \star}{dt^2} + 2\alpha \frac{d\star}{dt} + \omega_R^2 \star = 0 \quad (11.113)$$

其中， \star 可以是电场或磁场 (振幅)， $\alpha = \frac{\omega_R}{2Q}$ 表征衰减， ω_R 为谐振 (角) 频率。上面的分析没有考虑具体的衰减机制，一般为金属有限电导率导致的热损耗或是谐振腔开孔导致的场泄漏。谐振场演化方程的解可写为

$$\star(t) = Ae^{-\alpha t} \cos(\bar{\omega}_R t - \phi) \quad (11.114)$$

其中， $\bar{\omega}_R = \sqrt{|\omega_R^2 - \alpha^2|}$ 。注意到，当某个模随时间演化呈现衰减时，其谐振频率也会有些偏移 $\omega_R \rightarrow \bar{\omega}_R$ 。



笔记 将电磁场随时间演化机制类比为谐振子振荡的思路最早源于 E.U. Condon，原始论文可参考 E.U. Condon, *Electronic Generation of Electromagnetic Oscillations*, J. Appl. Phys. **11**, 502-506 (1940). <https://doi.org/10.1063/1.1712802>。

现在，简化起见，考虑单模 $l = 1, n = 1$ ，则 $\omega_{l0n} = L/2c \approx \pi/2$ 。沿着中央轴 $(\rho, \phi, s) = (0, 0, s)$ 上的纵向电场有

$$E_z = -\frac{Z_0 c}{4\pi} \frac{8j_{0,1} q}{R^2} e^{-\alpha t} \sin\left(\frac{\pi}{L} s\right) \sin(\bar{\omega}_R t) \quad (11.115)$$

此式包含了谐振腔中沿着 s 在不同时刻 t 的纵向电场。但是，我们目前只关心跟随在源粒子后方固定距离的测试粒子感受的场，即考虑 $z = s - ct$ 为定值的情况。

将上式在谐振腔中沿着 $-L/2 \leq s \leq +L/2$ 范围积分， $t = \frac{s-z}{c}$ ，对 s 积分，则有

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} E_z(z = s - ct) ds \approx -\frac{Z_0 c}{4\pi} 3q \frac{L^2}{R^2} \frac{\omega_R}{c} e^{\alpha z/c} \cos\left(\frac{\bar{\omega}_R z}{c}\right) \quad (11.116)$$

至此，我们得到了源粒子给后方位置 $z < 0$ 的测试粒子的电场沿着 s 轴的积分结果！



练习 11.15 以上分析步骤具有一般性。对理论推导感兴趣的读者，应该试着重复以上结果。 ■

以上通过“基底分解”的思路，得到了谐振腔中的纵向电场。求解谐振腔尾场的方法不只一种，如：可通过对谐振腔阻抗的更多认识，利用逆傅里叶变换反过来求解尾场等。另一方面，上面讨论的方法为解析方法，仅有少数特殊、理想情况存在解析解，对多数

情况，一般采用数值求解。图 11.12 给出利用 ECHO 2D 程序²⁵的计算结果，对高斯短束团经过圆柱截面开口谐振腔时，谐振腔内纵向电场随不同时间的演化。

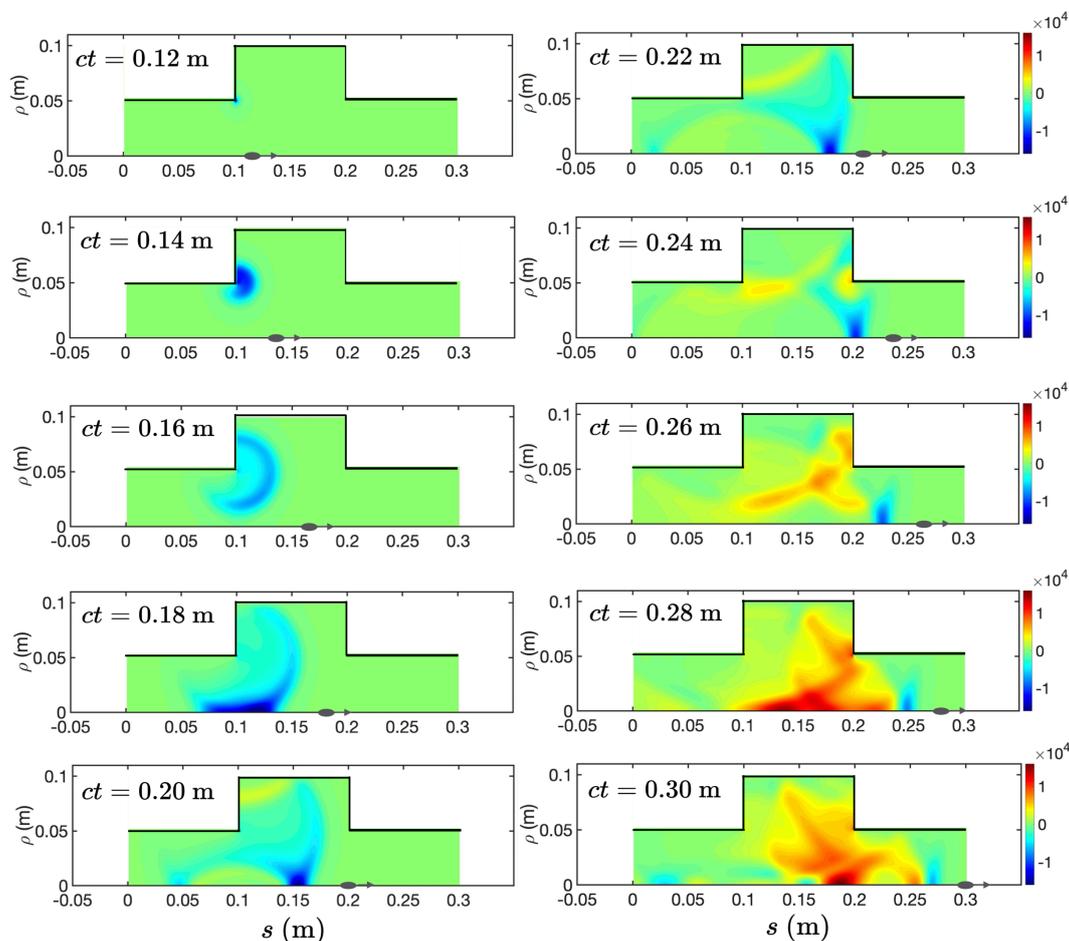


图 11.12: 高斯短束团经过圆柱截面开口谐振腔时，数值模拟谐振腔内纵向电场的演化。



笔记 到目前为止，我们已经介绍了三种涉及集体效应的电磁场计算，包含空间电荷场、电阻壁尾场与具有谐振结构的纵向尾场计算。在前两个例子中，电磁场基本上跟着束团前进，第三个例子中的电磁场则是被局限在谐振腔中。尽管这里没有介绍横向尾场计算，但是思路类似。在粒子加速器中，还有其它许多部件会导致尾场，且分析、计算方式各异，至今仍是领域内一丰富、活跃的课题。对相对论粒子经过各类电磁部件产生的尾场、阻抗计算感兴趣的读者，不妨参考以下综述论文或专著：

- S.A. Heifets and S.A. Kheifets, Coupling impedances in modern accelerators, *Rev. Mod. Phys.* **63**, 631-673 (1991). <https://journals.aps.org/rmp/pdf/10.1103/RevModPhys.63.631>
- Alexander Wu Chao, *Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators*, John Wiley & Sons (1993)
- Bruno W. Zotter and Semyon A. Kheifets, *Impedances and Wakes in High-Energy Accelerators*, World Scientific (1997)

²⁵<https://echo4d.de/>

- King-Yuen Ng, Physics of Intensity Dependent Beam Instabilities, World Scientific (2005)

11.5 尾场

上一节给出了几个源粒子产生的纵向电场的算例，包含空间电荷场、电阻壁尾场、圆柱谐振腔尾场。这一节将给出尾场函数 (wake function) 的定义与特性。与尾场函数等价的概念 — 阻抗函数 (impedance) — 将在下一节讨论。

11.5.1 基本定义

下一节将介绍，阻抗函数与尾场函数彼此等价，互为傅里叶变换关系。尾场，顾名思义，在源粒子前方 $z > 0$ 将不存在场，这个事实称因果律，将给傅里叶变换添加限制条件。或者说，在逆傅里叶变换中，约束了复频率平面 $\omega = kc$ 的合法适用范围。以下总结因果律在尾场、阻抗计算中的定义与限制。

定义 11.9. 因果律 (causality)

假设 $z > 0$ 表源粒子前方坐标且 $z = s - ct$ ，则有 $f(s, t) = f(z; t)$ 。对于多数情况，因果律要求 $f(z > 0) = 0$ 。先允许波数为复数，有 $k = k_r + ik_i$ ，则

$$e^{ikz} = e^{ik_r z} e^{-k_i z}$$

由傅里叶变换知

$$f(z; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k; t) e^{ikz} \quad (11.117)$$

要求 f 为有限值，则 $z > 0$ 对应于 $k_i > 0$ ； $z < 0$ 对应于 $k_i < 0$ ，否则 f 将发散。此外，要求 $f(z > 0) = 0$ ，因此当围道绕行 $k_i > 0$ 平面时，要求不能有极点 (singularity)。否则，将有 $f(z > 0) \neq 0$ 。

注 对电磁信号 $f(t)$ ，采用 $e^{-i\omega t}$ 惯例，其中， $\omega = \omega_r + i\omega_i$ 。按因果律要求，施加信号前不应该先测到信号，即 $f(t < 0) = 0$ ，则要求当围道绕行 $\omega_i > 0$ 平面时不能存在极点 (singularity)，否则 $f(t < 0) \neq 0$ 。

注 以上因果律又称局域因果律 (local causality) 或牛顿因果律 (Newtonian causality)。

注 有时候，§2.1 介绍的推迟效应 (retardation condition)，即电磁信号源到观察位置的传输速率 $v \leq c \neq \infty$ 的事实，也被视为另一种满足物理实际的因果律的一种表述。这种因果律又称有限速率因果律 (finite-speed causality) 或相对论因果律 (relativistic causality) 或爱因斯坦因果律 (Einstein causality)。



笔记 思考一个不简单的问题： $f(t < 0) = 0$ 与 $c(t - t_{\text{ret}}) = |\mathbf{r}_P(t) - \mathbf{R}(t_{\text{ret}})|$ 的内涵是否完全自洽，或存在矛盾？如果存在矛盾，如何调解？笔者认为，满足推迟条件的爱因斯坦因果律更根本，并且其内涵应自洽地包含相对直观的牛顿或局域因果律。

定义 11.10. 尾场函数 W (wake function)

尾场函数的定义基于以下两个重要假设^a:

1. 粒子经过引起尾场的结构时, 粒子产生尾场, 但是粒子运动轨迹不受尾场影响, 称刚性束团近似 (rigid beam approximation)。
2. 粒子经过引起尾场的结构时, 我们关心的不是瞬时的 \mathbf{E}, \mathbf{B} , 而是洛伦兹力对粒子经历结构期间的冲量 $\Delta\mathbf{p}$ 或能量改变 $\Delta\mathcal{E}$, 称冲量近似 (impulse approximation)。

参考图 11.1, 纵向尾场函数定义为在紧随源粒子 (source particle, q_1) 之后至测试粒子 (test particle, q_2) 一段固定距离处, 洛伦兹力对单位源电荷与单位测试电荷的一段固定距离所做的功, 即, 在 $|z_1 - z_2| = \beta c\tau = \text{常数}$ 情况下, 纵向尾场函数有

$$W_{\parallel}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) \equiv -\frac{\beta c}{q_1 q_2} \int dt F_{\parallel}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau; t) \quad (11.118)$$

或写成

$$W_{\parallel}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = -\frac{c}{q_1} \int dt \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau; t) \quad (11.119)$$

横向分量形式, 有

$$W_{\perp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = -\frac{\beta c}{q_1 q_2 \mathbf{r}_1} \int dt \mathbf{F}_{\perp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau; t) \quad (11.120)$$

或写成

$$W_{\perp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = -\frac{\beta c}{q_1 q_2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \int dt \mathbf{F}_{\perp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau; t) \quad (11.121)$$

其中, \mathbf{r}_1 为源粒子坐标, \mathbf{r}_2 为测试粒子坐标。注意, 不同文献定义横向尾场函数可能有些不同, 差别在分母的源粒子坐标 \mathbf{r}_1 , 因此, 差一个长度量纲。分母不包含源粒子坐标 \mathbf{r}_1 的横向尾场定义写为

$$\tilde{W}_{\perp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = -\frac{\beta c}{q_1 q_2} \int dt \mathbf{F}_{\perp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau; t) \quad (11.122)$$

留意两者区别。这里的 $(\tilde{\cdot})$ 不是傅里叶变换, 只是区分尾场函数而已。

注 纵向尾场的定义中有个负号, 为遵循对纵向尾场函数定义的惯例: (后方) 测试粒子感受到 $W_{\parallel} > 0$ 表示能量损耗 (假设 $q_1 q_2 > 0$ 恒成立)。此外, 有些横向尾场函数的定义没有负号, 此为随性的惯例。此讲义采用带负号的横向尾场函数。此差异将导致不同文献中的 Panofsky-Wenzel 定理差一个负号, 宜留意。

注 严格的尾场函数定义, 积分上下限为 $(-\infty, \infty)$ 。考虑实际情况, 当尾场仅在局部区域时, 积分上下限为 $(-L/2, L/2)$ 或 $(0, L)$, 其中, L 为部件结构长度或感兴趣的长度范围。

注 第一个假设“刚性束团近似”概念隐含着前述的微扰理论的想法。第二个假设“冲量近似”概念本身则包含了集总元件的思想, 即将电磁部件贡献的尾场集总在一个

位置、时刻后，作用在测试粒子上。

注 这里的定义与经典教科书中基于 $\cos m\theta$ 环束 (ring beam) 的定义不同。参考 A.W. Chao, *Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators*, John Wiley & Sons (1993)。 $\cos m\theta$ 环束的尾场定义适用于任意束团 (横向) 分布，不限于点束团。这份讲义里的定义一般而言仅适用于最低阶的纵向尾场与横向尾场函数。对于束团可能导致的高阶尾场，这里的定义需要推广，参考 T.F. Gunzel, *Transverse coupling impedance of the storage ring at the European Synchrotron Radiation Facility*, *Phys. Rev. Accel. Beams* **9**, 114402 (2006). <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevSTAB.9.114402>

注 按如上定义，横向尾场函数与纵向尾场函数的量纲不同，差一个长度量纲。

注 尾场函数是一种格林函数。纵向尾场函数 W_{\parallel} 就像衰减的余弦函数，横向尾场函数 W_{\perp} 就像衰减的正弦函数。参考图 11.13。

^a此两个假设最早由赵午 (A.W. Chao) 教授在 1998 年 OCPA(海外华人物理学会) 举办的加速器学校提出。据其说法，虽然知道不是所有情况都满足此两个假设，但却意外发现本来不预期满足此假设的情况——空间电荷场——竟满足了。因此，合理认为隐含在这两个假设背后可能还有尚未被发掘的物理图像。

笔记 由上定义，洛伦兹力中的电场分量对测试粒子做功，将导致粒子能量或速度改变。但是，这种改变由于刚性束团近似，忽略不计。由此可知，尾场函数的概念对低能粒子未必适用。

笔记 关于横向尾场函数的定义，不同教科书采用不同惯例，整理如下：

- 带负号：此讲义、Handbook §3.2.4、A. Chao、K. Ng、A. Wolski
- 带正号：L. Palumbo (LNF-94/041)、T. Weiland (横纵向皆正号)、B. Zotter & S. Kheifets、G. Stupakov

注 如果利用经典教科书中基于 $\cos m\theta$ 环束 (ring beam) 的定义，好处是可以分析一般情况，特别是圆柱对称的束团分布与圆柱对称的金属真空管道。此时，束团电荷与电流密度分布按圆柱坐标可以正交分解如下

$$\rho = \sum_{m=0}^{\infty} \rho_m \quad \text{与} \quad \mathbf{J} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{J}_m \quad (11.123)$$

其中，

$$\rho_m = \frac{I_m}{\pi a^{m+1} (1 + \delta_{m0})} \delta(s - ct) \delta(\rho - a) \cos m\theta \quad (11.124)$$

$$\mathbf{J}_m = c\rho_m \hat{\mathbf{s}}$$

其中, a 为束团中心偏离轴心的距离。多极矩系数 I_m 定义为

$$I_m = \operatorname{Re} \iiint (x + iy)^m \rho dV \quad (11.125)$$

对偏离轴心 $\rho = a$ 的单粒子而言, $I_m = qa^m$ 为总电荷 q 的 m 阶矩。对均匀环型电荷分布, $I_m = q$, 当 $m = 0$; $I_m = 0$, 当 $m \neq 0$ 。如果金属真空管道也是圆柱对称, 则分析将变得非常对称、漂亮。相比于此讲义采取的定义, 环束定义的缺点是物理图像容易被数学掩盖。

定义 11.11. 尾场势 (wake potential)

分纵向与横向。纵向尾场势定义为

$$\begin{aligned} V_{\parallel}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) &= \int F_{\parallel}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau; t) ds \\ &= \beta c \int F_{\parallel}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau; t) dt = \beta c \Delta p_z(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) \end{aligned} \quad (11.126)$$

横向尾场势定义为

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\perp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) &= \int \mathbf{F}_{\perp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau; t) ds \\ &= \beta c \int \mathbf{F}_{\perp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau; t) dt = \beta c \Delta \mathbf{p}_{\perp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) \end{aligned} \quad (11.127)$$

其中, $\mathbf{V}_{\perp} = (V_x, V_y)$, $\mathbf{F}_{\perp} = (F_x, F_y)$, $\Delta \mathbf{p} = (\Delta \mathbf{p}_{\perp}, \Delta p_z)$ 为冲量。

注 虽称为势, 但量纲为能量。

注 一般积分上下限遍及计算尾场的电磁部件长度。 □

注 在文献中, 时常出现三种类似但不相等的尾场物理量, 总结如下:

1. 尾场函数 $W_{\parallel, \perp}$ (wake function): 如上定义, 为格林函数。
2. 尾场 $\mathcal{W}_{\parallel, \perp}$ (wakefield): 定义为尾场函数对束团整体纵向分布的卷积

$$\mathcal{W}_{\parallel, \perp}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{\parallel, \perp}(z - \zeta) \lambda(\zeta) d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} W_{\parallel, \perp}(\zeta) \lambda(z - \zeta) d\zeta \quad (11.128)$$

3. 尾场势 $V_{\parallel, \perp}$ (wake potential): 如上定义 11.10, 同时参考 §11.7.5。

根据以上尾场函数的定义, 可写出上一节三个算例的正式尾场表示式, 有

- 纵向空间电荷尾场函数²⁶

由 Eq. (11.17), 当 $z \rightarrow z' = 0$ 时, 有 $\frac{z-z'}{|z-z'|^3} \rightarrow -\delta'(z)$, 于是单位长度、低频近似的纵向空间电荷尾场函数有

$$W_{\parallel}(z) = -\frac{E_z}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\gamma^2} \delta'(z) \quad (11.129)$$

如考虑真空管道, 则单位长度纵向空间电荷尾场函数的更完整表示式为

$$W_{\parallel}(z) = \frac{Z_0 c}{4\pi\gamma^2} \left(1 + 2 \ln \frac{b}{a}\right) \delta'(z) \quad (11.130)$$

其中, a 为横向均匀分布的束团尺寸、 b 为真空管道半径。

- 单位长度、低频近似的电阻壁纵向尾场函数

²⁶明显地, 空间电荷场严格来说不能称为尾场, 因为不满足因果律。

由 Eq. (11.61), 对后方测试粒子 $z < 0$, 有

$$W_{\parallel}(z) = -\frac{E_z}{q_1} = -\frac{c}{4\pi^{3/2}b} \sqrt{\frac{Z_0}{\sigma|z|^3}} \quad (11.131)$$

其中, σ 为金属管壁电导率。更完整尾场表示式为 (单位长度)

$$W_{\parallel}(z) = \frac{4Z_0c}{\pi b^2} \left[\frac{e^{z/s_0}}{3} \cos\left(\frac{\sqrt{3}z}{s_0}\right) - \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\infty} dx \frac{x^2 e^{zx^2/s_0}}{x^6 + 8} \right] \quad (11.132)$$

可以证明 $\lim_{z \rightarrow 0} W_{\parallel}(z) = \frac{Z_0c}{\pi b^2}$, 与电导率无关。

其中, b 为金属管壁半径、 $s_0 = [2b^2\mu_r/(Z_0\sigma_c)]^{1/3}$ 。

 **笔记** 留意, 此处 s_0 为一重要参数, 为电阻壁尾场从暂态进入稳态的长度。

• 谐振腔纵向尾场函数

由 Eq. (11.116), 对后方测试粒子 $z < 0$, 积累的尾场函数有

$$W_{\parallel}(z) = -\frac{\int_{-L/2}^{L/2} E_z ds}{q} = \frac{Z_0c}{4\pi} \frac{3L^2}{R^2} \frac{\omega_R}{c} e^{\alpha z/c} \cos\left(\frac{\bar{\omega}_R z}{c}\right) \quad (11.133)$$

其中, L 为谐振腔长度、 R 为谐振腔半径、 ω_R 为谐振频率、 $\alpha = \omega_R/2Q$ 、 $\bar{\omega}_R = \sqrt{|\omega_R^2 - \alpha^2|}$ 。有些时候还写成更一般的形式为

$$W_{\parallel}(z) = \frac{R_S \bar{\omega}_R}{Q} e^{\alpha z/c} \cos\left(\frac{\bar{\omega}_R z}{c}\right) \quad (11.134)$$

其中, R_S 称分路阻抗 (shunt impedance)。

注 一般加速腔的主要模式 (如: 加速模), 其分路阻抗约为 $M\Omega$ 量级。

 **笔记** 乍看之下, 尾场函数与电场好像只差一个电荷项。其实不然。仔细回想, 将发现尾场函数与以前电磁学课堂学过的电场有以下几点差别:

- 尾场函数是基于刚性束团近似与冲量近似下才有的概念, 电场没有。
- 尾场函数是测试粒子与源粒子相距一段“固定”距离后积累的效应。尾场函数虽作为 z 的函数, 但是其不同的 z 应视为在不同位置的不同测试粒子。电场则具有最一般性的物理量, 为时间空间的函数。
- 尾场函数相对电场来说, 是一个更局限的概念。尾场函数不仅受 Maxwell 方程约束, 还受 §11.6.3 将介绍的 Panofsky-Wenzel 定理约束。相比之下, 电场仅受 Maxwell 方程约束。
- 纵向尾场函数关心的是测试粒子与源粒子相距一段“固定”距离的情况下, 源粒子的场在同轴上的测试粒子位置的量。横向尾场函数关心的则是在测试粒子与源粒子相距一段“固定”距离的情况下, 当源粒子存在一单位横向偏移时, 其产生的场在轴上的测试粒子位置的量。电磁理论中的电场则是一个全时间、全空间的函数。

性质 11.3. 尾场函数的量纲

对国际单位制 (SI 或 MKS 单位制),

- 纵向尾场函数 W_{\parallel} 的单位为 VC^{-1} 或 Ωs^{-1}
- 横向尾场函数 W_{\perp} 的单位为 $\text{VC}^{-1}\text{m}^{-1}$ 或 $\Omega\text{s}^{-1}\text{m}^{-1}$

对高斯单位制 (或 CGS 单位制),

- 纵向尾场函数 W_{\parallel} 的单位为 cm^{-1}
- 横向尾场函数 W_{\perp} 的单位为 cm^{-2}

其中, V 为伏特, C 为库仑, Ω 为欧姆, s 为秒, m 为米。 □

定理 11.11. 实用数值单位变换关系

以下为尾场函数的 SI 单位制与 CGS 单位制间的实用数值单位变换关系

$$1 \text{ V/pC} = 10^{12} \text{ V/C} = 10^{12} \Omega/\text{sec} = 1 \text{ k}\Omega\text{-GHz} = 1.11 \text{ cm}^{-1}$$

其中, 最后一个等号为 CGS 单位制。 □



笔记 当有些尾场的量化方式考虑“单位长度”的尾场时, 则其量纲与以上总结的结果再差一个长度量纲。

练习 11.16 在 CGS 单位制中, 假设横向尾场函数数值 $W_{\perp} = 58 \text{ cm}^{-2}$, 试将此数值转换为 SI 单位制。 ■

解

$$W_{\perp}^{\text{CGS}} = 58 \frac{1}{\text{cm}\cdot\text{cm}} \rightsquigarrow W_{\perp}^{\text{SI}} = \frac{58}{1.11} \times 10^{12} \frac{\text{V}}{\text{C}\cdot\text{cm}} = 5.2 \times 10^{15} \frac{\text{V}}{\text{C}\cdot\text{m}}$$

11.5.2 特性**性质 11.4. 尾场特性**

定义 $z > 0$ 为源粒子前方; $z < 0$ 为源粒子后方。参考图 11.13, 常见的尾场满足以下特性:

- 源粒子前方不存在尾场; $W_{\parallel}(z > 0) = 0, W_{\perp}(z > 0) = 0$
- 紧跟源粒子后方的纵向尾场恒正^a; $W_{\parallel}(z \rightarrow 0^-) \geq 0$, 为类余弦 (cosine-like) 函数
- 紧跟源粒子后方的横向尾场恒负; $W_{\perp}(z \rightarrow 0^-) \leq 0$, 为类正弦 (sine-like) 函数
- 源粒子本身感受的等效 (纵向) 尾场为 $W_{\parallel}(z = 0) = \frac{1}{2}W_{\parallel}(z \rightarrow 0^-)$, 又称束流负载基本定理 (fundamental theorem of beam loading)
- $W_{\perp}(z = 0) = 0$
- 紧跟源粒子后方的尾场可能振荡, 但振幅不会大于 $W_{\parallel}(z \rightarrow 0^-)$;

$$W_{\parallel}(z \rightarrow 0^-) \geq |W_{\parallel}(z)| \quad \forall z$$

- 尾场源于源粒子能量损失; $\int_{-\infty}^0 W_{\parallel}(z) dz \geq 0$

注 不是所有尾场函数都满足以上特性, 常见的例外有: 空间电荷 (space charge)、相干同步辐射 (coherent synchrotron radiation, CSR)。

“表征源粒子能量只可能损失于尾场, 不可能凭空自尾场获得能量。”

□

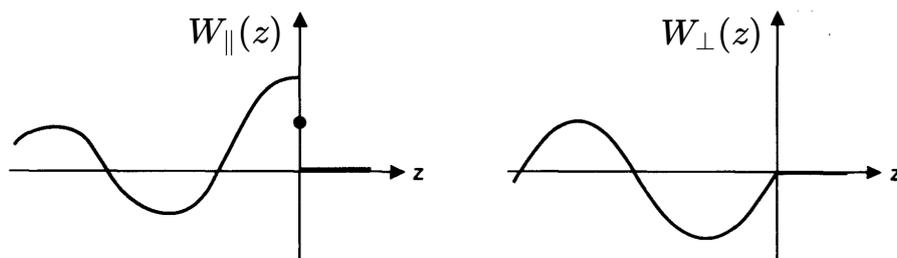


图 11.13: 纵向 W_{\parallel} 与横向 W_{\perp} 尾场函数的大致图像。在 $z > 0$ 侧, $W_{\parallel} = 0, W_{\perp} = 0$ 。当 $z \rightarrow 0^-$ 但 $z \neq 0$ 时, $W_{\perp}(0^-) = 0$ 而 $W_{\parallel}(0) = \frac{W_{\parallel}(0^-)}{2} > 0$, 称束流负载基本定理 (fundamental theorem of beam loading), 将在第 12 章介绍。

上面图 11.13 给出的是假设源电荷以极端相对论速度 $v = c$ 前进的尾场函数样貌。如果 $v < c$, 那么 $W_{\parallel, \perp}(z > 0) = 0$ 的条件就不严格成立。此时的纵向尾场函数大致如图 11.14 给出, 横向尾场大致不变。

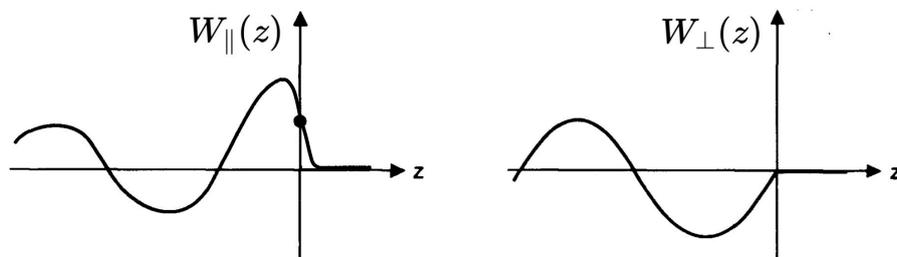


图 11.14: 纵向 W_{\parallel} 与横向 W_{\perp} 尾场函数在 $v < c$ 时的大致图像。

虽然上面主要介绍纵向尾场, 横向尾场的定义不同, 但思路差不多。结束这一节前, 参考图 11.15, 以下整理常用的纵向、横向尾场势与尾场力公式, 将在后面第 12 章、第 13 章用到。

对纵向尾场, 有

阶数	源粒子束的矩	纵向尾场势 $V_{\parallel}(z)$	纵向力 $F_{\parallel}(z) = \frac{\partial V_{\parallel}}{\partial z} \rightarrow \frac{V_{\parallel}}{L}$
0	q_1	$-q_1 q_2 W_{\parallel}(z)$	$-\frac{q_1 q_2}{L} W_{\parallel}(z)$

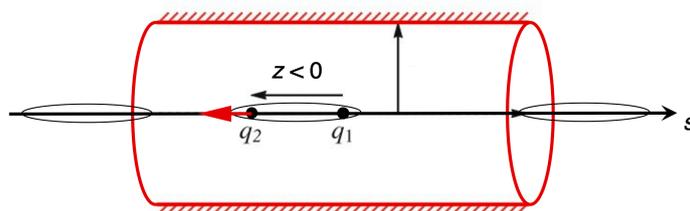
其中, q_1, q_2 分别为源粒子与测试粒子, $z = z_2 - z_1 < 0$, L 为尾场阻抗结构的有效长度。

对横向尾场，有

阶数	源粒子束的矩	横向尾场势 $\mathbf{V}_\perp(z)$	横向力 $\mathbf{F}_\perp(z) = \frac{\partial \mathbf{V}_\perp(z)}{\partial z} \rightarrow \frac{\mathbf{V}_\perp(z)}{L}$
0	q_1	0	0
1	$\begin{cases} q_1 \langle x \rangle_1 \\ q_1 \langle y \rangle_1 \end{cases}$	$\begin{cases} -q_1 q_2 \langle x \rangle_1 W_\perp(z) \\ -q_1 q_2 \langle y \rangle_1 W_\perp(z) \end{cases}$	$\begin{cases} -\frac{q_1 q_2}{L} \langle x \rangle_1 W_\perp(z) \mathbf{e}_x \\ -\frac{q_1 q_2}{L} \langle y \rangle_1 W_\perp(z) \mathbf{e}_y \end{cases}$

其中, q_1, q_2 分别为源粒子与测试粒子, $\langle x \rangle_1$ 或 $\langle y \rangle_1$ 为源粒子的横向位置, $z = z_2 - z_1 < 0$, L 为尾场阻抗结构的有效长度。由上表可以看到, 最低阶为纵向效应, 当源粒子与测试粒子都在 s 轴上。横向的最低阶效应发生在一阶。

经过电磁结构后, q_2 受力 $-\frac{q_1 q_2}{L} W_\parallel(z) \mathbf{e}_z$ 或纵向能量(尾场势)改变 $-q_1 q_2 W_\parallel(z)$



经过电磁结构后, q_2 受力 $-\frac{q_1 q_2}{L} \langle x \rangle_1 W_\perp(z) \mathbf{e}_x$ 或横向能量(尾场势)改变 $-q_1 q_2 \langle x \rangle_1 W_\perp(z)$

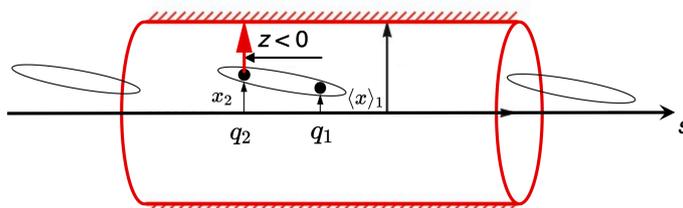


图 11.15: 纵向、横向尾场势与尾场力。

如果源粒子与测试粒子属于同一束团, 则 q_1, q_2 同号, 恒有 $q_1 q_2 > 0$ 。当 q_1, q_2 距离很近时 — 同时参考图 11.15 与图 11.14 — 可以看到, 此时纵向尾场总是将后方测试粒子往“后”推, 横向尾场总是将后方测试粒子往“外”推。

练习 11.17 零阶效应仅有纵向尾场势与纵向力, 一阶及以上效应同时包含纵向与横向尾场势。考虑图 11.15 下方情况, 测试粒子 q_2 受的纵向能量或纵向尾场势改变不同于 $-q_1 q_2 W_\parallel(z)$ 。能不能估算一下, 经过电磁结构后, 纵向能量额外改变了多少? ■

解 分析后, 有纵向能量额外改变(即一阶纵向尾场势) $\Delta V_\parallel(z) = -q_1 q_2 \langle x \rangle_1 x_2 W'_\perp(z)$, 其中, x_2 为测试粒子的横向坐标, $W'_\perp(z) = \partial W_\perp(z) / \partial z$ 。 ■

注 源粒子产生的尾场的一个应用称尾场加速 (wakefield acceleration)。如果能巧妙地将测试粒子束注入到尾场后方的加速相位处, 如图 11.13 的 $W_{\parallel}(z) < 0$ 处, 则测试粒子将能够获得加速而增加能量。

11.5.3 讨论: 尾场加速

上述最后提到前方源粒子产生的尾场, 当相位合适时, 能使后方测试粒子获得能量, 即建立的尾场能够加速在后方合适相位处的粒子。这就给那些直觉认为“尾场是人们极力避免的负面效应”一种认知反转: 就是说, 巧妙设计的尾场有时候也能有效加速粒子!

有些读者或许纳闷, “好好的”传统射频谐振腔加速粒子, 为什么大费周章搞尾场加速? 传统加速器依赖于射频腔, 为中空金属腔体。§1.14 介绍过, 射频腔金属侧壁所能承受的电场强度存在一个上限, 称射频击穿 (RF breakdown), 约 100 MV/m。击穿根源于存在的金属侧壁。若侧壁处电场高于击穿场强, 金属表面将发生电离而释放出 (二次) 电子, 从而破坏射频场。如果周遭空无一物没有金属腔壁为边界, 那么就没有此击穿上限 — 等离子体 (plasma) 将不存在此一击穿物理效应限制, 也是“尾场加速”电子的源由。

在加速器社群中有一个研究方向为探索不同于传统射频腔的创新粒子加速机制, 那些机制通称先进加速概念 (advanced acceleration concepts)。利用前方束团产生的尾场加速后方束团就是一例²⁷。这类尾场加速机制一般需要在产生尾场与加速粒子之前先建立一个适当的等离子体环境, 即创造一个游离的电子、离子的中性环境, 因此这类加速机制又称等离子体尾场加速 (plasma wakefield acceleration, PWFA)。

PWFA 最早在 1979 年由美国加州洛杉矶分校 (UCLA) 的 Toshiki Tajima 与 John Dawson 提出²⁸, 利用当时开发的粒子云网格 (particle In cell) 数值计算方法, 从理论与数值模拟层面评估其可行性。通过一些驱动机制从等离子体环境里建立尾场, 从而加速粒子。这里我们用一种形象化方式比喻等离子体尾场加速的物理图像, 参考图 11.16。

想像一条船穿过湖面, 这里的湖面就是等离子体, 船可视为前方驱动束。驱动束进入湖中激起波浪, 这就是尾场。在驱动束后方放一个要被加速的测试束团, 就像是在波浪后面的冲浪者 (surfer)。当冲浪者相对于波浪的相位合适时, 冲浪者就能获得能量而被加速、前进。为什么冲浪者能够获得加速呢? 冲浪者之所以被加速是因为他们实际上是在水坡道上滑行, 被“重力”拉着。在尾场加速中, 电子或其它带电粒子则是被电场加速。如何产生加速的尾场电场? 等离子体是一种游离的电子、离子的中性环境, 整体上它的

²⁷另一例为基于非传统射频腔的介质加速结构 (dielectric linear accelerator, DLA), 此处不论, 感兴趣的读者可参考 R.J. England et al., Dielectric laser accelerators, Rev. Mod. Phys. **86**, 1337 (2014). <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.1337>

²⁸原始论文可参考 T. Tajima and J. M. Dawson, Laser Electron Accelerator, Phys. Rev. Lett. **43**, 267 (1979). <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.43.267>。

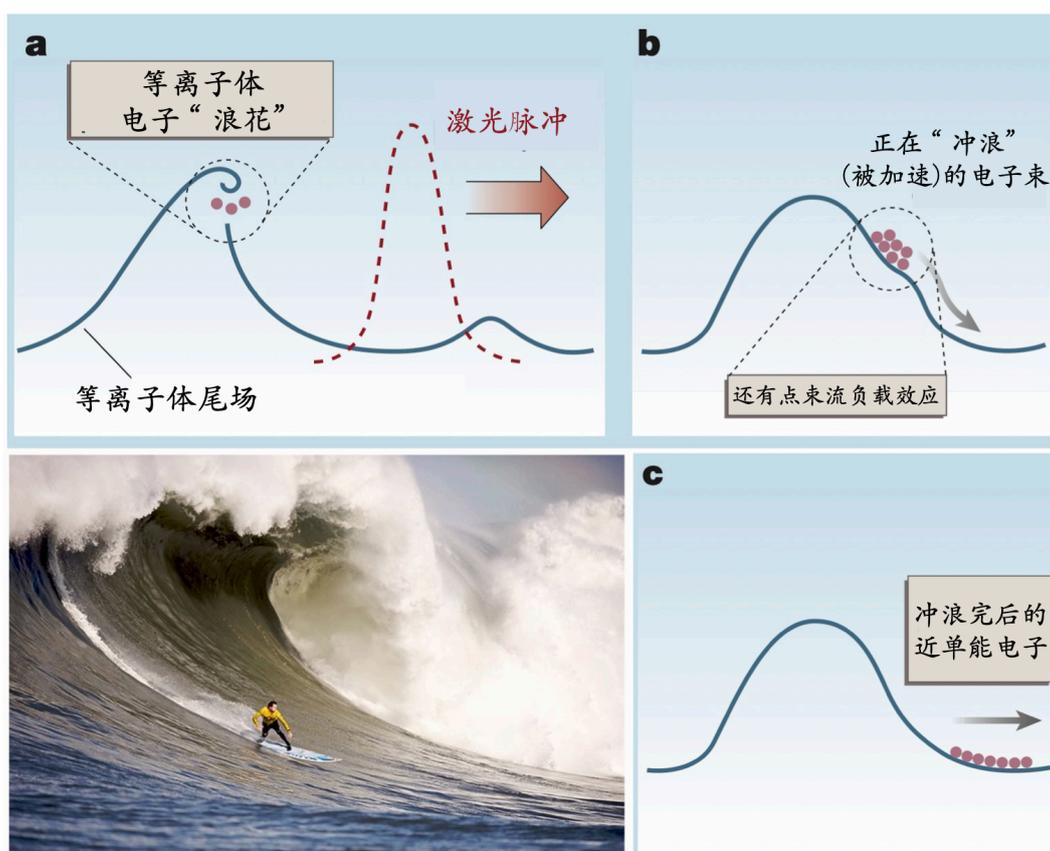


图 11.16: 等离子体尾场加速示意图。(a) 驱动激光束在后方产生尾场, 尾场捕捉电子; (b) 电子被尾场加速过程; (c) 加速结束; 左下图为冲浪示意图。图 (a,b,c) 修改自 T. Katsouleas, *Electrons hang ten on laser wake*, *Nature* **431**, 515-516 (2004). <https://doi.org/10.1038/431515a>。图例 (d) 取自网络。

正离子电荷与负电子电荷相互抵消。但这些自由的、完全游离的电子比起背景离子，更容易被推动或拉动，当局部电子密度与背景离子密度相差 1% 的差异就能产生可观的电场。一般来说，电场强度与等离子体密度的平方根成正比，即 $E_z \propto \sqrt{n_e}$ 。等离子体密度越高，引起的电场就变得更强大，更强的电场会产生更大的加速梯度²⁹。一般来说，目前可达到的等离子体驱动的加速梯度约为 10 ~ 100 GV/m。

驱动束可大致分两种 — 激光束与粒子束，分别简短介绍如下：

- 激光驱动尾场加速 (laser-driven wakefield acceleration) \Rightarrow 驱动源为强激光束。强激光场传输时的辐射压强会将激光束后方一段距离内的电子排开，形成一无电子、带正电的“气泡”区域 (bubble region)，气泡内外的电子密度差产生用来加速粒子的高梯度加速电场，这个“气泡”随激光束前进。参考图 11.17 (上)。
- 束团驱动尾场加速 (beam-driven wakefield acceleration) \Rightarrow 驱动束团可以是 (负) 电子束、正电子束、质子束等。前方驱动束称 driving beam，后方被加速的束团称 witness beam。与电子驱动束产生的“气泡”不同，正电子束、质子束产生的“气泡”不是无电子的理想气泡。使用质子作为驱动束的好处是质子较重，携带的能量比起电子或正电子等轻子多很多，因此尾场加速时能够传递给后方测试束的绝对能量也就增加。参考图 11.17 (下)。

注 对激光驱动尾场加速的综述介绍，可参考 E. Esarey, C. B. Schroeder, and W. P. Leemans, *Physics of laser-driven plasma-based electron accelerators*, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 1229 (2009). <https://journals.aps.org/rmp/pdf/10.1103/RevModPhys.81.1229>。对束团驱动尾场加速的综述介绍，可参考 P. Muggli, *Beam-driven, Plasma-based Particle Accelerators*, *Proc. CAS-CERN Accelerator School* (2014). https://cds.cern.ch/record/2203633/files/1418884_119-142.pdf。



笔记 虽然基于等离子体 (PWFA) 机制的加速梯度比起传统射频腔的加速梯度高了至少两个数量级，但是，PWFA 的有效加速长度仍短得多。可以说这是优势：PWFA 使装置变得更紧凑，但也可以说是劣势：要维持或增加有效加速长度非常困难。此外，基于 PWFA 加速的电子束团，其束团参数与基于传统加速方案产生的电子束相比较差。根据 Livingston 图 (参考附录)，基于传统加速机制所能达到的粒子能量似乎已经看到“天花板”，加速器社群亟需创新的、能够进一步提高粒子能量的切实可行方案。因此，这一系列“劣势”都应被视为今后的挑战。



练习 11.18 对激光驱动等离子体加速机制感兴趣的读者，可试着在不运行数值模拟情况下，估算激光驱动束强度一般需要多大、“气泡”结构的横纵向尺寸分别多少、内部加速电场梯度、聚焦散焦强度等。 ■

²⁹一个实用公式： E_z [V/m] $\approx 96\sqrt{n_e}$ [cm⁻³]。当 $n_e \sim 10^{18}$ cm⁻³ 时，有 $E_z \sim 96 \times 10^9$ V/m，比传统射频 RF 加速梯度高约三个数量级。

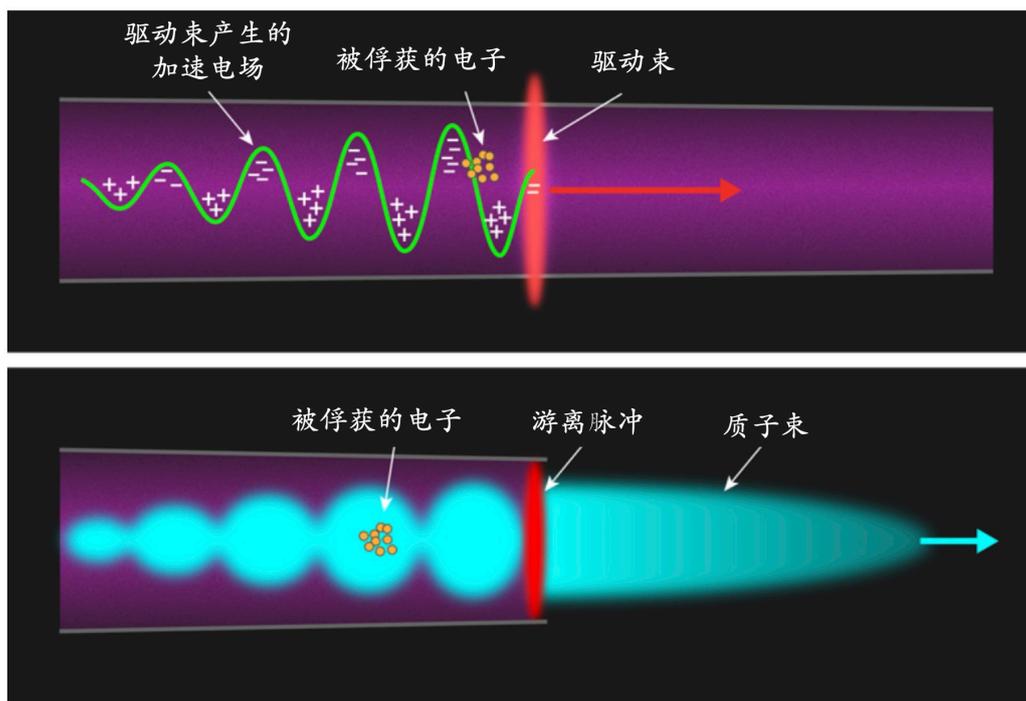


图 11.17: 激光驱动尾场加速(上)与质子束团驱动尾场加速(下)比较。对质子束情况, 由于质子束比电子或激光束长得多, 一般会在质子束中间密度较大区域加一激光束调制等离子体, 使等离子体产生密度调制(类似“气泡”), 这些“气泡”将用来加速外部注入的电子。图例修改自 F. Gruner, Shooting Ahead with Wakefield Acceleration, Physics Viewpoint (2019). <https://physics.aps.org/articles/v12/19>

🔥 **练习 11.19** 对束团驱动离子体加速机制感兴趣的读者, 可试着在不运行数值模拟情况下, 估算加速尾场梯度、聚焦散焦强度、能量转换效率等。 ■

既然传统射频腔为中空金属腔体, 粒子经过后得到加速。尾场加速器必须事先准备等离子体环境才能加速粒子。有些读者或许会好奇, 能不能直接拿强激光对准粒子, 在合适相位, 直接在没有金属管壁的自由空间中加速粒子, 形成真空加速 (vacuum acceleration)? 如果此法可行, 那是不是就不需要大费周章、省事多了? 天下没有完全免费的午餐。以下定理将告诉我们, 这个想法几乎不可行。

定理 11.12. Lawson-Woodward 定理

在无边界的自由空间(真空)中, 平面电磁波无法对沿直线前进、极端相对论($v \rightarrow c$ 或 $\beta \rightarrow 1$)的带电粒子产生一阶、线性的净加速。

证明 已知:

1. 在金属边界(如: 孔径)附近的电磁场可以用传播平面波 (propagating plane wave) 和凋落平面波 (evanescent plane wave) 的叠加表示。
2. 电磁场的远场可视为孔径的傅里叶变换。

传播平面波具有相速度 $v_{ph} \geq c$ 且为横电磁 (TEM) 波, 没有纵向电场。凋落平面波

的横纵向电场幅值比有

$$\frac{E_{\parallel}}{E_{\perp}} \propto \frac{1}{\gamma} \rightarrow 0, \quad \text{当 } \gamma \rightarrow \infty \quad (11.135)$$

因此, 随着粒子能量的增加, 纵向加速场会逐渐减小。当 $v \rightarrow c$ 或 $\gamma \rightarrow \infty$ 时, $E_{\parallel} \rightarrow 0$ 。



笔记 原始论文可参考 J.D. Lawson, Lasers and Accelerators, IEEE Trans. Nucl. Sci. **26**, 4217 (1979). https://accelconf.web.cern.ch/p79/PDF/PAC1979_4217.PDF。

注 这对粒子加速存在理论上的限制, 尤其是对基于激光的电子加速机制而言, 因为电子很轻, 很容易就接近极端相对论条件。任何基于激光的粒子加速机制都必须 至少 打破此定理的一个假设前提才有可能在物理或工程实际上实现。 □

几个不违反 Lawson-Woodward 定理而实现粒子加速的机制:

- 逆自由电子激光 (inverse FEL) \Rightarrow 粒子不走直线。
- 有质动力加速 (ponderomotive acceleration) \Rightarrow 有质动力不是线性力, 加速过程为非线性。
- 非线性康普顿散射 (nonlinear Compton scattering) \Rightarrow 非线性加速过程。
- 逆 Smith-Purcell 辐射加速 \Rightarrow 存在边界, 即金属光栅。
- 逆契伦科夫 (Cherenkov) 加速 \Rightarrow 存在边界, 即介质或气体。



笔记 关于 Lawson-Woodward 定理的更多讨论, 可参考 A.W. Chao, Lawson-Woodward theorem, Lecture Notes on Special Topics in Accelerator Physics. <https://www.slac.stanford.edu/~achao/LaserAccel.pdf>。

11.6 阻抗

上一节定义了尾场函数，这一节介绍一个与之等价的物理量，称阻抗函数或阻抗 (impedance)。

11.6.1 基本定义

定义 11.12. 阻抗 Z (impedance)

简化起见，考虑源粒子在轴上 $\mathbf{r}_1 = \mathbf{0}$ 的情况。纵向与横向阻抗分别定义为对应的纵向与横向尾场函数的傅里叶变换，有

$$Z_{\parallel}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{c} W_{\parallel}(z) e^{-ikz} \quad (11.136)$$

$$Z_{\perp}(k) = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{c} W_{\perp}(z) e^{-ikz} \quad (11.137)$$

其中， $k = \omega/c$ 。对应的逆傅里叶变换为

$$W_{\parallel}(z) = \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk Z_{\parallel}(k) e^{ikz} \quad (11.138)$$

$$W_{\perp}(z) = -i \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk Z_{\perp}(k) e^{ikz} \quad (11.139)$$

由上一节给出的三个算例的尾场函数，根据阻抗的定义，可以写出分别对应的阻抗函数，有

- 单位长度、低频近似的纵向空间电荷阻抗有

$$Z_{\parallel}(k) = \frac{iZ_0 k}{4\pi\gamma^2} \quad (11.140)$$

其中， $Z_0 \approx 120\pi \approx 377 \Omega$ 。

- 单位长度、低频近似的电阻壁纵向阻抗有

$$Z_{\parallel}(k) = [1 - i \operatorname{sgn}(k)] \frac{1}{2bc} \sqrt{\left(\frac{Z_0 c}{4\pi}\right) \frac{2c|k|}{\pi\sigma}} \quad (11.141)$$

其中， sgn 为符号函数，取值 ± 1 取决于宗量的正负号， σ 为 DC 电导率。更完整阻抗表示式有 (单位长度)

$$Z_{\parallel}(k) = \frac{Z_0}{\pi b} \frac{1}{2\sqrt{\frac{iZ_0\sigma(k)}{k} - ibk}} \quad (11.142)$$

其中， $\sigma(k)$ 为 AC 电导率，参考 §11.3。

- 谐振腔纵向阻抗函数有

$$Z_{\parallel}(k) = \frac{R_S}{1 + iQ\left(\frac{k_R}{k} - \frac{k}{k_R}\right)} \quad (11.143)$$

其中， $k_R = \omega_R/c$ 。

注 在有些文献，阻抗函数的宗量用 (角) 频率 ω 描述，写成 $Z_{\parallel,\perp}(\omega)$ ；有些则以 k 表示，写成 $Z_{\parallel,\perp}(k)$ ，其中， $\omega = kc$ 。写成时间傅里叶形式 $Z_{\parallel,\perp}(\omega)$ 时，更想强调阻抗在加速器

磁聚焦结构传输段的固定位置；写成空间傅里叶形式 $Z_{\parallel,\perp}(k)$ 时，有时强调阻抗分布在加速器传输段(如：电阻壁阻抗)，或阻抗跟着束团一起前进(如：相干同步辐射阻抗、空间电荷阻抗等)。

注 从谐振腔阻抗函数的形式看，与电路理论学过的 RLC 电路的阻抗函数对比，阻抗实部称电阻，虚部称电抗。电抗的正负号又分别称容性与感性，对 $k > 0$ 而言，即：

- $\text{Im } Z(k) > 0$: 容性 (capacitive) $\propto \omega^{-1}$ 或 $\propto k^{-1}$
- $\text{Im } Z(k) < 0$: 感性 (inductive) $\propto \omega$ 或 $\propto k$

一般将空间电荷阻抗视为容性阻抗。

当采用 j 惯例时，以上结论颠倒，因为 $j = -i$ 。因此，看不同文献时，宜留意文中使用的惯例。有些文献对容性、感性阻抗的定义采用对频率的依存关系，则无混淆疑虑。

注 接续电路理论的对比，对感性 (inductive)、阻性 (resistive)、容性 (capacitive) 阻抗，其尾场势与束团线密度分布函数 $\lambda(z)$ 分别有

- $\mathcal{W}_{\parallel,\text{感性}}(z) \propto \lambda'(z) = d\lambda/dz$
- $\mathcal{W}_{\parallel,\text{阻性}}(z) \propto \lambda(z)$
- $\mathcal{W}_{\parallel,\text{容性}}(z) \propto \int_{-\infty}^z \lambda(\zeta) d\zeta$

或者，如果写成尾场函数，即 $\lambda(z) \rightarrow \delta(z)$

- $W_{\parallel,\text{感性}}(z) \propto \delta'(z)$
- $W_{\parallel,\text{阻性}}(z) \propto \delta(z)$
- $W_{\parallel,\text{容性}}(z) \propto H(-z)$ ，其中， H 为 Heaviside 或单位步阶 (unit step) 函数



笔记 回忆一下，尾场函数的物理图像是什么？思考一下，阻抗的物理图像是什么？ \Rightarrow 尾场一词，顾名思义，似乎较直观，其物理图像也相对容易理解。尾场的存在可能导致束团集体效应也似乎不令人意外。至于阻抗，顾名思义后似乎还不能预见其物理图像，如何导致束团集体效应也似乎没有那么一眼看穿。学过电路理论的读者可能将这里的阻抗对束团的影响比拟成电路理论中的部件阻抗对电流流经区域的影响，如：能量损耗或发热等(将在 §11.7.5 介绍)。然而，电路理论中的电流为导线里的传导电流，这里的电流为自由电子形成的运流电流。用传导电流的图像自然不好理解阻抗带来的束团集体效应。早期看出加速器束流集体动力学与阻抗具有紧密联系的人是 CERN 的加速器学家 V.G. Vaccaro³⁰。

性质 11.5. 尾场与阻抗的量纲

对国际单位制 (SI 或 MKS 单位制)，

- 纵向尾场函数 W_{\parallel} 的单位为 VC^{-1} 或 Ωs^{-1}
- 横向尾场函数 W_{\perp} 的单位为 $\text{VC}^{-1}\text{m}^{-1}$ 或 $\Omega\text{s}^{-1}\text{m}^{-1}$
- 纵向阻抗 Z_{\parallel} 的单位为 Ω

³⁰<https://home.cern/news/obituary/accelerators/vittorio-giorgio-vaccaro-1941-2023>

- 横向阻抗 Z_{\perp} 的单位为 Ωm^{-1}

对高斯单位制 (或 CGS 单位制),

- 纵向尾场函数 W_{\parallel} 的单位为 cm^{-1}
- 横向尾场函数 W_{\perp} 的单位为 cm^{-2}
- 纵向阻抗 Z_{\parallel} 的单位为 $\text{s}\cdot\text{cm}^{-1}$
- 横向阻抗 Z_{\perp} 的单位为 $\text{s}\cdot\text{cm}^{-2}$



笔记 当有些尾场的量化方式考虑“单位长度”的尾场时, 则其量纲与以上总结的结果再差一个长度量纲。当尾场函数沿着传输段均匀不变时, 一般即考虑“单位长度”的尾场。当尾场函数沿着传输段呈周期性变化时, 比如粒子经历周期性结构, 则考虑“单位周期长度”的尾场。

定理 11.13. 实用数值单位变换关系

以下为尾场函数的 SI 单位制与 CGS 单位制间的实用数值单位变换关系

$$1 \text{ V/pC} = 10^{12} \text{ V/C} = 10^{12} \text{ } \Omega/\text{sec} = 1 \text{ k}\Omega\text{-GHz} = 1.11 \text{ cm}^{-1}$$

其中, 最后一个等号为 CGS 单位制。

11.6.2 同步条件

细心的读者可能对上面介绍的 $\omega = kc$ 的成立关系感到困惑或惊讶, 以下说明。首先, $\omega = kc$ 不应看成色散关系, 因为束团粒子与周遭环境作用发生在真空中, 因此将 $\omega = kc$ 看成同步条件更合适: 能与粒子导致有效交互作用的场是那些相位匹配 (或同步) 的场。先对电场做傅里叶变换, 包含全域空间 s 与时间 t

$$E_z(s, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{E}_z(\omega, k) e^{iks - i\omega t} \quad (11.144)$$

此时还不考虑源粒子与测试粒子间的间距, 且 ω, k 也还是任意取值的, 也就是说, 还没有限制 $\omega = kc$ 的关系。

简化起见, 假设 $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = 0$ 。在源粒子后方 z 处的测试粒子取值 $z = s - ct$, 由尾场函数定义, 有

$$\begin{aligned} W_{\parallel}(z) &= -\frac{c}{q_1} \int_{-\infty}^{\infty} E_z(s = z + ct, t) dt \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{c}{q_1} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_z(k, \omega) e^{ikz + ikct - i\omega t} dt \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{c}{q_1} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{E}_z(k, \omega) e^{ikz} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(kc - \omega)t} dt \\ &= -\frac{1}{2\pi} \frac{c}{q_1} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{E}_z(k, \omega) e^{ikz} \delta(\omega - kc) \end{aligned} \quad (11.145)$$

可以看到, 当源粒子产生的电场成分中的波数与频率满足 $\omega = kc$ 时, 才存在有效的交互作用。留意, 以上 t 的积分范围 $(-\infty, \infty)$ 意味着假设产生尾场的电磁部件无限延伸。实

际情况的电磁部件为有限长，根据

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i(k-k_0)z} dz = \frac{L}{2\pi} \frac{\sin[(k-k_0)\frac{L}{2}]}{(k-k_0)\frac{L}{2}} = \frac{L}{2\pi} \text{sinc}(x) \quad (11.146)$$

其中， $\pi x = (k-k_0)\frac{L}{2}$ 。可以看到，当电磁部件长度为有限时，同步条件不再是 $\delta(\omega - kc)$ ，即允许 $\omega \neq kc$ 。由

$$\lim_{f \rightarrow \infty} \frac{\sin(\pi x f)}{\pi x} = \lim_{f \rightarrow \infty} f \text{sinc}(x f) = \delta(x) \quad (11.147)$$

可以推知，对越是高频阻抗成分， $\text{sinc}(x)$ 越接近 $\delta(x)$ ，因此，可以将 $\omega = kc$ 近似视为同步条件。

对电磁部件中的低频阻抗成分，特别是当频率低于金属真空管道，则那些尾场将被局限在对其而言类似于谐振腔的电磁结构中。对此情况，则 t 积分上下限范围将限于部件长度，因此将存在不只一个同步条件，即谐振腔中的同步模不只一个，除了最低阶的基模外，还有高阶模。称“模”是因为这些满足同步条件的频率一般为离散形式。

同步条件 $\omega = kc$ ，或者如果考虑粒子 $\beta = v/c < 1$ 情况，同步条件写为 $\omega = kv$ 。此同步条件通常为近似成立或甚至不成立。以下几种情况应特别留意其适用性：

- 源粒子与测试粒子间距在束团整体经过尾场或阻抗结构时不再是“线性”的时候，同步条件 $\omega = kc$ 未必成立。比如，源粒子与测试粒子距离较远，横向 betatron 振荡或纵向同步振荡明显时，宜留意。对头尾不稳定性 (head-tail instability) 或一连串束团形成的耦合束团不稳定性 (coupled bunch instability) 即属此种情况。更多讨论可参考 §13.8。
- 如果束团粒子与周遭环境作用不是发生在真空中，而是在介质中，则 $\omega = kc$ 未必成立，宜留意。

11.6.3 Panofsky-Wenzel 定理

除了尾场函数与阻抗函数互为傅里叶变换外，尾场函数的纵向分量与横向分量不完全独立，而是存在关联。知道纵向尾场函数，可以推知横向尾场函数，反之亦然。可以预期，此关联源于 Maxwell 方程组，称 Panofsky-Wenzel 定理。此处仅给出以动量形式表示的定理证明，以其它形式表示的定理，其证明细节不论。

按 $z = s - \beta ct$ 惯例。由洛伦兹力开始，

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \beta c \mathbf{e}_z \times \mathbf{B}) \quad (11.148)$$

等式两边取散度，操作在测试粒子上，有

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{F} &= q \left[\frac{\rho}{\epsilon_0} + \beta c \nabla \cdot (\mathbf{e}_z \times \mathbf{B}) \right] \\
 &= q \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} - \beta c \mathbf{e}_z \cdot \nabla \times \mathbf{B} \right) \\
 &= q \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\beta}{c} \mathbf{e}_z \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \beta^2 \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) \\
 &= \frac{q\rho}{\epsilon_0 \gamma^2} - \frac{q\beta}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{11.149}$$

等式两边取旋度，同样操作在测试粒子上，有

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{F} &= q \left[-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \beta c \nabla \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{B}) \right] \\
 &= -q \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta c \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{B}
 \end{aligned} \tag{11.150}$$

其中，

$$\frac{\partial}{\partial t} + \beta c \frac{\partial}{\partial z} = \beta c \frac{\partial}{\partial s} \tag{11.151}$$

假设 $\beta \rightarrow 1, d = |z_1 - z_2| > 0$ ，测试粒子 2 经过尾场结构后得到的冲量变化有

$$\Delta \mathbf{p}(x, y, -d) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{F}(x, y, s - d, t) \tag{11.152}$$

其中， $s = \beta ct, d > 0$ 。于是，

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \Delta \mathbf{p} &= \int_{-\infty}^{\infty} dt [\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z, t)]_{z=s-d} \\
 &= -q \int_{-\infty}^{\infty} dt \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta c \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{B}(x, y, z, t) \right]_{z=s-d} \\
 &= -q \mathbf{B}(x, y, s - d, t) \Big|_{t=-\infty}^{t=\infty} \stackrel{!}{=} \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{11.153}$$

与

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \Delta \mathbf{p} &= \int_{-\infty}^{\infty} dt [\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z, t)]_{z=s-d} \\
 &= -\frac{q}{c} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left(\frac{\partial E_z}{\partial t} \right)_{z=s-d} \\
 &= -q \int_{-\infty}^{\infty} dt \left(\frac{\partial E_z}{\partial s} \right)_{z=s-d} + q \int_{-\infty}^{\infty} dt \left(\frac{\partial E_z}{\partial z} \right)_{z=s-d} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \left(\frac{\partial F_z}{\partial z} \right)_{z=s-d} = \frac{\partial \Delta p_z}{\partial z} = -\frac{\partial \Delta p_z}{\partial d}
 \end{aligned} \tag{11.154}$$

$$\Rightarrow \nabla_{\perp} \cdot \Delta \mathbf{p}_{\perp} = 0$$

其中， $\partial/\partial z = \partial/\partial z_2 = -\partial/\partial d$ 。

以下整理此定理结果。

定理 11.14. Panofsky-Wenzel 定理

由 W.K.H. Panofsky 与 W.A. Wenzel 在 1956 年提出, 随后得到推广。根据满足尾场或阻抗的“两个”假设:

1. 粒子经过引起尾场的结构时, 粒子产生尾场, 但是粒子运动轨迹不受尾场影响, 称刚性束团近似 (rigid beam approximation)。
2. 粒子经过引起尾场的结构时, 我们关心的不是瞬时的 \mathbf{E}, \mathbf{B} , 而是洛伦兹力对粒子经历结构期间的冲量 $\Delta \mathbf{p}$, 称冲量近似 (impulse approximation)。

以此两假设为前提, 有如下几种形式的 Panofsky-Wenzel 定理:

- 动量形式:

$$\nabla \times \Delta \mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad \nabla_{\perp} \cdot \Delta \mathbf{p}_{\perp} = 0 \quad (11.155)$$

或对前者分别取 $\mathbf{e}_z \cdot$ 与 $\mathbf{e}_z \times$, 有

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{e}_z \times \Delta \mathbf{p}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \Delta \mathbf{p}_{\perp} &= -\frac{\partial}{\partial d} \Delta \mathbf{p}_{\perp} = \nabla_{\perp} \Delta p_z \end{aligned} \quad (11.156)$$

- 电磁场形式: 假设圆柱形对称谐振腔, 有

$$\Delta \mathbf{p}_{\perp}(\rho, \phi) = i \frac{q}{\omega} \int_{-L/2}^{L/2} \nabla_{\perp} \tilde{E}_z(\rho, \phi, s) ds \quad (11.157)$$

其中, $\Delta \mathbf{p}_{\perp}$ 为横向机械动量, ω 为谐振频率, \tilde{E}_z 为圆柱谐振腔纵向 (时谐) 电场。此形式常应用在射频/微波谐振腔设计中。

- 尾场函数形式:

$$\frac{\partial \tilde{W}_{\perp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; d)}{\partial d} = -\nabla_{\perp} W_{\parallel}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; d) \quad (11.158)$$

其中,

$$\begin{aligned} W_{\parallel}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) &= -\frac{\beta c}{q_1 q_2} \int dt F_{\parallel}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau; t) \\ \tilde{W}_{\perp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) &= -\frac{\beta c}{q_1 q_2} \int dt \mathbf{F}_{\perp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau; t) \end{aligned} \quad (11.159)$$

下标 1 表示源粒子, 下标 2 为测试粒子, $d = |z_1 - z_2| = \beta c \tau > 0$, ∇_{\perp} 对测试粒子坐标操作。在直角坐标系下, 写成分量形式, 有

$$\frac{\partial \tilde{W}_x}{\partial d} = -\frac{\partial W_{\parallel}}{\partial x_2} \quad (11.160)$$

$$\frac{\partial \tilde{W}_y}{\partial d} = -\frac{\partial W_{\parallel}}{\partial y_2} \quad (11.161)$$

$$\frac{\partial \tilde{W}_x}{\partial y_2} = \frac{\partial \tilde{W}_y}{\partial x_2} \quad (11.162)$$

- 阻抗函数形式:

$$\tilde{Z}_x(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; k) = -\frac{1}{k} \frac{\partial Z_{\parallel}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; k)}{\partial x_2} \quad (11.163)$$

$$\tilde{Z}_y(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; k) = -\frac{1}{k} \frac{\partial Z_{\parallel}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; k)}{\partial y_2} \quad (11.164)$$

其中,

$$\tilde{Z}_{\perp}(k) = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{c} \tilde{W}_{\perp}(z) e^{-ikz}$$

注意到, 以上定理形式中, 横向尾场函数与阻抗函数采用 $(\tilde{\cdot})$ 惯例。按此惯例, 在时域与频域, 此定理都以所定义的尾场函数、阻抗函数表示。

如果按此讲义定义的阻抗函数形式, 则 Panofsky-Wenzel 定理有

$$Z_{\parallel}(k) = kZ_{\perp}(k) \quad (11.165)$$

其中,

$$Z_{\perp}(k) = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{c} W_{\perp}(z) e^{-ikz}$$

按此惯例, 似乎在频域以阻抗函数表示的形式更为简洁, 在时域则不容易以尾场函数展开为分量形式。

- 尾场势形式: 如果不采用 $(\tilde{\cdot})$ 惯例, 则 Panofsky-Wenzel 定理可写为: ($z < 0$)

$$\nabla_{\perp} V_{\parallel} = -\frac{\partial}{\partial d} \mathbf{V}_{\perp} = \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{V}_{\perp} \quad (11.166)$$

其中, $V_{\parallel}, \mathbf{V}_{\perp} = (V_x, V_y)$ 为尾场势

$$V_{\parallel}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \int F_{\parallel}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau; t) ds = \beta c \Delta p_z \quad (11.167)$$

$$\mathbf{V}_{\perp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \int \mathbf{F}_{\perp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau; t) ds = \beta c \Delta \mathbf{p}_{\perp}$$

其中, $\mathbf{F}_{\perp} = (F_x, F_y)$ 为洛伦兹力横向分量。这里的 ∇_{\perp} 为对测试粒子的横向偏移坐标偏微分。

证明 参考 D. Zhou and C.-Y. Tsai, Generalized Panofsky-Wenzel theorem in curvilinear coordinate systems applicable to non-ultrarelativistic beams, arXiv: 2309.04073. <https://arxiv.org/abs/2309.04073>

注 Panofsky-Wenzel 定理的原始论文仅有半页, 写成电磁场形式, 感兴趣的读者可参考 W.K.H. Panofsky and W.A. Wenzel, Some Considerations Concerning the Transverse Deflection of Charged Particles in RadioFrequency Fields, Rev. Sci. Instrum. **27**, 967 (1956). <https://doi.org/10.1063/1.1715427> □

- 🔴 **练习 11.20** 以上的 Panofsky-Wenzel 定理假设粒子传输段为直线段, 采用直角坐标系。现考虑包含弯转段的一般传输段, 如果采用 Frenet-Serret 坐标系, 试重新推导 Panofsky-Wenzel 定理。 ■

11.6.4 特性

为完整起见, 以下不仅整理了阻抗函数的特性, 也把上一节尾场函数的特性总结在一起以方便查阅。

性质 11.6. 尾场与阻抗特性

常见的尾场满足以下特性：(定义 $z > 0$ 为源粒子前方； $z < 0$ 为源粒子后方)

- 源粒子前方不存在尾场； $W_{\parallel}(z > 0) = 0, W_{\perp}(z > 0) = 0$
- 紧跟源粒子后方的纵向尾场恒正^a； $W_{\parallel}(z \rightarrow 0^-) \geq 0$ ，为类余弦 (cosine-like) 函数
- 紧跟源粒子后方的横向尾场恒负； $W_{\perp}(z \rightarrow 0^-) \leq 0$ ，为类正弦 (sine-like) 函数
- 源粒子本身感受的等效 (纵向) 尾场为 $W_{\parallel}(z = 0) = \frac{1}{2}W_{\parallel}(z \rightarrow 0^-)$ ，又称束流负载基本定理 (fundamental theorem of beam loading)
- $W_{\perp}(z = 0) = 0$
- 紧跟源粒子后方的尾场可能振荡，但振幅不会大于 $W_{\parallel}(z \rightarrow 0^-)$ ； $W_{\parallel}(z \rightarrow 0^-) \geq |W_{\parallel}(z)| \forall z$
- 尾场源于源粒子能量损失； $\int_{-\infty}^0 W_{\parallel}(z) dz \geq 0$

常见的阻抗满足以下特性：

- 尾场函数 $W \in \mathbb{R}$ ，因此，对应的阻抗在 ω 或 k 的复平面有对称特性

$$Z_{\parallel}^*(\omega) = Z_{\parallel}(-\omega) \quad (11.168)$$

$$Z_{\perp}^*(\omega) = -Z_{\perp}(-\omega) \quad (11.169)$$

即，纵向阻抗函数的实部与横向阻抗函数的虚部为偶函数，纵向阻抗函数的虚部与横向阻抗函数的实部为奇函数

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} Z_{\parallel}(\omega) &= \operatorname{Re} Z_{\parallel}(-\omega) \\ \operatorname{Im} Z_{\parallel}(\omega) &= -\operatorname{Im} Z_{\parallel}(-\omega), \quad \operatorname{Im} Z_{\parallel}(0) = 0 \\ \operatorname{Re} Z_{\perp}(\omega) &= -\operatorname{Re} Z_{\perp}(-\omega), \quad \operatorname{Re} Z_{\perp}(0) = 0 \\ \operatorname{Im} Z_{\perp}(\omega) &= \operatorname{Im} Z_{\perp}(-\omega) \end{aligned} \quad (11.170)$$

- 由上，尾场函数可以进一步化简为

$$W_{\parallel}(z < 0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \operatorname{Re} Z_{\parallel}(\omega) \cos \frac{\omega z}{c} \quad (11.171)$$

$$W_{\perp}(z < 0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \operatorname{Re} Z_{\perp}(\omega) \sin \frac{\omega z}{c} \quad (11.172)$$

- 利用横向尾场 $W_{\perp}(0) = 0$ 的特性^b，有

$$\int_0^{\infty} d\omega \operatorname{Im} Z_{\perp}(\omega) = 0 \quad (11.173)$$

$$\int_0^{\infty} d\omega \frac{\operatorname{Im} Z_{\parallel}(\omega)}{\omega} = 0 \quad (11.174)$$

$$\operatorname{Re} Z_{\parallel}(\omega = 0) = 0 \quad (11.175)$$

由上可知，无论是纵向或横向阻抗，在 $\omega > 0$ 区间，其虚部必有正负符号变化。

- 结合尾场函数 $W \in \mathbb{R}$ 与因果律 (causality) 条件可知, 在复 ω 的上半平面 ($\text{Im}\omega > 0$) 中不能存在极点; 即, 物理上允许的极点只能沿 $\text{Re}\omega$ 轴或是在复 ω 下半平面。
- 利用柯西积分公式, 有如下的 Kramers-Kronig 关系 (或称 Hilbert 变换)

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{Z_{\parallel}(\omega')}{\omega' - \omega} = \pi i Z_{\parallel}(\omega) \quad (11.176)$$

与

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{Z_{\perp}(\omega')}{\omega' - \omega} = \pi i Z_{\perp}(\omega) \quad (11.177)$$

其中, P.V. 表示避开极点的主值积分。

将纵向阻抗写成实部与虚部形式, 有

$$\text{Re } Z_{\parallel}(\omega) = \frac{1}{\pi} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\text{Im } Z_{\parallel}(\omega')}{\omega' - \omega} \quad (11.178)$$

$$\text{Im } Z_{\parallel}(\omega) = -\frac{1}{\pi} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\text{Re } Z_{\parallel}(\omega')}{\omega' - \omega} \quad (11.179)$$

将横向阻抗写成实部与虚部形式, 有

$$\text{Re } Z_{\perp}(\omega) = \frac{1}{\pi} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\text{Im } Z_{\perp}(\omega')}{\omega' - \omega} \quad (11.180)$$

$$\text{Im } Z_{\perp}(\omega) = -\frac{1}{\pi} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\text{Re } Z_{\perp}(\omega')}{\omega' - \omega} \quad (11.181)$$

- 利用 $\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} = 0$, 上面 Kramers-Kronig 关系可以改写为

$$\text{Re } Z_{\parallel}(\omega) = \frac{2}{\pi} \text{P.V.} \int_0^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} [\omega' \text{Im } Z_{\parallel}(\omega') - \omega \text{Im } Z_{\parallel}(\omega)] \quad (11.182)$$

$$\text{Im } Z_{\parallel}(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \text{P.V.} \int_0^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} [\text{Re } Z_{\parallel}(\omega') - \text{Re } Z_{\parallel}(\omega)] \quad (11.183)$$

$$\text{Re } Z_{\perp}(\omega) = \frac{2\omega}{\pi} \text{P.V.} \int_0^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} [\text{Im } Z_{\perp}(\omega') - \text{Im } Z_{\perp}(\omega)] \quad (11.184)$$

$$\text{Im } Z_{\perp}(\omega) = -\frac{2}{\pi} \text{P.V.} \int_0^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} [\omega' \text{Re } Z_{\perp}(\omega') - \omega \text{Re } Z_{\perp}(\omega)] \quad (11.185)$$

- 紧跟源粒子后方的纵向尾场恒正^{c,d}, 有

$$\text{Re } Z_{\parallel}(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \quad (11.186)$$

$$\text{Re } Z_{\perp}(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega > 0 \quad (11.187)$$

$$\text{Re } Z_{\perp}(\omega) \leq 0 \quad \forall \omega < 0 \quad (11.188)$$

注 不是所有尾场与阻抗都满足以上特性, 常见的例外有: 空间电荷 (space charge)、相干同步辐射 (coherent synchrotron radiation, CSR)。

^a 表征源粒子能量只可能损失于尾场, 不可能凭空自尾场获得能量。

^b 空间电荷场为例外。

^c 此结论也适用于源粒子后方较远处的测试粒子, 表征束团整体能量只可能损失于尾场, 不可能凭空自尾场获得能量。但对 step-in、step-out 结构, 此结论未必严格成立。

^d如果将反馈系统视为一个阻抗元件，则反馈系统能贡献小于零 (负的) 实部阻抗，即 $\text{Re } Z_{\parallel, \text{反馈}} < 0$ 。□

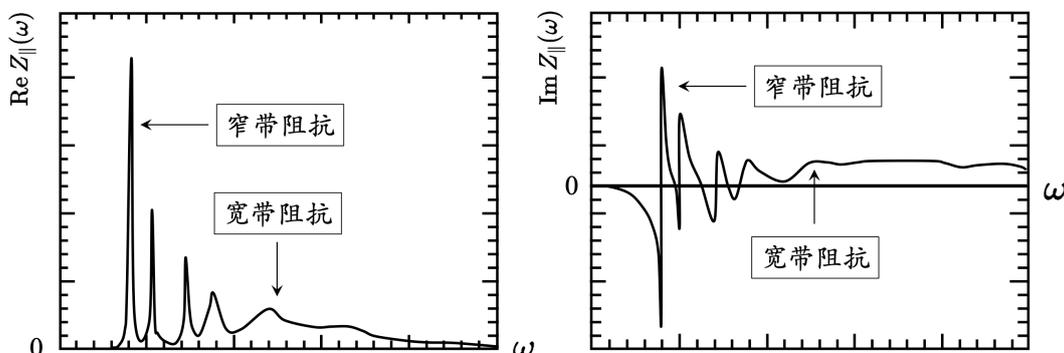


图 11.18: 纵向阻抗函数的大致图像。低频部分电磁场无法在金属真空管道传输，被局限在谐振腔结构中，为窄带阻抗；高频部分能在真空管道传输，为宽带阻抗。阻抗虚部为正，称容性阻抗；虚部为负，称感性阻抗。虚部阻抗 (右图) 必有正负符号变化；如果没有，则表示虚部阻抗不完整。

第二册 §10.2 介绍 Wiener-Khinchin 定理时，提到谱通量 $dF/d\omega$ 与自相关函数 C 互为傅里叶变换。上面介绍的阻抗实部 $\text{Re } Z_{\parallel, \perp}(\omega)$ 与虚部 $\text{Im } Z_{\parallel, \perp}(\omega)$ 也是互为 Hilbert 变换。这些似乎都与一个称 Kramers-Kronig 关系有关，追溯根源则与因果律有关。此处简短介绍 Kramers-Kronig 关系。

定理 11.15. Kramers-Kronig 关系、Hilbert 变换

此定理为“双向”定理，关联在复数 (上半) 平面上一解析 (analytic) 函数的实部与虚部的定理。在实际应用上，时常在已知一物理系统响应前提下，已知实部求虚部，或已知虚部求实部。

因果性 (causality, 物理) \Leftrightarrow 可解析性 (analyticity, 数学)

一般情况下，物理系统响应为一复数函数，其实部与虚部相关而非独立，可写为

$$\chi(\omega) = \frac{1}{i\pi} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (11.189)$$

其中， $\chi(\omega)$ 为系统的响应函数。

证明 考虑 $x(t) \leftrightarrow \chi(\omega)$ ，将响应函数写成 $\chi(\omega)$ 。假设此响应函数符合物理实际，即满足因果律，则此函数在数学上为可解析 (analytic) 函数。由于 $e^{-i\omega t} = e^{-i(\text{Re}\omega)t} e^{+(\text{Im}\omega)t}$ 知，当 $t < 0$ 时，要求满足因果律 $x(t < 0) = 0$ ，即要求上半复平面 $\text{Im}\omega > 0$ 不能有极点。如果复平面存在极点，则只能在轴上或下半平面。参考图 11.19，有

$$\oint \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = 0 \quad (11.190)$$

于是，有

$$0 = \oint \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' - i\pi\chi(\omega) \quad (11.191)$$

其中，外围半圆围道积分用了 Jordan 引理。

注 知其一即足够：如果完整知道响应函数的实部或虚部，则对应的另一半函数即可求得。但很多时候可能是实部知道一些但不完整、虚部知道一些但不完整，而试着通过 KK 关系拼凑出更完整的响应函数的样貌。

注 如果使用虚数单元 j 惯例， $j = -i$ ，则复平面上下颠倒。

注 除了 §10.2 介绍的谱通量、自相关函数，还有这里介绍的阻抗实部、虚部，甚至 §1.11 介绍的折射率 $\tilde{n} = n + i\kappa$ 其实部、虚部（或介电系数 ϵ 的实部、虚部），都满足 KK 关系。以（复）介电系数 $\epsilon(\omega)$ 为例，当时变电磁波经过 $\epsilon(\omega)$ 的媒质时， $\text{Re} \epsilon(\omega)$ 对应波传播时的相速度、群速度， $\text{Im} \epsilon(\omega)$ 对应波传播时振幅的衰减或增长。

注 以上为典型关于 KK 关系的介绍。还有一种避开复变函数围道积分的介绍方式，感兴趣的读者可参考 https://en.wikipedia.org/wiki/Kramers%E2%80%93Kronig_relations。

注 以上 KK 关系给出的是响应函数实部、虚部的关系。在控制理论中，更多时候关联的是幅值 (amplitude)、相位 (phase)，有波特关系 (Bode gain-phase relation) 或波特图 (Bode plot)。细节此处不论。

注 关于 KK 关系的更多讨论，可参考 John S. Toll, Causality and the Dispersion Relation: Logical Foundations, Phys. Rev. **104**, 1760 (1956). <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.104.1760>。

注 数学上对应的定理称 Sokhotski-Plemelj 定理。参考此讲义 §13.5.1。 □

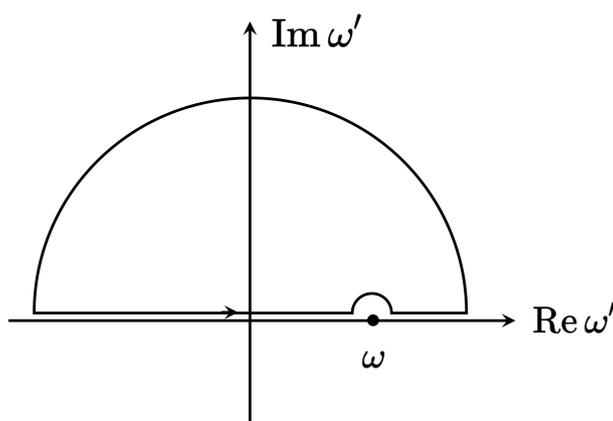


图 11.19: 证明 Kramers-Kronig 关系的积分围道。



笔记 上面提到，更多时候其实是对一系统的响应不完全掌握，因此在知道片面信息前提下（比如：实部、幅值），试着通过 KK 关系拼凑出更完整的响应函数的样貌。敏锐的读者可能猜到了真正大量使用 KK 关系的领域：研究（一知半解的）物质结构的散射 (scattering)、

吸收谱学、反射谱学 (spectroscopy) 等。

以上介绍的 **Kramers-Kronig** 关系除了将物理上响应函数的因果性与数学上复变函数的可解析性紧密结合外，还有一个隐性假设，即假设响应函数表征的系统为线性系统 (**linear system**)。严格来说，当一系统的输入信号强度超过一范围时，响应函数将不再能很好地表征对应物理实际的系统，意味着系统进入非线性区间。对非线性系统，响应函数的实部、虚部间的关系不再由上面的定理，而需要修正或推广 **Kramers-Kronig** 关系。细节此处不论，对此感兴趣的读者，请自行参考相关文献。

11.7 尾场与阻抗公式

11.7.1 一个近似、有用的集总化模型 — 等效 RLC 模型

从第一原理(电磁场理论)开始, 建立一个电磁部件的尾场、阻抗模型通常是一件非常艰巨的任务, 无论是通过理论推导或数值模拟。如果将电磁部件视为黑盒子, 通过对它的部分认识, 还是能够一定程度上建立一个粗糙的尾场或阻抗模型。这里给出一个近似、有用的集总化模型, 称等效 RLC 模型。概念源于部件里总不脱离时变电磁场的相互转换、振荡、衰减等, 因此其集总效应可类比为电路理论中的 RLC 电路。

在电路理论中, 讨论电阻、电容、电感等物件是集总化的, 通常以符号  表示电阻, 以  表示电容, 以  表示电感。一般以参数 R, C, L 分别量化。在电路理论中, 以上元件的数值一般是给定的, 获取这些元件的数值一般通过场的分析、数值模拟或实验手段。简单回顾一下这三种元件在电路理论中的量化定义:

- 电容 $C \equiv \frac{q}{V}$, 其中, V 是部件两端电位差。如果考虑的是单位长度的电容, 则可以写成 $C \equiv \frac{\tau}{V}$ 。AC 电流经过电容元件时, 有 $I(t) = \frac{dq}{dt} = C \frac{dV}{dt}$ 。对时谐场, 有

$$\tilde{I} = -i\omega C \tilde{V} \Rightarrow Z_{\parallel} = \tilde{V} / \tilde{I} = -1/i\omega C \quad (11.192)$$

- 电阻 $R \equiv \frac{V}{I}$ 。AC 电流经过电容元件时, 有 $V(t) = I(t)R$ 。对时谐场, 有

$$\tilde{V} = \tilde{I}R \Rightarrow Z_{\parallel} = R \quad (11.193)$$

- 电感 $L \equiv \frac{\Phi}{I}$, 其中, $\Phi = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ 为磁通量。AC 电流经过电感元件时, 有 $V(t) = \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{dI}{dt}$ 。对时谐场, 有

$$\tilde{V} = -i\omega L \tilde{I} \Rightarrow Z_{\parallel} = -i\omega L \quad (11.194)$$

参考图 11.20, 由电路理论的知识, 端口处的纵向阻抗可以写成

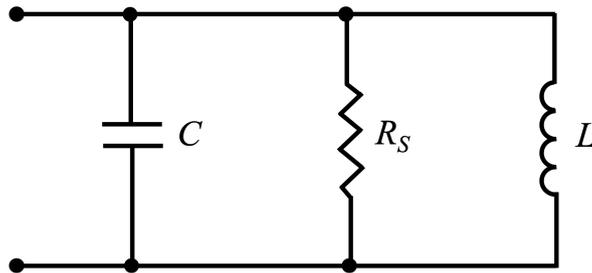


图 11.20: 并联 RLC 等效电路模型。

$$\frac{1}{Z_{\parallel}} = \frac{1}{R_S} + \frac{i}{\omega L} - i\omega C \Rightarrow Z_{\parallel}(\omega) = \frac{R_S}{1 + iQ \left(\frac{\omega_R}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_R} \right)} \quad (11.195)$$

其中, $Q = R_S \sqrt{C/L}$ 、 $\omega_R = 1/\sqrt{CL}$ 、 R_S 称分路阻抗 (shunt impedance)。利用 Panofsky-

Wenzel 定理, $Z_{\parallel}(k) = kZ_{\perp}(k)$, 对应的横向阻抗有

$$Z_{\perp}(\omega) = \frac{c}{\omega} \frac{R_S}{1 + iQ \left(\frac{\omega_R}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_R} \right)} \quad (11.196)$$



笔记 回忆一下, §1.13 讨论谐振腔的时候, 介绍过几种不同的品质因数, 包含固有品质因数 Q_0 、有载品质因数 Q_L 、外部品质因数 Q_e , 想一下, 这里的品质因数是哪一种?

对不同品质因数 Q , 横纵向阻抗的样貌大致如图 11.21 所示。

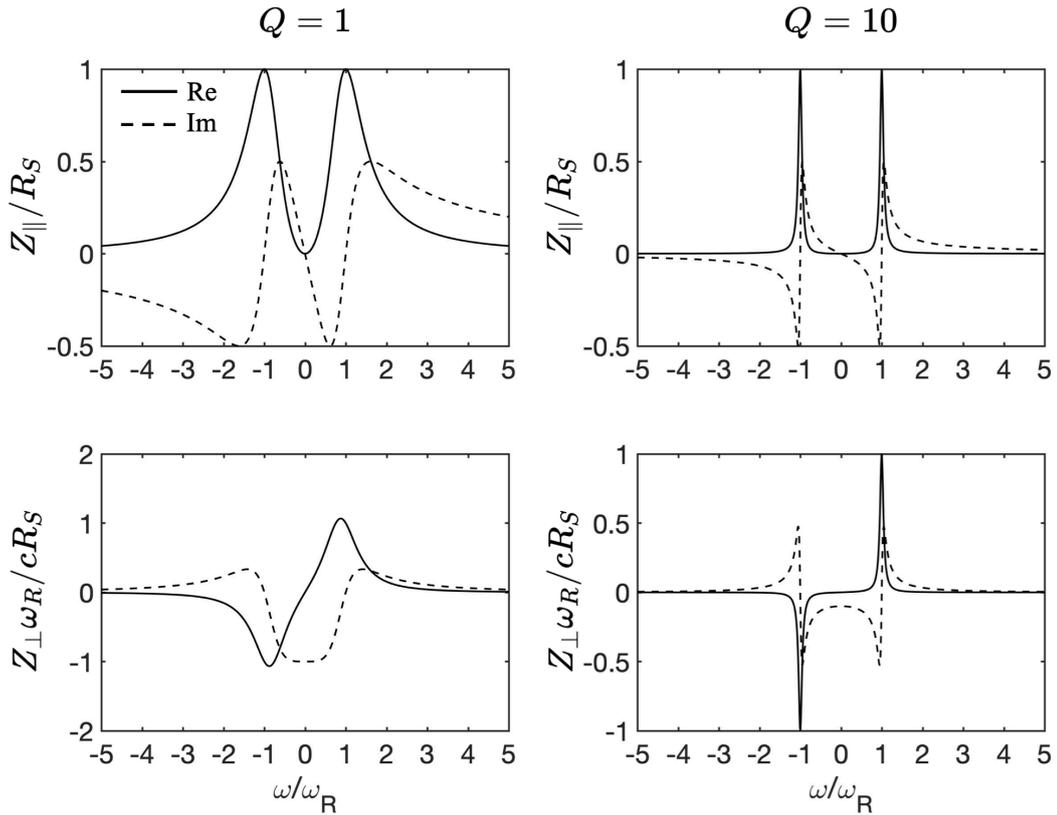


图 11.21: 基于 RLC 等效电路模型的纵向与横向阻抗。实线表示阻抗实部, 虚线表示阻抗虚部。Im $Z > 0$ 为容性阻抗, Im $Z < 0$ 为感性阻抗。

上面给出阻抗后, 根据尾场函数与阻抗的傅里叶变换定义, 对应的纵向尾场函数有

$$W_{\parallel}(z) = \begin{cases} 0 & \text{if } z > 0, \\ \alpha R_S & \text{if } z = 0, \\ 2\alpha R_S e^{\alpha z/c} \left(\cos \frac{\bar{\omega}z}{c} + \frac{\alpha}{\bar{\omega}} \sin \frac{\bar{\omega}z}{c} \right) & \text{if } z < 0, \end{cases} \quad (11.197)$$

其中, $\alpha = \omega_R/2Q$, $\bar{\omega} = \sqrt{|\omega_R^2 - \alpha^2|}$ 。注意到, 这里 $z > 0$ 表示粒子前方坐标。由于因果律, $W_{\parallel}(z > 0) \equiv 0$ 。

对应的横向尾场函数有

$$W_{\perp}(z) = \begin{cases} 0 & \text{if } z \geq 0, \\ \frac{cR_S\omega_R}{Q\bar{\omega}} e^{\alpha z/c} \sin \frac{\bar{\omega}z}{c} & \text{if } z < 0. \end{cases} \quad (11.198)$$

性质 11.7. 窄带 RLC 阻抗的近似表示式

对窄带 (narrowband) 阻抗, 有 $Q \gg 1$, 或假设 $Q \rightarrow \infty, R_S \rightarrow \infty$, 但比值 R_S/Q 保持一常数, 则对应的 RLC 阻抗函数有近似表示式如下。对纵向阻抗, 有

$$Z_{\parallel}(\omega) = \operatorname{Re} Z_{\parallel}(\omega) + i \operatorname{Im} Z_{\parallel}(\omega) \quad (11.199)$$

其中,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} Z_{\parallel}(\omega) &\approx \frac{\pi R_S \omega_R}{2Q} [\delta(\omega - \omega_R) + \delta(\omega + \omega_R)] \\ \operatorname{Im} Z_{\parallel}(\omega) &\approx \frac{R_S \omega_R}{2Q} \left(\frac{1}{\omega - \omega_R} + \frac{1}{\omega + \omega_R} \right). \end{aligned} \quad (11.200)$$

对应的纵向尾场函数有

$$W_{\parallel}(z < 0) \approx \frac{R_S \omega_R}{Q} \cos \frac{\omega_R z}{c} \quad (11.201)$$

对横向阻抗, 有

$$Z_{\perp}(\omega) = \operatorname{Re} Z_{\perp}(\omega) + i \operatorname{Im} Z_{\perp}(\omega) \quad (11.202)$$

其中

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} Z_{\perp}(\omega) &\approx \frac{\pi c R_S}{2Q} [\delta(\omega - \omega_R) - \delta(\omega + \omega_R)] \\ \operatorname{Im} Z_{\perp}(\omega) &\approx \frac{c R_S \omega_R}{2Q \omega} \left(\frac{1}{\omega - \omega_R} + \frac{1}{\omega + \omega_R} \right) \end{aligned} \quad (11.203)$$

对应的横向尾场函数有

$$W_{\perp}(z < 0) \approx \frac{c R_S}{Q} \sin \frac{\omega_R z}{c} \quad (11.204)$$

上面性质给出窄带 RLC 阻抗的近似特性, 另一个极端情况为宽带 (broadband) 阻抗函数, 将在下一小节与 §11.8 讨论。以下整理 RLC 阻抗在低频、中频、高频的一些渐进特性。

性质 11.8. 等效 RLC 阻抗的渐进特性

以纵向 RLC 阻抗为例

$$Z_{\parallel}(\omega) = \frac{R_S}{1 + iQ \left(\frac{\omega_R}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_R} \right)} \quad (11.205)$$

- 在低频区间 $\omega \ll \omega_R$, 主要为虚部感性阻抗

$$Z_{\parallel}(\omega) \approx -i \frac{R_S}{Q \omega_R} \omega \propto -i \omega L \quad (11.206)$$

- 在共振频率附近 $\omega \approx \omega_R$, 主要为实部电阻

$$Z_{\parallel}(\omega) \approx R_S \quad (11.207)$$

- 在高频区间 $\omega \gg \omega_R$, 主要为虚部容性阻抗

$$Z_{\parallel}(\omega) \approx -\frac{R_S \omega_R}{iQ\omega} \propto -\frac{1}{i\omega C} \propto +\frac{i}{\omega C} \quad (11.208)$$

注 对横向 RLC 阻抗, $Z_{\perp} = \frac{c}{\omega} Z_{\parallel}$, 以上结论不变。

笔记 前面介绍的空间电荷阻抗为纯感性阻抗，电阻壁阻抗则包含部分实部电阻与部分虚部感性阻抗。谐振腔阻抗形式同以上等效 RLC 阻抗，在不同频率区间特性不同，可能感性、可能阻性、可能容性，视频率区间而定。

练习 11.21 试着推导 RLC 等效模型的阻抗、尾场函数。

RLC 等效模型的物理图像 有些细心的读者可能会好奇，RLC 电路模型有串联、有并联，两者互为对偶 (dual)。为什么图 11.20 倾向于采用并联连接？这里给出关于 RLC 等效模型的物理图像的简短讨论。

参考图 11.22 (左)，考虑图中所示的空的、被动的谐振腔，在束团经过之前腔里不存在任何电磁场，该空腔相对于 z 轴具有旋转对称性，当束团通过间隙的时候，其电流 I_B 将在谐振腔内激发一些电磁场。简化起见，只考虑空腔的一个激励模式，即磁场 \mathbf{B} 绕着如图所示的进、出纸面方向，电场 \mathbf{E} 的主要贡献则平行于束团前进方向，集中在谐振腔中心轴附近。根据法拉第感应定律，随着束团经过的期间，束团激励的磁场逐渐增加，于是在谐振腔两侧侧壁上将感应一电流用以“抵抗”增加的磁通量。感应电流 I_L 沿着所示方向流经外部空腔壁，此电流 I_L 在谐振腔间隙的出口和入口附近分别引起正电荷和负电荷的积累，如图所示。这个电荷积累产生了感应电场，沿着与束团前进方向相反的方向，且此感应电流将逐渐使感应电场增大。

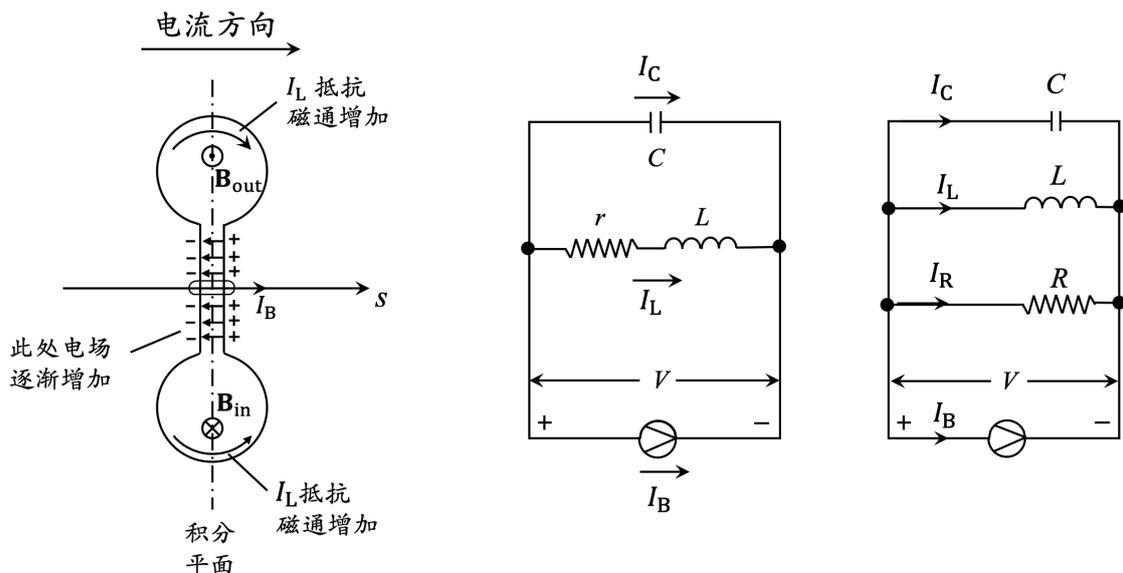


图 11.22: 束团经过谐振腔时激励的电磁场形态 (左)、其 RLC 等效电路模型 (中) 与简化的 RLC 等效电路模型 (右)。图例修改自 P.L. Morton, Introduction to Impedance For Short Relativistic Bunches, SLAC-PUB-6052 (1993). <https://www.slac.stanford.edu/pubs/slacpubs/6000/slac-pub-6052.pdf>。

利用全电流定律,

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = I_f + \iint_A \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (11.209)$$

其中, $I_f = I_B + I_L$ 。对图 11.22 左图中的虚线, 即积分平面的一部分, 沿着谐振腔侧壁绕行一周积分后, 有

$$0 = (I_B + I_L) + I_C \quad (11.210)$$

其中, $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0$, 因为谐振腔侧壁无切向分量的磁场。这里的 $I_C = \epsilon_0 \iint_A \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ 为位移电流, 对应在谐振腔间隙产生的随时间改变的电场。此即基尔霍夫电流定律 (Kirchhoff current law)。虽然在第一章介绍位移电流时, 将其写成 I_D , 这里我们写成 I_C 。由上讨论, 可以看到, I_B 为束团前进时的电流, I_L 表征谐振腔两侧产生的感应电流, I_C 为谐振腔间隙附近由于正负电荷积累产生的等效的位移电流。三者满足 $I_B + I_L + I_C = 0$ 。忽略谐振腔入口之前与出口之后的金属真空管道的影响, 在谐振腔入口出口处, 可视为等效电路的节点 (node), 且入口、出口的间隙正负电荷积累产生的等效电流就像电容。在谐振腔两侧附近磁场与感应电流 I_L 互生, 就像电感。于是, 束团经过谐振腔产生的“场”可以用集总元件并联的 RLC 等效电“路”描述。怎么会有电阻? 等效电阻可以视为由于谐振腔金属两侧管壁的有限大电阻率的集总效应, 可以当做寄生在电感旁边的电阻 r , 参考图 11.22(中)。或者, 当此寄生电阻 $r \ll \sqrt{L/C}$ 时, 可额外并联出来视为贡献焦耳热效应, 参考图 11.22(右)。分出来的电阻称分路阻抗 (shunt impedance) R_S , 有 $R_S = \sqrt{\frac{L}{rC}}$ 。

基于并联 RLC 等效电路的动力学过程可写成如下积分-微分方程式 (integro-differential equation), 有

$$C \frac{dV}{dt} + \frac{1}{R_S} V + \frac{1}{L} \int_0^t V d\tau = -I_B \quad (11.211)$$

伴随有限大电导率或非零寄生电阻, 有品质因数 Q 。电路理论学过, 以上等效 RLC 电路的特征振荡频率有 $\omega_R = 1/\sqrt{LC}$ 。电气专业的读者应该能很快联想到, 当束团经过谐振腔时, 电流 I_B 的频率成分中如果含有 ω_R 时, 就容易使谐振腔“共振”, 即在谐振腔两侧的磁场、在入口出口处的电场振幅变得越来越大。

略去推导, 上式积分-微分方程式可改写成二阶微分方程, 有

$$\ddot{V}(t) + 2\frac{\omega_R}{2Q}\dot{V}(t) + \omega_R^2 V(t) = -\frac{\omega_R R_S}{Q} \dot{I}_B(t) \quad (11.212)$$

其中,

$$\frac{1}{C} = \frac{\omega_R R_S}{Q}, \quad \omega_R^2 = \frac{1}{LC} \quad (11.213)$$

回顾一下, 我们在 §1.13 介绍谐振腔的时候定义过谐振腔的品质因数、分路阻抗等。当时, 分路阻抗被视为粒子能够从谐振腔得到的能量增益; 这里则视为在谐振腔中贡献焦耳热的等效寄生电阻。总体来说, 分路阻抗越大表征束团与谐振腔的交互作用越显著, 无论是能量增益或能量损失。

注 以上为单模 (single-mode) 的 RLC 等效电路模型, 一般谐振腔不只一个模, 对多模 (multi-mode) 情况, 可以推广 RLC 等效电路模型, 有

$$V_T(t) = \sum_{n=1}^N V_n(t) \quad (11.214)$$

其中, N 为模式总数。第 n 个模对应的二阶微分方程有

$$C_n \ddot{V}_n(t) + \frac{\dot{V}_n(t)}{R_{S,n}} + \frac{V_n(t)}{L_n} = -\dot{I}_B(t) \quad (11.215)$$

等效电路模型可参考图 11.23, 细节此处不论。

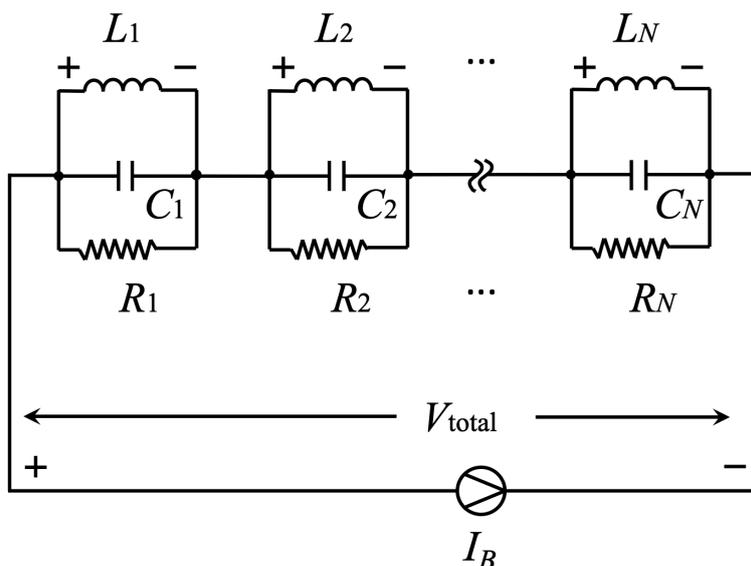


图 11.23: 束团经过谐振腔时激励的多模等效 RLC 电路模型。图例修改自 P.L. Morton, Introduction to Impedance For Short Relativistic Bunches, SLAC-PUB-6052 (1993). <https://www.slac.stanford.edu/pubs/slacpubs/6000/slac-pub-6052.pdf>。

注 谐振腔如果不是空的、被动的, 而有外部馈入电磁场, 也能推广以上等效电路包含外部激励源, 此时的积分-微分方程等式右边将增加一项外部驱动项, 有

$$C \frac{dV}{dt} + \frac{1}{R_S} V + \frac{1}{L} \int_0^t V d\tau = -I_B + I_G \quad (11.216)$$

其中, 驱动项表征的电流写为 I_G 。



笔记 对粒子经过谐振腔的等效电路模型感兴趣的读者, 可参考 P.L. Morton, Introduction to Impedance For Short Relativistic Bunches, SLAC-PUB-6052 (1993). <https://www.slac.stanford.edu/pubs/slacpubs/6000/slac-pub-6052.pdf>。

11.7.2 类腔结构的阻抗估算

在粒子加速器中, 金属真空管道不可能完全均匀, 比如: 在经历谐振腔等加速结构时, 一般局部管道半径会增加; 在经历如波荡器等插入节时, 为了提高有效磁场强度, 局部管道半径可能减小。在还没有完整、细致的加速器传输管道 (beam pipe) 设计参数

之前，对腔体结构阻抗的快速评估与其对集体效应的影响是很重要的，同时具有现实意义。在许多加速器中，金属真空管道有各种各样的类腔结构 (cavity-like structure)，类腔结构的尺寸一般与真空管道尺寸相近，如图 11.24 所示，对类腔结构来说，唯一的参量为 b 。

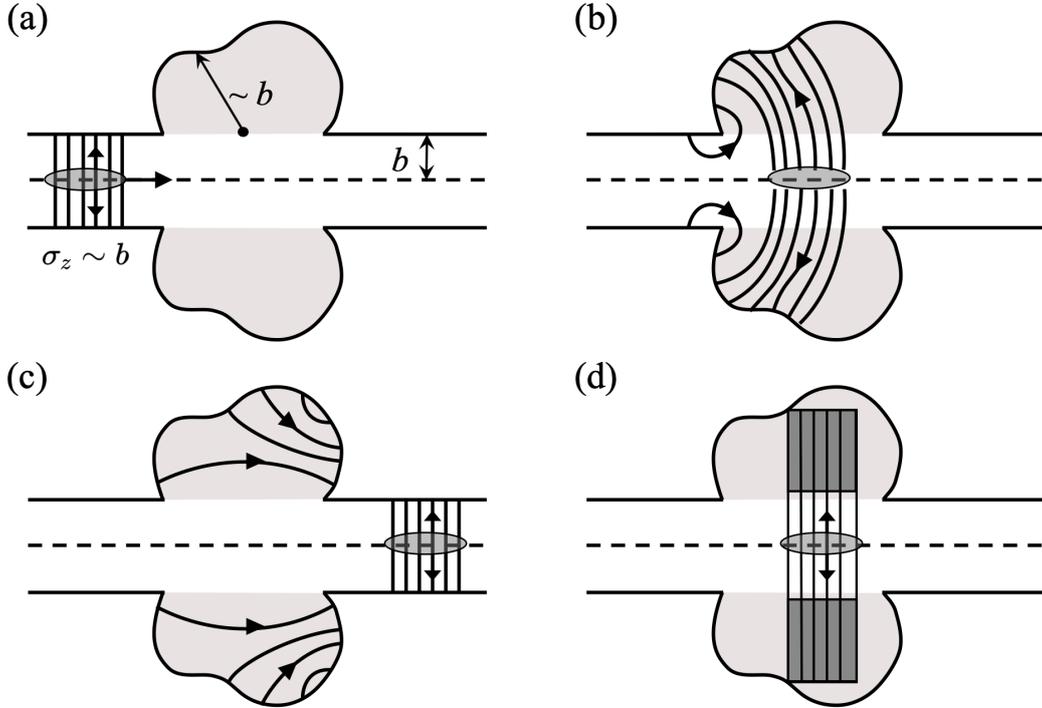


图 11.24: 加速器类腔结构，其结构尺寸与真空管道尺寸相近。对类腔结构来说，唯一的参量为 b 。(a,b,c) 为束团进入前、在内部、离开后的尾场示意图。此处假设束团长度与结构尺寸、真空管道尺寸也在同一个数量级。图例修改自 Alexander Wu Chao, *Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators*, John Wiley & Sons (1993)。

在继续讨论之前，先给出以下的预备定理。

定理 11.16. 类腔结构尾场、阻抗的数量级估算

回忆 §11.5，如果采用经典教科书基于 $\cos m\theta$ 环束 (ring beam) 的定义，则横向与纵向尾场函数不再限于点束团。对任意横向分布的束团，在圆柱坐标系，其电荷密度与电流密度可以分阶展开^a。细节不论，以此方式定义的尾场函数与阻抗，对唯一参量 b 的类腔结构的 m 阶横纵尾场函数与阻抗的数量级可估算如下：(SI/MKS 单位制)

$$\begin{aligned} W_{\parallel, m \geq 0}(z) &\approx \frac{Z_0 c}{4\pi} \frac{1}{b^{2m+1}} \\ W_{\perp, m \geq 1}(z) &\approx -\frac{Z_0 c}{4\pi} \frac{1}{b^{2m}} \end{aligned} \quad (11.217)$$

此处暂不纠结正负号。

根据傅里叶变换定义, 忽略 $e^{-ikz} \sim 1$, $\int_{-\infty}^{\infty} dz/c \rightarrow b/c$, 对应的阻抗函数有

$$\begin{aligned} Z_{\parallel, m \geq 0}(\omega) &\approx \frac{b}{c} W_{\parallel, m \geq 0} \approx \frac{Z_0}{4\pi} \frac{1}{b^{2m}} \approx \frac{1}{b^{2m}} \times 30 \Omega \\ Z_{\perp, m \geq 1}(\omega) &\approx i \frac{b}{c} W_{\perp, m \geq 1} \approx i \frac{Z_0}{4\pi} \frac{1}{b^{2m-1}} \approx \frac{i}{b^{2m-1}} \times 30 \Omega \end{aligned} \quad (11.218)$$

以上结果将作为类腔结构尾场、阻抗的数量级估算。

注 以下分析仅关注 $m = 0, m = 1$ 。

注 有时候, 关联不同阶之间的阻抗很有用。利用量纲分析, 有

$$Z_{\parallel, m \geq 1} \sim \frac{2}{b^{2m}} Z_{\parallel} \quad \text{或} \quad Z_{\perp, m \geq 1} \sim \frac{2c}{b^{2m}\omega} Z_{\parallel} \quad (11.219)$$

对 $m = 0, m = 1$, 有以下实用公式

$$Z_{\perp} \sim \frac{2c}{b^2\omega} Z_{\parallel} \quad \text{或} \quad Z_{\perp} \sim \frac{2R}{b^2} \frac{Z_{\parallel}}{n} \quad (11.220)$$

其中, $n = \omega/\omega_0$, $\omega_0 = c/R$ 。

证明 参考 Alexander Wu Chao, *Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators*, John Wiley & Sons (1993) 一书。

性质 11.9. 圆柱截面电阻壁横纵向阻抗函数关系

作为一个意外、但实用的结果, 上面近似表示式 $Z_{\perp} \sim \frac{2c}{b^2\omega} Z_{\parallel}$ 对“圆柱截面电阻壁”阻抗恰好 准确成立, 其横纵向阻抗可以按此式相互关联, 写成

$$Z_{\perp}(\omega) = \frac{2c}{b^2\omega} Z_{\parallel}(\omega) \quad (11.221)$$

其中, b 为金属真空管壁半径。由于电阻壁纵向阻抗 $Z_{\parallel} \propto 1/b$, 因此, 其横向阻抗 $Z_{\perp} \propto 1/b^3$ 。当管壁半径减小时, 电阻壁横向阻抗增加非常显著, 将导致时常令人头痛的电阻壁横向耦合束团不稳定性(参考 §13.8.6 介绍)。□

^a

$$\rho = \sum_{m=0}^{\infty} \rho_m \quad \text{与} \quad \mathbf{J} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{J}_m$$

其中,

$$\begin{aligned} \rho_m &= \frac{I_m}{\pi a^{m+1} (1 + \delta_{m0})} \delta(s - ct) \delta(\rho - a) \cos m\theta \\ \mathbf{J}_m &= c\rho_m \hat{\mathbf{s}} \end{aligned}$$

其中, a 为束团中心偏离轴心的距离。多极矩系数 I_m 定义为

$$I_m = \text{Re} \iiint (x + iy)^m \rho dV$$

对偏离轴心 $\rho = a$ 的单粒子而言, $I_m = qa^m$ 为总电荷 q 的 m 阶矩。对均匀环型电荷分布, $I_m = q$, 当 $m = 0$; $I_m = 0$, 当 $m \neq 0$ 。□



笔记 单位长度纵向圆柱截面电阻壁阻抗 $Z_{\parallel}(\omega)$ 在前面 §11.5.1 给出

$$Z_{\parallel}(\omega) = [1 - i \operatorname{sgn}(\omega)] \frac{1}{2bc} \sqrt{\left(\frac{Z_0 c}{4\pi}\right) \frac{2|\omega|}{\pi\sigma}}$$

由此可知，单位长度纵向圆柱截面电阻壁阻抗 $Z_{\parallel}(\omega) \propto \frac{1}{b^3 \sqrt{|\omega|}}$ 。在低频段（对应到时域为长程）、口径狭窄的金属真空管壁，纵向电阻壁阻抗较大。这是典型环形加速器中，导致电阻壁不稳定性（resistive wall instability）——一种横向耦合束团不稳定性——的“元凶”之一。抑制此不稳定性一般需要设计外部反馈系统，也是加速器为什么存在外部横向反馈/阻尼系统的动机之一。相对而言，纵向电阻壁阻抗导致的集体效应一般不是大问题。

根据预备定理，以下试着估算类腔结构的纵向阻抗。实部与虚部分开分析。先从实部开始，思路采用“能量守恒”。由图 11.24，考虑在频率 $\omega \sim c/b$ 附近的电磁场行为，其中， b 同时为类腔结构尺寸、真空管道半径、束长。束团经过类腔结构后，残留在类腔结构内的尾场能量。现在想想，残留在类腔结构内的电磁场能量是否就是束团整体损失的能量？粗略来说，残留在类腔结构内的电磁场能量只占束团损失能量的一半而已。为什么这么说？另一半呢？关键在于我们考虑的对象是频率在 $\omega \sim c/b$ 附近的电磁场行为。第 1 章学过，对 $\omega < c/b$ 的电磁场，确实都局限在类腔结构内了。但是，对高于截止频率 $\omega > c/b$ 的电磁场来说，将弥散在类腔结构外的真空管道中。因此，粗略估算，对局限在类腔结构内 $\omega < c/b$ 的电磁场仅占束团损失能量的一半。因此，如果残留在类腔结构内的电磁场能量写为 $\Delta\mathcal{E}$ ，则束团损失的能量有 $2\Delta\mathcal{E}$ 。好，现在计算 $\Delta\mathcal{E}$ 。束团进入类腔结构前，根据库仑定律与洛伦兹变换，在实验室坐标，束团建立在环境周遭的库仑场可写成（根据 §11.2）

$$\begin{aligned} E_{\rho} &= \frac{2\lambda_0}{4\pi\epsilon_0\rho} \\ B_{\phi} &= \frac{2\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 c\rho} = \frac{E_{\rho}}{c} \end{aligned} \quad (11.222)$$

其中， $\lambda_0 = q/b$ 为束团线密度，假设纵向“均匀”分布。这些场成为束团携带的能量，这些库仑场在离开类腔结构前，被刮出而残留在类腔结构中，因此，残留在类腔结构内的电磁场能量有

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E} &= \iiint w_{\text{EM}} d\mathcal{V} = \iiint \frac{\epsilon_0}{2} (E_{\rho}^2 + c^2 B_{\phi}^2) d\mathcal{V} \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_b^{2b} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^b ds (E_{\rho}^2 + c^2 B_{\phi}^2) \\ &= \epsilon_0 \int_b^{2b} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^b ds \frac{4\lambda_0^2}{8\pi^2 \epsilon_0^2 \rho^2} = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 b} \ln 2 \end{aligned} \quad (11.223)$$

将此能量（的两倍）与束团损失的能量关联起来

$$2\Delta\mathcal{E} \equiv P_{b,\text{loss}} \times \Delta t = I_b^2 \operatorname{Re} Z_{\parallel} \times \frac{b}{c} \quad (11.224)$$

其中， $I_b = \lambda_0 c = qc/b$ 为束团电流，则有

$$\operatorname{Re} Z_{\parallel} \approx \frac{\ln 2}{\pi\epsilon_0 c} \approx 83.1 \Omega \approx 80 \Omega \quad (11.225)$$

回想一下思路，这里求纵向阻抗实部的方式不是通过求纵向尾场、进行傅里叶变换，而

这里用到了集总的概念，即冲量近似。

是通过能量守恒定律估算，然后再与阻抗实部关联，且计算电磁场能量时，场还是横向场。另外，这里假设束团纵向分布为均匀，这个假设是否合理？注意到，我们关注的类腔结构尺寸与束长差不多，因此，当束团进入类腔结构时，可以粗略认为束团差不多为直流分布是合理的。如果束长短于类腔结构尺寸，那么将需要考虑交流分量的贡献。

现在分析虚部，思路采用法拉第感应定律。既然是感应定律，那么直流束团电流不贡献，因此，这里要考虑束团的交流成分。考虑电流 $\tilde{I}_b = \tilde{\lambda}(\omega)c = qce^{-i\omega t}/b$ ，则当束团经过类腔结构时，在凹槽内的磁通 $\Phi = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ 将随时间改变，从而引起纵向感应电场 E_s ，参考图 11.25。根据法拉第感应定律，有

$$\tilde{V} = \int_{\text{gap}} \tilde{E}_s ds = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -(-i\omega) \iint \tilde{B}_\phi dS = \frac{i\omega}{c} \frac{2\tilde{\lambda}}{4\pi\epsilon_0 cb} gd \quad (11.226)$$

注意到，这里采用时谐表示，有 $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$ ，因此电磁场都是频域的时谐量。因此，

$$\tilde{V} = -\tilde{I}_b Z_{\parallel} \Rightarrow Z_{\parallel} = -i\omega Z_0 \frac{gd}{2\pi bc} \equiv -i\omega L \quad (11.227)$$

当 $g \sim b, d \sim b$ 时，可进一步化简，有

$$Z_{\parallel} \approx -i\omega Z_0 \frac{b}{2\pi c} \approx -i \frac{\omega}{c/b} \times 60 \Omega \quad (11.228)$$

到目前为止，我们已经分别得到了类腔结构的实部与虚部阻抗，有

$$Z_{\parallel} = \text{Re } Z_{\parallel} + i \text{Im } Z_{\parallel} \approx 80 \Omega - i \frac{\omega}{c/b} \times 60 \Omega \quad (11.229)$$

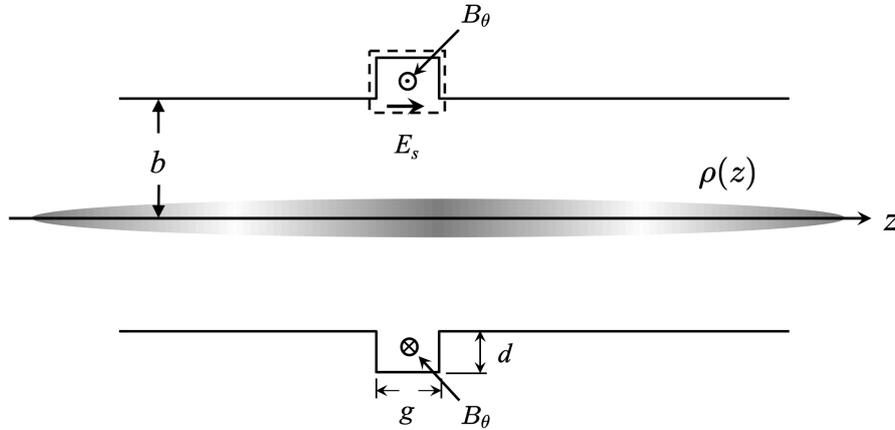


图 11.25: 浅层谐振腔结构，其中， $g \leq d \leq b$ 。当 g, d, b 差不多都在同一数量级时，称类腔结构。此浅层谐振腔结构又称感性结构，主要贡献感性阻抗，即 $\text{Im } Z_{\parallel} < 0$ 为主要成分。图例修改自 Alexander Wu Chao, *Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators*, John Wiley & Sons (1993)。

结合以上讨论的实部与虚部结果与上一节介绍的等效 RLC 模型，可总结为如下定理：

定理 11.17. 等效 RLC 宽带阻抗、短程尾场模型

很多时候对类腔结构的宽带阻抗、短程尾场的粗略估算采用宽带谐振腔模型 (broad-band resonator model)，此模型特性由结构尺寸半径 b 决定。利用等效 RLC

模型概念，有 $Q \approx 1$ 。对纵向阻抗，有

$$R_S \approx 60 \Omega, \quad Q \approx 1, \quad \omega_R \approx \frac{c}{b} \quad (11.230)$$

当 $\omega \approx \omega_R$ 时，有 $Z_{\parallel} \approx \text{Re } Z_{\parallel} \approx R_S$ 。当 $\omega < \omega_R$ 时，虚部为负，感性阻抗主导，有 $Z_{\parallel} \approx \text{Im } Z_{\parallel} \approx -i\omega Z_0 \frac{b}{2\pi c} \approx -i \frac{\omega}{\omega_R} \times 60 \Omega$ 。

根据 Panofsky-Wenzek 定理，对横向阻抗，有

$$R_S \approx 60 \Omega \times \frac{1}{b^2}, \quad Q \approx 1, \quad \omega_R \approx \frac{c}{b} \quad (11.231)$$

当 $\omega \leq \omega_R$ 时，有 $Z_{\perp} \approx \text{Re } Z_{\perp} \approx cR_S/\omega_R$ 。

注 以上模型适用于 $\omega \leq c/b$ ，对更高频成分，等效 RLC 模型失效。

证明 参考 Alexander Wu Chao, *Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators*, John Wiley & Sons (1993) 一书的 pp.84-91。 □

现在考虑一个实际应用：评估储存环全环的总宽带阻抗，可按如下方式估算

$$Z_{\parallel} \approx n_{\text{cav}} \times 60 \Omega \quad (11.232)$$

其中， n_{cav} 是全环类腔结构总数。由于假设每个类腔的长度为 $2b$ ，因此， $n_{\text{cav}} \approx 2\pi R/2b = \pi R/b$ 。这里忽略了临近类腔间的干涉效应。评估环形加速器的集体效应时，往往采用谐波阻抗值 Z_{\parallel}/n ，其中， $n = \omega/\omega_0$ 为谐波数（注意，不是 n_{cav} ）。按以上定理，每个类腔结构的谐波阻抗有

$$\left| \frac{Z_{\parallel}}{n} \right| \text{ (per cavity)} \approx 60 \Omega \times \frac{b}{R} \quad (11.233)$$

因此，全环 n_{cav} 个类腔结构的谐波阻抗有

$$\left| \frac{Z_{\parallel}}{n} \right| \text{ (total)} \approx 60 \Omega \times \frac{b}{R} n_{\text{cav}} \approx 60\pi \Omega = \frac{1}{2} Z_0 \quad (11.234)$$

其中， $Z_0 \approx 377 \approx 120\pi \Omega$ 。以上假设全环均匀填满类腔结构，对仅有部分填满的情况，则有

$$\left| \frac{Z_{\parallel}}{n} \right| \text{ (total)} \approx \frac{f}{2} Z_0 \quad (11.235)$$

其中， f 为填充比例（ $f = 100\%$ 为全填满）。

性质 一般情况， $\frac{Z_{\parallel}}{n}$ 希望控制在 1Ω 或更小。

练习 11.22 参考图 11.26，假设 $b = 5 \text{ cm}$ ，以 $|Z_{\parallel}/n| = 1 \Omega$ 为限，证明全环大约存在多少比例的类腔结构。忽略其它部件的影响。 ■

解 约每 18.85 m 就有类腔结构。 ■

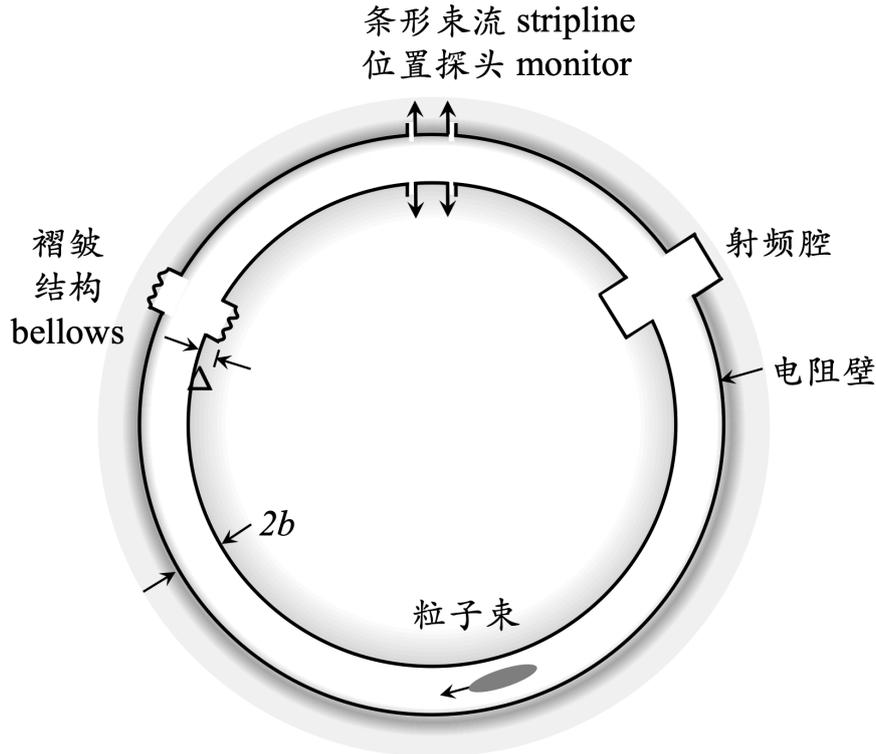


图 11.26: 加速器中可能贡献阻抗的部件, 包含 RF cavity 提供窄带阻抗、条带型束测元件 (stripline monitor)、波纹管 (bellows)、电阻壁等。图例修改自 Alexander Wu Chao, Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators, John Wiley & Sons (1993)。

定理 11.18. 四种常见部件的宽带阻抗模型

考虑四种常见宽带阻抗: 浅层小谐振腔结构、电阻壁结构、表面粗糙结构、类腔结构。

- 如图 11.25 的浅层 (shallow-cavity structure) 或小谐振腔结构 (small-cavity structure), 即 $g \leq d \leq b$, 低频阻抗由感性成分主导, 有

$$Z_{\parallel}(\omega) = -i\omega Z_0 \frac{gd}{2\pi bc} \quad Z_{\perp}(\omega) \approx -iZ_0 \frac{gd}{\pi b^3} \quad (11.236)$$

成立范围: $\omega \ll c/b$ 。

由于小谐振腔的截止频率较高, 忽略弥散到真空管道的电磁能量, 则对 $g \ll b$ 且短束长 $\sigma_z \sim g$ 的情况, 对单个小谐振腔结构, 有实部阻抗

$$Z_{\parallel}(\omega) \approx \frac{Z_0 g}{2\pi b} \quad (11.237)$$

或谐波阻抗 $|Z_{\parallel}/n|$, 其中, $n = \omega/\omega_0, \omega_0 = c/R$ 。假设小谐振腔长度 $\approx 2g$, 全环的谐波阻抗有

$$\left| \frac{Z_{\parallel}}{n} \right| \text{ (total)} \approx Z_{\parallel}(\omega) \times \frac{2\pi R \omega_0}{2g \omega} \approx \frac{Z_0 g}{2 b} \quad (11.238)$$

成立范围: $\omega \sim c/g$ 。

- 电阻壁阻抗可以视为深度为趋肤深度的均匀、浅层结构阻抗。将以上 g 以趋

肤深度 $\delta_{\text{skin}} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}}$ 代换^a, 则有

$$\begin{aligned} Z_{\parallel}(\omega) &\approx \frac{Z_0 \delta_{\text{skin}}}{2\pi b} = \frac{Z_0 \delta_{\text{skin}}^2}{2\pi b \delta_{\text{skin}}} = \frac{Z_0}{2\pi b \delta_{\text{skin}}} \frac{2}{\omega\mu_0\sigma} \\ \Rightarrow \frac{Z_{\parallel}(\omega)}{2b} &\approx \frac{Z_0}{2\pi b^2 \delta_{\text{skin}}} \frac{b}{c\mu_0\sigma} = \frac{1}{2\pi b \delta_{\text{skin}} \sigma} \end{aligned} \quad (11.239)$$

其中, $Z_0 = c\mu_0$, σ 为金属电导率。成立范围: $\omega \sim c/b$ 。室温情况下, 常见金属电导率有 (SI/MKS 单位制)

$$\sigma = \begin{cases} 3.5 \times 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}, & \text{铝 (aluminum)} \\ 5.9 \times 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}, & \text{铜 (copper)} \\ 1.4 \times 10^6 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}, & \text{不锈钢 (stainless steel)} \end{cases}$$

- 表面粗糙阻抗可以将表面凹凸不平的深度尺度视为 $\pm g/2$, 则有

$$\left| \frac{Z_{\parallel}}{n} \right| \text{ (total)} \approx \frac{Z_0 g}{4 b} \quad (11.240)$$

成立范围: $\omega \sim c/g$ 。

- 对单个类腔结构 $g \sim b$ 且束长 $\sigma_z \sim b$ 的情况, 有单个虚部阻抗

$$Z_{\parallel} \approx -i\omega Z_0 \frac{b}{2\pi c} \approx -i \frac{\omega}{c/b} \times 60 \Omega \quad (11.241)$$

或单个谐波阻抗

$$\left| \frac{Z_{\parallel}}{n} \right| \text{ (per cavity)} \approx 60 \Omega \times \frac{b}{R} \quad (11.242)$$

全环则有

$$\left| \frac{Z_{\parallel}}{n} \right| \text{ (total)} \approx \frac{f}{2} Z_0 \quad (11.243)$$

其中, f 为填充比例 ($f = 100\%$ 为全填满)。

注 对单个浅层谐振腔结构, 涉及辐射衍射分析的理论称 Fraunhofer 衍射 (Fraunhofer diffraction)。对单个深层谐振腔结构, 涉及辐射衍射分析的理论称 Fresnel 衍射 (Fresnel diffraction)。

^a对一般常见金属管壁, 当电磁波频率为 f 时, 有

$$\delta_{\text{skin}}[\text{mm}] = \frac{1}{\sqrt{f[\text{MHz}]}} \times \begin{cases} 0.066, & \text{铜 (copper)} \\ 0.086, & \text{铝 (aluminum)} \\ 0.43, & \text{不锈钢 (stainless steel)} \end{cases}$$

□

稍微总结一下上面介绍的阻抗估算的分析套路。纵向阻抗的实部按能量守恒估算, 虚部则利用法拉第感应定律。再来, 结合纵向阻抗的实部与虚部之后, 利用等效 RLC 模型给出模型参数 $R_S, Q \approx 1, \omega_R \approx c/b$ 。横向阻抗则在此基础上利用 Panofsky-Wenzel 定理给出。活用之后, 可以应用在浅层小谐振腔结构、电阻壁结构、表面粗糙结构、类腔结构等的阻抗估算。

以上尽管不是非常精确但却是实用的分析，其成立范围为 $\omega \leq c/b$ 。对更高频的分析，以上论证方式不再适用，需要其它更高频的分析方式，称衍射模型 (diffraction model)。最早由 J.D. Lawson 提出。以下简短介绍。

对更高频的阻抗估算，关键在如何更合理给出阻抗的频率依存关系 $Z_{||}(\omega)$ 。前面介绍估算 (相对低频的) 阻抗实部的方式时，常将 ω 以 c/b 代换，现在就不能这么做。此外，前面将束团经过类腔结构的时间长度以 b/c 代换，容易使阻抗中的频率依存关系不小心“抵消”。为了避免此一情况，这里尽量考虑“功率密度”，即坡印廷向量 $\mathbf{S} = S_z \mathbf{e}_z$ ，而不是对时间积累的“能量”。

进入谐振腔结构前，束团携带的坡印廷向量有

$$S_{z0} = E_y H_x = \frac{E_y B_x}{\mu_0} = \frac{4\lambda_0^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 \mu_0 c b^2} \quad (11.244)$$

其中，电磁场即为前面介绍的空间电荷场

$$\begin{aligned} E_\rho &= \frac{2\lambda_0}{4\pi\epsilon_0\rho} \approx E_y \\ B_\phi &= \frac{2\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 c\rho} = \frac{E_\rho}{c} \approx -B_x \end{aligned} \quad (11.245)$$

这里我们将圆柱坐标的量近似考虑为直角坐标的量。接着，我们利用波动光学 (wave optics) 中的 **Fresnel 衍射定理**，即此坡印廷向量经过衍射后，可以 Fresnel 积分因子表示，有

$$S_z(y) \equiv S_{z0}\Phi(u) = S_{z0}\frac{1}{2} \left\{ \left[\mathcal{C}(u) + \frac{1}{2} \right]^2 + \left[\mathcal{S}(u) + \frac{1}{2} \right]^2 \right\} \quad (11.246)$$

其中， $u = y\sqrt{\frac{2}{\lambda g}}$ ，这里的 \mathcal{C}, \mathcal{S} 称 Cornu spiral 或 Euler spiral 或 clothoid(回旋曲线) 或 Fresnel 积分，定义为

$$\mathcal{C}(u) + i\mathcal{S}(u) \equiv \int_0^u e^{i\frac{\pi}{2}t^2} dt \quad (11.247)$$

此积分具有如下结果

$$\int_{-\infty}^0 \Phi(u) du = \frac{1}{2\pi} \quad (11.248)$$

练习 11.23 Cornu spiral 是一种特殊曲线，表征瞬时位置的曲率与该位置经历的曲线长度有关，多应用于道路或铁路从直线段到弯转段间的过渡曲线 (transition curve) 的设计。利用 MATLAB 画出 Cornu spiral 的 $\mathcal{C}(u), \mathcal{S}(u)$ 随 u 变化的函数与 $\mathcal{B}(u) = \mathcal{C}(u) + i\mathcal{S}(u) \in \mathbb{C}$ 在复平面对 u 的参数化形式。 ■

解 参考 https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_spiral ■

回到主题，阻抗实部可与衍射电磁场功率关联，因此，先计算衍射电磁场功率，即图 11.27 中的灰色区域的电磁场功率。将衍射后的坡印廷向量对横向区域面积积分，有

$$2\pi b \int_{-\infty}^0 S_z(y) dy = 2\pi b \sqrt{\frac{\lambda g}{2}} \frac{4\lambda_0^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 \mu_0 c b^2} \int_{-\infty}^0 \Phi(u) du \quad (11.249)$$

代入计算主值积分³¹，利用

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\omega'}(\omega' - \omega)} d\omega' = \frac{\pi}{\sqrt{-\omega}}, \quad \omega < 0 \quad (11.253)$$

其中，要求 $\text{Re} \omega < 0, \text{Im} \omega = 0$ 。于是，纵向阻抗虚部有

$$\begin{aligned} \text{Im} Z_{\parallel}(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\text{Re} Z_{\parallel}(\omega')}{\omega' - \omega} = -\frac{1}{\pi} \frac{Z_0}{2\pi^{3/2}} \frac{\sqrt{cg}}{b} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{1}{\omega' - \omega} \\ &= -\frac{Z_0}{2\pi^{3/2}} \frac{\sqrt{cg}}{b} \frac{1}{\sqrt{-\omega}} = \frac{Z_0}{2\pi^{3/2}} \frac{\sqrt{cg}}{b} \text{sgn}(\omega) \frac{\pi}{\sqrt{|\omega|}}, \quad \omega < 0 \end{aligned} \quad (11.254)$$

再利用纵向阻抗在复平面的对称特性

$$\begin{aligned} \text{Re} Z_{\parallel}(-\omega) &= \text{Re} Z_{\parallel}(\omega) \\ \text{Im} Z_{\parallel}(-\omega) &= -\text{Im} Z_{\parallel}(\omega) \end{aligned} \quad (11.255)$$

最终纵向阻抗可写成

$$Z_{\parallel}(\omega) = [1 + \text{sgn}(\omega)i] \frac{Z_0}{2\pi^{3/2}} \frac{1}{b} \sqrt{\frac{cg}{|\omega|}} \quad (11.256)$$

感兴趣的读者应自行验证此结果。

对应的短程纵向尾场函数为

$$W_{\parallel}(z < 0) = \frac{Z_0 c}{4\pi} \frac{2\sqrt{2g}}{\pi b} |z|^{-1/2} \quad (11.257)$$

按类似思路，横向阻抗函数有

$$Z_{\perp}(\omega) = [1 + \text{sgn}(\omega)i] \frac{Z_0 c}{\pi^{3/2}} \frac{1}{b^3} \sqrt{\frac{cg}{|\omega|^3}} \quad (11.258)$$

对应的短程横向尾场函数为

$$W_{\perp}(z < 0) = -\frac{Z_0 c}{4\pi} \frac{8\sqrt{2g}}{\pi b^3} |z|^{1/2} \quad (11.259)$$

对高频、单个谐振腔阻抗的一般特性，可总结为如下定理：

定理 11.19. 高频、单个谐振腔阻抗的定标关系

对高频、单个谐振腔阻抗，恒有

$$Z_{\parallel}(\omega) \propto \sqrt{\frac{g}{\omega}}, \quad Z_{\perp}(\omega) \propto \sqrt{\frac{g}{\omega^3}} \quad (11.260)$$

其中， g 为谐振腔长度。

注 对高频、多个谐振腔，按周期形成的串列结构，将不再遵从上面的定标关系。对纵向阻抗，一般有 $Z_{\parallel}(\omega) \propto \omega^{-3/2}$ 。细节此处不论，感兴趣的读者可自行参考相关文献。 □



笔记 回顾一下上面分别介绍的中低频 $\omega \leq c/b$ 与高频 $\omega \gg c/b$ 阻抗的分析思路与估算方式。



笔记 此小节介绍了单个类腔结构的阻抗估算。除了单个类腔结构，还有“半个”类腔结

³¹可通过 Mathematica 指令 `Integrate[1/(Sqrt[w] (w - \omega)), w, -\infty, \infty, PrincipalValue -> True]` 得到。

构³², 包含骤变的 step-in 或 step-out 结构、缓变的 taper-in 或 taper-out 结构, 还有多个、按周期形成的串列结构, 这些也可以按照类似的思路粗略估算其阻抗。差别是, 对多个串列的类腔结构, 当考虑的频率低于截止频率时, 因为尾场不会泄露到临近类腔结构, 因此其结果与单个类腔结构不会有明显区别。也就是说, 对多个串列的类腔结构, 我们更关心的是高于截止频率的阻抗成分, 此时对应的是几个类腔结构可视为耦合谐振子, 随着临近结构的相位差, 存在不同耦合模式。此时高频阻抗一般有 $\omega^{-3/2}$ 定标关系。对此讨论有兴趣的读者可自行参考相关文献, 如: R.L. Gluckstern, Longitudinal impedance of a periodic structure at high frequency, Phys. Rev. D **39**, 2780 (1989). <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.39.2780>

结束此小节前, 我们说明一下, 这里的衍射模型从 Fresnel 衍射定理开始, 虽然没有详细介绍该衍射定理。对那些对此种处理方式不甚满意、觉得不够严谨的读者, 可以通过傍轴波方程 (paraxial wave equation) 开始。傍轴波方程是完整波方程的近似版本, 假设电磁场传播方向贴近中心轴以小角度传播, 此时 $\partial/\partial z \ll k = 2\pi/\lambda$ 。由此讨论知, 傍轴波方程成立的前提为极高频或极短波长 ($\lambda \ll 1$) 情况。由于已经假设小角度沿轴传播, 因此傍轴波方程的解仅考虑电磁场往前传播的解 (forward-wave solution), 忽略了电磁场的返波解 (backward-wave solution)。

傍轴波方程 回顾一下 §1.22 介绍过的内容。这里简单说明从完整波方程到傍轴波方程的推导。由 §1.2 知, 在自由空间中, 完整波方程有

$$\nabla^2 \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (11.261)$$

简化起见, 考虑电场或磁场其中之一, 且考虑其中一个方向分量, 如: x , 则

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \quad (11.262)$$

对其它方向分量或磁场, 以下分析都适用。

傍轴波方程基于两个假设:

1. 假设解的形式为³³

$$E_x(x, y, z, t) = \tilde{u}(x, y, z) e^{-i\omega t + ikz} \quad (11.263)$$

其中, $\omega = kc$ 。

2. 傍轴近似 $\Rightarrow \tilde{u}$ 为缓变函数³⁴, 即

$$\left| \frac{1}{\tilde{u}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right| \ll k \quad (11.264)$$

或简单写成 $\partial/\partial z \ll k$, 其中, $k = 2\pi/\lambda$ 。

³²其实, “半个”就不叫类腔, 而称步阶 (step) 结构或缓变 (taper) 结构。

³³留意, 这里 \tilde{u} 还保留 z 的函数依存关系。因此, $\tilde{u}(x, y, z)$ 或许写成 $\tilde{u}(x, y, z; k)$ 更合适。

³⁴其实, 这里 \tilde{u} 不仅对 z 缓变, 对 x, y 也缓变。

根据以上两个假设, 即可得傍轴波方程, 有

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} = 0 \quad (11.265)$$

其中, 忽略了二阶微分项 $\partial^2/\partial z^2$ 。如果写成圆柱坐标形式, 利用 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则傍轴波方程有

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \rho} + 2ik \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} = 0 \quad (11.266)$$

此偏微分方程为抛物线型 (parabolic) 偏微分方程。

练习 11.24 无论是直角坐标或圆柱坐标, 这里给出的傍轴波方程的参考轴 z 都在直线段上。如果是曲线坐标, 即 Frenet-Serret 坐标系, 则傍轴波方程需要修改。试推导 Frenet-Serret 坐标系下的傍轴波方程。 ■

解

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + \frac{2k^2 x}{\rho^2} \tilde{u} + 2ik \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s} = 0 \quad (11.267)$$

其中, ρ 为 xs 平面上的弯转半径。这里的 z 应写为 Frenet-Serret 坐标系中的 s 。当 $\rho \rightarrow \infty, s \rightarrow z$ 时, 上式退化为直线段傍轴波方程。 ■

笔记 由此傍轴波方程衍生的关于尾场、阻抗的计算, 可以参考 Gennady Stupakov, Using the parabolic equation for calculation of beam impedance, New J. Phys. **8** 280 (2006). <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1367-2630/8/11/280/pdf>

11.7.3 几何光学近似分析

上一小节介绍了类腔结构在中低频 $\omega \leq c/b$ 与高频 $\omega \gg c/b$ 阻抗的分析思路与估算方式。衍射模型给出当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, $Z_{\parallel, \perp} \rightarrow 0$, 即在极高频时失效。对极高频或极短尾场特征长度或极短束长, 此时可采用几何光学近似分析 (geometric optics approximation 或 optical approximation)。以下总结几何光学近似分析的结论:

定理 11.20. 几何光学近似尾场与阻抗函数

对极高频情况, 基于几何光学近似分析知 (测试粒子在后方 $z < 0$)

- 纵向阻抗 Z_{\parallel} 为纯实数 (无虚部), 且与频率无关。
- 纵向尾场函数 $W_{\parallel} \propto \delta(z)$, 束团整体的尾场为 $\mathcal{W}_{\parallel}(z) \propto \lambda(z)$, 其中, $\lambda(z)$ 为束团纵向分布函数。
- 横向阻抗 Z_{\perp} 为纯实数 (无虚部), 与频率成反比 $Z_{\perp} \propto 1/\omega$ 。
- 横向尾场函数 $W_{\perp} \propto H(-z)$, 其中, H 为单位阶跃函数 (unit step function)。束团整体的尾场为 $\mathcal{W}_{\perp}(z) \propto \int_{-\infty}^z \lambda(z') dz'$, 其中, $\lambda(z)$ 为束团纵向分布函数。

证明 参考 G. Stupakov, K.L.F. Bane, and I. Zagorodnov, Optical approximation in the theory of geometric impedance, Phys. Rev. ST Accel. Beams **10**, 054401 (2007). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.10.054401> □

11.7.4 尾场与阻抗模型公式

尽管这一章只重点介绍了三种涉及集体效应的电磁场模型，如能善用它们，或许能定性解读许多更复杂的物理现象。比如：考虑谐振腔的侧壁为有限电导率金属时，由此效应导致的部分能量损耗可以通过上一节的结果估算。这里介绍的谐振腔结构也未必要实际对应“谐振腔”，它可以是真空管壁在加速器管道某个位置半径突变的结构。

尽管上面介绍的三种电磁场模型已经是简化模型，有些时候，我们可能需要更简化的模型，比如：假设尾场函数为常数或三角函数，虽然这些模型已经由于过度简化而不满足物理实际，但偶尔仍有实用性。此种情况的尾场函数与对应的阻抗函数整理如下：

定理 11.21. 特殊尾场函数及其阻抗函数

考虑以下几种特殊函数形式：

- 对纵向常数尾场函数，写为

$$W_{\parallel}(z) = \begin{cases} 0, & z > 0 \\ \frac{1}{2}W_0, & z = 0 \\ W_0, & z < 0 \end{cases} \quad (11.268)$$

对应的阻抗函数有

$$Z_{\parallel}(k) = \frac{W_0}{ck} [i + \pi k \delta(k)] \quad (11.269)$$

又称容性尾场、容性阻抗。

- 对纵向指数衰减尾场函数 ($\alpha > 0$)，写为

$$W_{\parallel}(z) = \begin{cases} 0, & z > 0 \\ \frac{1}{2}W_0, & z = 0 \\ W_0 e^{\alpha z}, & z < 0 \end{cases} \quad (11.270)$$

对应的阻抗函数有

$$Z_{\parallel}(k) = \frac{W_0}{c} \frac{1}{\alpha - ik} \quad (11.271)$$

当 $\alpha \rightarrow 0^+$ 时，退化为常数尾场与阻抗函数。

- 对纵向零阶贝塞尔函数形式的尾场函数 ($\alpha > 0$)，写为

$$W_{\parallel}(z) = \begin{cases} 0, & z > 0 \\ \frac{1}{2}W_0, & z = 0 \\ W_0 \mathcal{J}_0(\alpha z), & z < 0 \end{cases} \quad (11.272)$$

对应的阻抗函数有

$$Z_{\parallel}(k) = \begin{cases} -i \frac{W_0 \operatorname{sgn}(k)}{c\sqrt{k^2 c^2 - \alpha^2}} & \text{if } |k| > \alpha \\ \frac{W_0}{c\sqrt{\alpha^2 - k^2 c^2}} & \text{if } |k| < \alpha \end{cases} \quad (11.273)$$

- 对横向常数尾场函数，写为

$$W_{\perp}(z) = \begin{cases} 0, & z \geq 0 \\ -W_0, & z < 0 \end{cases} \quad (11.274)$$

对应的阻抗函数有

$$Z_{\perp}(k) = \frac{W_0}{ck} [1 - i\pi k \delta(k)] \quad (11.275)$$

- 对纵向余弦尾场函数，写为

$$W_{\parallel}(z) = \begin{cases} 0, & z > 0 \\ \frac{W_0}{2}, & z = 0 \\ W_0 \cos(k_0 z), & z < 0 \end{cases} \quad (11.276)$$

对应的阻抗函数有

$$Z_{\parallel}(k) = i \frac{W_0}{2c} \left(\frac{1}{k - k_0} + \frac{1}{k + k_0} \right) \quad (11.277)$$

- 对横向正弦尾场函数 ($W_0 > 0$)，写为

$$W_{\perp}(z) = \begin{cases} 0, & z \geq 0 \\ -W_0 \sin(k_0 z), & z < 0 \end{cases} \quad (11.278)$$

对应的阻抗函数有

$$Z_{\perp}(k) = -\frac{W_0}{2c} \left[\frac{i}{k - k_0} + \pi \delta(k - k_0) - \frac{i}{k + k_0} - \pi \delta(k + k_0) \right] \quad (11.279)$$

- 对横向指数衰减尾场函数 ($W_0 > 0, \alpha > 0$)，写为

$$W_{\perp}(z) = \begin{cases} 0, & z \geq 0 \\ W_0 z e^{\alpha z}, & z < 0 \end{cases} \quad (11.280)$$

对应的阻抗函数有

$$Z_{\perp}(k) = i \frac{W_0 k}{c(k + i\alpha)^2} \quad (11.281)$$

此为当 $Q = 1/2$ 时的横向 RLC 阻抗函数。

- 对 δ 一阶导纵向尾场函数 (如：纵向空间电荷尾场函数)，写为

$$W_{\parallel}(z) = K \delta'(z) \quad (11.282)$$

对应的阻抗函数有

$$Z_{\parallel}(k) = ik \frac{K}{c} \quad (11.283)$$

又称感性尾场、感性阻抗。

- 对 δ 型横向尾场函数 (如：横向空间电荷尾场函数)，写为

$$W_{\perp}(z) = K \delta(z) \quad (11.284)$$

对应的阻抗函数有

$$Z_{\perp}(k) = i \frac{K}{c} \quad (11.285)$$



笔记 以上为已知尾场函数，给出对应的阻抗函数。以下给出已知阻抗函数，给出对应的尾场函数。

- 对一实常数、纯阻性纵向阻抗（一个实际例子如：step-out 结构），写为

$$Z_{\parallel} = Z_0 A \quad (11.286)$$

其对应的尾场函数有

$$W_{\parallel}(z \leq 0) = Z_0 c A \delta(z) \quad (11.287)$$

- 对一如下形式实部纵向阻抗函数，写为

$$\operatorname{Re} Z_{\parallel}(k) = \begin{cases} R_0, & |k| < k_0 \\ 0, & |k| > k_0 \end{cases} \quad (11.288)$$

则对应的虚部纵向阻抗函数有

$$\operatorname{Im} Z_{\parallel}(k) = \frac{R_0}{\pi} \ln \left| \frac{k + k_0}{k - k_0} \right| \quad (11.289)$$

其对应的尾场函数有

$$W_{\parallel}(z \leq 0) = \frac{2R_0 c}{\pi z} \sin k_0 z \quad (11.290)$$

- 对一容性横向阻抗，写为

$$Z_{\perp}(k) = \frac{Z_0 A}{k} \quad (11.291)$$

其对应的尾场函数有

$$W_{\perp}(z \leq 0) = -Z_0 c A H(-z) \quad (11.292)$$

- 对一感性横向阻抗，写为

$$Z_{\perp}(k) = Z_0 A k \quad (11.293)$$

其对应的尾场函数有

$$W_{\perp}(z \leq 0) = -Z_0 c A \delta'(z) \quad (11.294) \quad \square$$

除上一节介绍过的尾场、阻抗公式外，以下忽略推导细节，这里给出高频、一维纵向空间电荷阻抗、一维纵向相干同步辐射尾场、阻抗与一维周期性谐振腔结构纵向阻抗的结果。

定理 11.22. 高频、一维纵向空间电荷阻抗

前面 §11.6 给出的纵向空间电荷阻抗为低频表示式。这里给出高频表示式。参考图 11.28，基于一维线电荷模型，在自由空间中有下列单位长度纵向空间电荷 (lon-

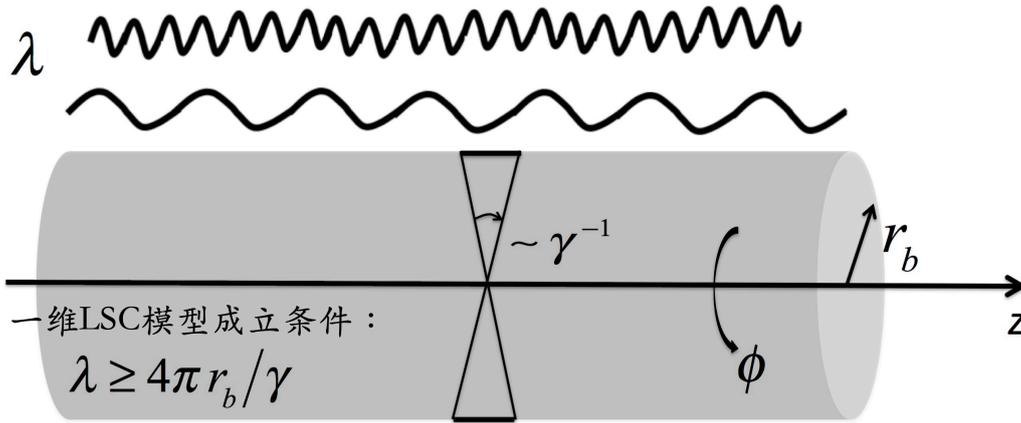


图 11.28: 高频、一维纵向空间电荷阻抗模型示意图。此模型适用范围为波长 $\lambda \geq 4\pi r_b/\gamma$ 。此处 r_b/γ 约为库仑场展开的有效长度尺度, 短于此长度尺度, 则此分析可能失效。

itudinal space charge, LSC) 阻抗:

$$Z_{\text{LSC}}^{\text{on-axis}}(k) = \frac{iZ_0}{\pi\gamma r_b} \frac{1 - \xi_b \mathcal{K}_1(\xi_b)}{\xi_b} \quad (11.295)$$

其中,

- \mathcal{K}_1 为第二类 1 阶修正贝塞尔函数 (modified Bessel function of the second kind)
- $\xi_b = kr_b/\gamma$
- r_b 为束团半径, 一般取 $r_b \approx \frac{1.747}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$

注 成立条件: $\lambda \geq 4\pi r_b/\gamma$

证明 由 §11.2, 纵向空间电荷场的格林函数形式有

$$E_z(x, y, z; x', y', z') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\gamma(z-z')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + \gamma^2(z-z')^2]^{3/2}} \quad (11.296)$$

其中, x, y, z 为测试粒子横向坐标, x', y', z' 为源粒子横向坐标。 $z - z' > 0$ 表示在测试粒子在源粒子前方, $z - z' < 0$ 表示测试粒子在源粒子后方。利用以下技巧将此格林函数展开

$$\begin{aligned} E_z(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma(z-z')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + \gamma^2(z-z')^2]^{3/2}} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= -\frac{iq}{4\pi^2\epsilon_0\gamma^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(z-z')} k \mathcal{I}_m\left(\frac{kr_{<}}{\gamma}\right) \mathcal{K}_m\left(\frac{kr_{>}}{\gamma}\right) \end{aligned} \quad (11.297)$$

其中, $r_{>}$ 表示选择测试粒子 r 或源粒子 r' 横向坐标中较大者, $r_{<}$ 表示选择测试粒

子 r 或源粒子 r' 横向坐标中较小者。对 z 傅里叶变换后, 有

$$\begin{aligned}\tilde{E}_z(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dz E_z(\mathbf{r}; \mathbf{r}') e^{-ikz} \\ &= -\frac{iq}{\gamma^2 \pi} \\ &\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-ikz} \int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa e^{i\kappa(z-z')} \kappa \mathcal{I}_m\left(\frac{\kappa r_{<}}{\gamma}\right) \mathcal{K}_m\left(\frac{\kappa r_{>}}{\gamma}\right) \\ &= -\frac{2iq}{\gamma^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') k e^{-ikz'} e^{im(\phi-\phi')} \mathcal{I}_m\left(\frac{kr_{<}}{\gamma}\right) \mathcal{K}_m\left(\frac{kr_{>}}{\gamma}\right)\end{aligned}\quad (11.298)$$

其中, 对 k 的积分结果为 δ 函数, 同时简化了 κ 积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-i(k-\kappa)z} = 2\pi \delta(k-\kappa) \quad (11.299)$$

假设束团横向为均匀分布, 半径 r_b , 即

$$\rho(\mathbf{r}') = \rho_{\perp}(r', \phi') \rho_z(z') = \frac{\rho_z(z')}{\pi r_b^2} \quad (11.300)$$

则在圆柱坐标系中积分写为

$$\int d\mathbf{r}' = \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_0^{2\pi} \int_0^{r_b} r' dr' d\phi' \quad (11.301)$$

当测试粒子在轴上时, 有 $r=0, \phi=0$ 。由于 $\mathcal{I}_0(0) = 1 \neq 0, \mathcal{I}_{>0}(0) = 0$, 此时仅需考虑 $m=0$, 修正贝塞尔函数化简写为

$$K_m\left(\frac{kr_{>}}{\gamma}\right) \rightarrow K_0(\xi) \quad (11.302)$$

其中, $\xi = kr_{>}/\gamma = kr'/\gamma$ 。利用以下积分公式

$$\int_0^{\xi} x K_0(x) dx = 1 - \xi K_1(\xi) \quad (11.303)$$

则可得单位长度高频、一维纵向空间电荷阻抗

$$Z_{\parallel}(k) = -\frac{\tilde{E}_z(k)}{\tilde{I}(k)} = \frac{iZ_0}{\pi\gamma r_b} \frac{1 - \xi_b \mathcal{K}_1(\xi_b)}{\xi_b} \quad (11.304)$$

其中, $\tilde{I}(k) = q\beta c \tilde{\rho}_z(k)$, $\xi_b = kr_b/\gamma = 2\pi r_b/\gamma\lambda$, 束团密度分布函数的傅里叶变换定义为

$$\tilde{\rho}_z(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dz' \rho_z(z') e^{-ikz'} \quad (11.305)$$

注 细节推导可参考 Marco Venturini, Models of longitudinal space-charge impedance for microbunching instability, Phys. Rev. ST Accel. Beams 11, 034401 (2008). <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.11.034401> □

定理 11.23. 电子束等离子体振荡

对电子束而言, 第 1 章 (§1.3) 定义的等离子体频率可写为

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0}} = \frac{2c}{r_b} \left(\frac{I_b}{\gamma^3 I_A} \right)^{1/2} \quad (11.306)$$

其中,

- n_e 为电子束体密度
- I_b 为电子束电流
- r_b 为束团横向尺寸
- γ 为电子束能量
- $I_A = 17045$ A 为 Alfven 电流

由于纵向空间电荷效应, 电子束在纵向呈现等离子体振荡, 振荡频率 ω_{SC} 有

$$\omega_{SC}(k_0) = c \left[\frac{I_b}{\gamma^3 I_A} k_0 \frac{4\pi |Z_{LSC}(k_0)|}{Z_0} \right]^{1/2} \leq \omega_p \quad (11.307)$$

证明 参考 Z. Huang et al., Suppression of microbunching instability in the linac coherent light source, Phys. Rev. ST Accel. Beams 7, 074401 (2004). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.7.074401>。

定理 11.24. 一维、单一、二极铁相干同步辐射尾场函数

基于一维线电荷模型, 考虑在自由空间中单一个二极铁 (弯转半径 R , 总弯转角度 ϕ_m), 对于极端相对论情况 ($\gamma \rightarrow \infty$), 有以下单位长度相干同步辐射 (coherent synchrotron radiation, CSR) 尾场函数:

$$W_{\parallel}(z > 0) = -\frac{Z_0 c}{4\pi} \frac{2}{3^{4/3} R^{2/3}(s) z^{4/3}} \quad (11.308)$$

其中,

- $Z_0 \approx 377 \approx 120\pi \Omega$ 为真空阻抗, 为一常数
- $z > 0$ 为源粒子前方纵向坐标
- R 为 s 处的瞬时弯转半径
- 此式适用范围^a为 $0 < R/\gamma^3 \ll z \ll R$

留意, 负号表示测试粒子获得能量。当 $z \rightarrow 0^+$ 时, 有

$$W_{\parallel}(0^+) = \frac{Z_0 c \gamma^4}{3\pi R^2} \quad (11.309)$$

正号表示测试粒子失去能量。

证明 参考第15章。

^a此处指的适用范围针对双粒子模型。对束团整体尾场, 将此尾场函数与束团分布函数卷积, 分部积分时可忽略极短距离时的发散问题。一般处理电阻壁尾场 ($\propto z^{-3/2}$) 时也这么做。

定理 11.25. 一维、单一、二极铁相干同步辐射阻抗

基于一维线电荷模型, 考虑在自由空间中单一个二极铁 (弯转半径 R , 总弯转角度 ϕ_m), 对于极端相对论情况 ($\gamma \rightarrow \infty$), 有以下单位长度稳态相干同步辐射 (coherent

synchrotron radiation, CSR) 阻抗:

$$Z_{\text{CSR}}^{\text{s.s.UR}}(k(s); s) = -\frac{iZ_0 k^{1/3}(s)A}{4\pi|R(s)|^{2/3}} \quad (11.310)$$

其中,

- $A = -2\pi \left[\frac{\text{Bi}'(0)}{3} + i\text{Ai}'(0) \right] = 3^{1/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\sqrt{3}i - 1 \approx -0.94 + 1.63i$
- Ai 与 Bi 为 Airy 函数
- k 为波数
- R 为 s 处的瞬时弯转半径

证明 傅里叶变换。

注 上式适用范围: $k < k_c$, 其中, $k_c = \omega_c/c = 3\gamma^3/2R$ 为同步辐射临界波数。此外, 由阻抗特性知, 阻抗虚部正负符号必须变化, 此相干同步辐射阻抗形式不是完整的表示式。 □

练习 11.25 根据尾场函数与阻抗函数互为傅里叶变换的定义, 证明已知相干同步辐射尾场函数, 则有对应的阻抗函数。反之亦然。推导以上结果。提示: 已知尾场函数, 推阻抗相对容易。已知阻抗, 反推尾场函数较难。 ■

定理 11.26. 一维周期性谐振腔结构阻抗

如图 11.29, 一维周期性谐振腔结构阻抗的高频渐进公式可写为

$$Z_{\parallel, \text{linac}}^{\text{UR}}(k) = \frac{iZ_0}{\pi k a^2} \left[1 + (1+i) \frac{\alpha(\gamma)L}{a} \sqrt{\frac{\pi}{kg}} \right]^{-1} \quad (11.311)$$

其中, $\text{Re } Z_{\parallel}(k) \propto k^{-3/2}$

- $\alpha(\gamma) \approx 1 - 0.4648\sqrt{\gamma} - 0.0704\gamma$
- $\gamma = g/L$
- $k = \omega/c$ 为波数
- L 为谐振腔结构周期; g/L 占空比
- b 为谐振腔半径 (cavity pipe radius)
- a 为金属管半径 (beam pipe radius)

利用逆傅里叶变换, 对应的纵向尾场函数有

$$\begin{aligned} W_{\parallel}(z) &\approx \frac{Z_0 c}{\pi a^2} e^{\frac{2\pi\alpha^2 L^2(-z)}{a^2 g}} \text{erfc} \left(\frac{\alpha L}{a} \sqrt{\frac{2\pi(-z)}{g}} \right) \\ &\approx \frac{Z_0 c}{\pi a^2} \exp \left(-\sqrt{\frac{-z}{\zeta}} \right), \quad \zeta = 0.41 \frac{a^{1.8} g^{1.6}}{L^{2.4}} \end{aligned} \quad (11.312)$$

或利用 $Z_{\perp}(\omega) = \frac{2c}{a^2 \omega} Z_{\parallel}(\omega)$ 关系, 得到横向阻抗函数后, 利用逆傅里叶变换, 有横

向尾场函数

$$W_{\perp,x}(z) \approx -\frac{4Z_0c}{\pi a^4} \xi \left[1 - \left(1 + \sqrt{\frac{-z}{\xi}} \right) \exp \left(-\sqrt{\frac{-z}{\xi}} \right) \right], \quad \xi = 0.17 \frac{a^{1.79} g^{0.38}}{L^{1.17}} \quad (11.313)$$

上式拟合结果的适用范围： $s/L \leq 0.15, 0.34 \leq a/L \leq 0.69$ 与 $0.54 \leq g/L \leq 0.89$ 。

证明 参考 K. Yokoya and K. Bane, The longitudinal high-frequency impedance of a periodic accelerating structure, PAC 1999 (TUP105). <https://accelconf.web.cern.ch/p99/PAPERS/TUP105.PDF> 与 K. Bane et al., SLAC-R-580, p.137 <https://cds.cern.ch/record/352676?ln=en> □

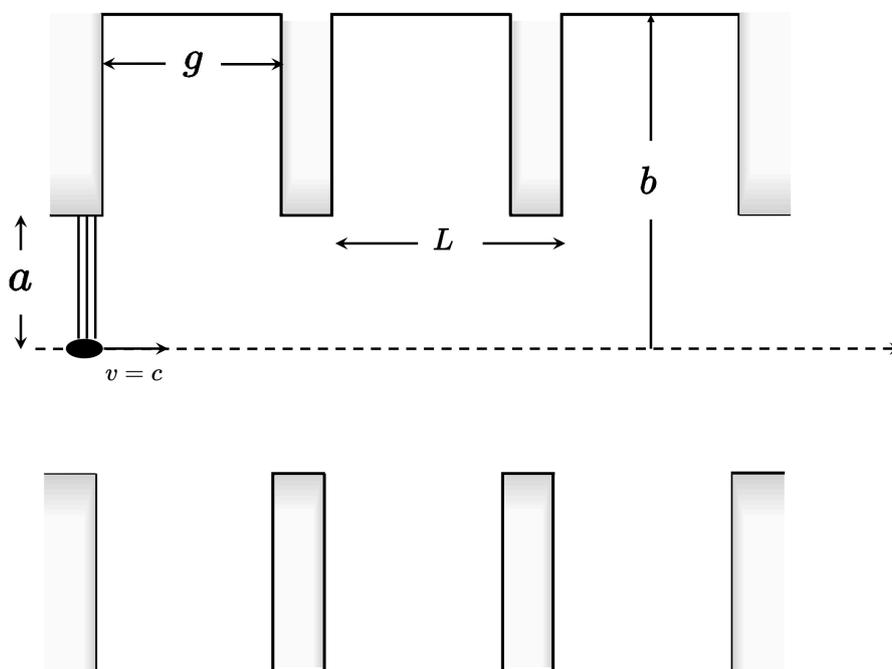


图 11.29: 一维周期性谐振腔结构示意图。

定理 11.27. 考虑反常趋肤效应的电阻壁阻抗公式

对圆柱对称金属管壁，单位长度电阻壁纵向阻抗有

$$Z_{\parallel}(\omega) = -\frac{Z_0}{2\pi b} \frac{1}{\frac{Z_0}{\zeta(\omega)} + i\frac{\omega b}{2c}} \quad (11.314)$$

其中， b 为金属真空管道(内)半径， $\zeta(\omega)$ 为表面阻抗，有

$$\zeta(\omega) = iZ_0 \frac{\omega \ell}{cF(\omega)} \quad \text{SI 单位: Ohm} \quad (11.315)$$

其中， ℓ 为电子平均自由径，一般为给定的物理量。上式中的其它参量有

$$F(\omega) = \frac{\psi}{\pi} \int_0^{\infty} \ln \left[1 + \frac{\kappa + \xi \chi(t)}{t^2} \right] dt \quad (11.316)$$

$$\psi = 1 + i\omega\tau, \quad \tau = \frac{\ell}{v_F}, \quad \kappa = -\frac{\omega^2 \ell^2}{c^2 \psi^2}, \quad \xi = i\frac{\alpha}{\psi^3} \quad (11.317)$$

$$\chi(t) = \frac{2[(1+t^2)\tan^{-1}(t) - t]}{t^3}, \quad \alpha = \frac{3}{2} \left(\frac{\ell}{\delta_{\text{NSE}}} \right)^2 \quad (11.318)$$

$$\delta_{\text{NSE}} = \sqrt{\frac{2c}{Z_0 \sigma_0 \omega}} \quad (11.319)$$

其中, DC 电导率 σ_0 有

$$\sigma_0 = \frac{ne^2 \ell}{mv_F} = \frac{\omega_p^2 \ell}{Z_0 cv_F} \quad (11.320)$$

利用圆柱截面电阻壁特性, 对应的单位长度电阻壁横向阻抗有

$$Z_{\perp}(\omega) = \frac{2c}{b^2 \omega} Z_{\parallel}(\omega) \quad (11.321)$$

关于横纵向阻抗函数的讨论, 可参考 §11.7.2。

对平行板金属管壁, 单位长度电阻壁纵向阻抗有

$$Z_{\parallel}(\omega) = -\frac{Z_0}{\pi h} \int_0^{\infty} \frac{du}{\cosh(u)} \frac{1}{\frac{\cosh(u)}{\zeta(\omega)/Z_0} + i \frac{\omega h}{2cu} \sinh(u)} \quad (11.322)$$

其中, h 为平行板间距 (全高), $\zeta(\omega)$ 为表面阻抗, 如上定理给出。



笔记 考虑反常趋肤效应的电阻壁阻抗情况常见于超导波荡器的阻抗分析。更多讨论可参考 K. Fujita, Impedance computation of cryogenic vacuum chambers using boundary element method, Phys. Rev. Accel. Beams **25**, 064601 (2022). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevAccelBeams.25.064601> 与 G. Stupakov et al., Resistive wall wakefields of short bunches at cryogenic temperatures, Phys. Rev. ST Accel. Beams **18**, 034402 (2015). <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.18.034402>。

□

下面表格节录自 *Handbook of Accelerator Physics and Engineering* 一书中 §3.2.4 的 K.Y. Ng and K. Bane, *Explicit Expressions of Impedances and Wake Functions*, 总结了已知部件的尾场阻抗模型公式与表格中对应的参考文献, 供查阅参考。

General Remarks and Notation:

In cylindrically symmetric structures $W'_m(z)$ and $W_m(z)$ denote, respectively, m -th azimuthal multipole longitudinal and transverse wake functions, generated by point charge Q , at distance $-z > 0$ behind. $W'_m(z) \equiv dW_m(z)/dz$. $W'_m(z) = 0$ and $W_m(z) = 0$ when $z > 0$ when particle travels at the speed of light. $W'_m(0) = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0^-} W'_m(z)$. Longitudinal and transverse momentum kicks on test charge q near pipe axis: $\Delta p_{\parallel}(z) \equiv -qQW'_0(z)/c$, $\Delta p_{\perp}(z) = -qQ\tilde{r}_{\perp}W_1(z)/c$, where \tilde{r}_{\perp} is (small) offset of the source or exciting charge.

The m -th multipole longitudinal impedance $Z_m^{\parallel}(k) = \int e^{-ikz/\beta} W_m^{\parallel}(z) dz / (\beta c)$ is related to the m -th multipole transverse impedance, $Z_m^{\perp}(k) = i \int e^{-ikz/\beta} W_m^{\perp}(z) dz / (\beta^2 c)$, by $Z_m^{\parallel} = k Z_m^{\perp}$ ($m \neq 0$), where $k = \omega/c$. Note that $Z_m^{\parallel}(-k) = Z_m^{\parallel*}(k)$, $Z_m^{\perp}(-k) = -Z_m^{\perp*}(k)$.

For periodic or translationally invariant structures: steady-state results are given per length L . Unless otherwise stated, structures are cylindrically symmetric with perfectly conducting metallic walls, and with beam pipes of radius b . In many cases, $\beta = 1$ is assumed, unless otherwise indicated. $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \approx 377 \Omega$ is impedance, ϵ_0 electric permittivity, and μ_0 magnetic permeability of free space. 'Pill-box cavity' signifies a pill-box with beam pipes. Here $[\alpha \pm i|\beta|]^{1/n}$ (with α, β real, $n = 2$ or 3) is in the 1st/4th quadrant. $H(x) = 0, 1$ for $x \leq 0$.

For 3D structures with mirror symmetry in x and y , near axis momentum kick in y , $\Delta p_y = -qQ(\tilde{y}W_d^y + yW_q^y)$, with \tilde{y} (y) offset of exciting (test) charge, and W_d^y (W_q^y) dipole (quad) wake terms. Total y wake $W_y = W_d^y + W_q^y$; total y impedance $Z_y = Z_d^y + Z_q^y$.

Description	Impedances	Wake
Space-charge: [1] beam radius a in a perfectly conducting beam pipe of radius b , transverse distribution uniform.	$\frac{Z_0^{\parallel}}{L} = i \frac{Z_0 k g_0}{4\pi\beta^2\gamma^2}$ $g_0 = 1 + 2 \ln \frac{b}{a}$ $\frac{Z_{m \neq 0}^{\perp}}{L} = i \frac{Z_0}{2\pi\beta^2\gamma^2 m} \left[\frac{1}{a^{2m}} - \frac{1}{b^{2m}} \right]$	$\frac{W'_0}{L} = \frac{Z_0 c}{4\pi\gamma^2} \left[1 + 2 \ln \frac{b}{a} \right] \delta'(z)$ $\frac{W_{m \neq 0}}{L} = \frac{Z_0 c}{2\pi\gamma^2 m} \left[\frac{1}{a^{2m}} - \frac{1}{b^{2m}} \right] \delta(z)$
Nonuniform distributions: [2] $a_{\text{eff}}^{\parallel}$ is equivalent-uniform-beam radius, $g_0 = 1 + 2 \ln(b/a_{\text{eff}}^{\parallel})$, while $a_{\text{eff}}^{\perp} = [\pi\lambda(0)]^{-1/2}$ is the same when self-force part written as $1/a_{\text{eff}}^{\perp 2}$, $\gamma_e \approx 0.57721$ is Euler's constant.	Distribution $\lambda(r)$ g_0 ($m=0$)	$a_{\text{eff}}^{\parallel}$ ($m=0$) a_{eff}^{\perp} ($m=1$)
	$\frac{3}{2\pi\hat{r}} \left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} H(\hat{r}-r)$ $\frac{8}{3} + 2 \ln \frac{b}{2\hat{r}}$	$0.8692\hat{r}$ $\sqrt{\frac{2}{3}}\hat{r}$
	$\frac{1}{2\pi\hat{r}^2} \left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right) H(\hat{r}-r)$ $\frac{3}{2} + 2 \ln \frac{b}{\hat{r}}$	$0.7788\hat{r}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{r}$
	$\frac{2\pi}{\pi^2-4} \cos^2 \frac{\pi r}{2\hat{r}} H(\hat{r}-r)$ $1.921 + 2 \ln \frac{b}{\hat{r}}$	$0.6309\hat{r}$ $\frac{\sqrt{\pi^2-4}}{\sqrt{2}\pi}\hat{r}$
	$\frac{1}{2\pi\sigma_r^2} e^{-r^2/(2\sigma_r^2)}$ $\gamma_e + 2 \ln \frac{b}{\sqrt{2}\sigma_r}$	$1.7647\sigma_r$ $\sqrt{2}\sigma_r$
	Image part of Z_1^{\perp} can be written in terms of Laslett's electric image coefficients as $1/b^2 \rightarrow 2(\xi_{1x,y} - \epsilon_{1x,y})/h^2$ with h denoting half height of vacuum chamber. See Sec. 2.4.6.	
Resistive wall: [1, 3] wall thickness t , dc and ac conductivities $\sigma_c, \tilde{\sigma}_c$, relaxation time τ ; assume $ k b \gg (s_0/b)^3$, thick walls: $t \gg \delta_c = \sqrt{2/(k Z_0\mu_r\sigma_c)}$, the skin depth.	$\frac{Z_m^{\parallel}}{L} = \frac{Z_0/(\pi b^{2m+1})}{(1+\delta_{m0})\sqrt{\frac{iZ_0\tilde{\sigma}_c}{k\mu_r} - \frac{ibk}{m+1}}}$, $\mu_r = \begin{cases} \text{relative magnetic} \\ \text{permeability} \end{cases}$ $\tilde{\sigma}_c = \sigma_c/(1-ikc\tau)$	Typically, $\tau = 27/40/8$ fs for Cu/Ag/Al. Valid for $c\tau/s_0 \ll 1$, characteristic distance $s_0 = [2b^2\mu_r/(Z_0\sigma_c)]^{1/3}$, $\alpha = [(m+1)(1+\delta_{m0})/2]^{2/3}$.
	$\frac{W'_m}{L} = \frac{4Z_0c(m+1)}{\pi b^{2m+2}} \left[\frac{e^{\alpha z/s_0}}{3} \cos\left(\frac{\sqrt{3}\alpha z}{s_0}\right) - \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\infty} dx \frac{x^2 e^{\alpha x^2/s_0}}{x^6+8} \right]$	

Description	Impedances	Wakes
Low frequency: [1] $k \ll 1/s_0$, long range $ z \gg s_0$. Valid for $kb/\gamma \ll 1$.	$\frac{Z_m^{\parallel}}{L} = \frac{1 - \text{sgn}(k)i}{(1 + \delta_{0m})\pi\sigma_c\delta_c b^{2m+1}}$ Note: $Z_1^{\perp} = \frac{2}{b^2 k} Z_0^{\parallel}$,	$\frac{W'_m}{L} = \frac{-c}{2\pi b^{2m+1}(1 + \delta_{m0})} \sqrt{\frac{Z_0\mu_r}{\pi\sigma_c}} \frac{1}{(-z)^{3/2}}$ $W_1 = \frac{2}{b^2} \int W'_0 dz$
Low frequency, thin wall: [1] $t \ll \delta_c$ and $ k \ll 1/\sqrt{bt}$. Valid for $kb/\gamma \ll 1$.	$\frac{Z_0^{\parallel}}{L} = -\frac{Z_0 kt}{2\pi b}, \quad \frac{Z_1^{\perp}}{L} = -i\frac{Z_0 t}{\pi b^3}$	$\frac{W'_0}{L} = -\frac{Z_0 t c}{2\pi b} \delta'(z), \quad \frac{W_1}{L} = -\frac{Z_0 c t}{\pi b^3} \delta(z)$
High frequency: [3] $k \gtrsim 1/s_0$, short range $ z \lesssim s_0$, with $c\tau \gtrsim s_0$. $k_p = \sqrt{Z_0\sigma_c/c\tau}$ is plasma frequency/ c .	$\frac{Z_m^{\parallel}}{L} = \frac{4Z_0 c\tau(m+1)}{\pi b^{2m+1}} \times \frac{1 - 4ikc\tau}{b(1 - 4ikc\tau)^2 + 32k_p(\alpha c\tau)^2}$	$\frac{W'_m}{L} = \frac{Z_0 c(m+1)}{\pi b^{2m+2}} e^{z/4c\tau} \times \cos\left[\sqrt{\frac{2k_p}{b}} \alpha z\right],$ for α see above
Finite length, lossy insert: [4] of length L , in lossless pipe	These formulas depend only on the plasma frequency of the metal. Effects of relative magnetic permeability have not been considered.	
	If $b^2/s_0^3 k^2 \ll L \ll kb^2$, $Z_0^{\parallel} = \frac{2^{1/2} Z_0}{\pi^{3/2} b} \sqrt{\frac{iL}{k}}$, else Z_0^{\parallel} as given above	
Displaced beam: [5] at $\vec{a} = (a_x, a_y)$, rms bunch length σ_ℓ , average current I_b , and $(b/k^2, b, b-a) \gg \delta_c$.	Wall impedances in last section multiplied by f_z for Z_0^{\parallel} and $f_{x,y}$ for $Z_1^{x,y}$ with $f_z = \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}$, $f_x = \frac{b(b^2 - a^2 + 4a_x^2)}{(b^2 - a^2)^3}$, $f_y = \frac{b(b^2 - a^2 + 4a_y^2)}{(b^2 - a^2)^3}$ Power loss per length traversed is $\frac{P}{L} = \frac{\Gamma(\frac{3}{4}) I_b^2}{4\pi^2 b \sigma_\ell^{3/2} \sqrt{2\mu_r \sigma_c / Z_0}} f_z$	
Displaced beam between two infinite plates: [5] at $y = \pm h/2$. $[h/k^2, h - 2y_0] \gg \delta_c$. Thin dielectric coating of thickness Δh .	$Z_0^{\parallel} = \frac{1 - \text{sgn}(\omega)i}{\pi h} \sqrt{\frac{ \omega \mu_r Z_0}{2c\sigma_c}} f_z, \quad Z_1^{\perp} = \frac{\pi(\text{sgn}(\omega)1 - i)}{\sqrt{2 \omega \sigma_c/(c\mu_r Z_0)}} f_{\perp}$ $f_z = 1 + \frac{\pi y_0}{h} \tan \frac{\pi y_0}{h}, \quad f_{\perp} = \frac{f_z}{h^3 \cos^2(\pi y_0/h)}, \quad \text{beam at } y = y_0$ $Z_0^{\parallel} = -\frac{i\omega Z_0(\epsilon_r \mu_r - 1)\Delta h}{\pi c \epsilon_r h} f_z, \quad Z_1^{\perp} = -\frac{i\pi Z_0(\epsilon_r \mu_r - 1)\Delta h}{\epsilon_r} f_{\perp}$	
Metallic coating on ceramic pipe: [6] compared with all metal pipe $Z_0^{\parallel}(\text{met})$. $t_{m,c}$ = metal/ceramic thickness $\ll b$. $[(\epsilon_r - 1)t_c^2, (1 - \epsilon_r^{-1})bt_c] \ll \sigma_\ell^2$. Loss P/L is max. at $V = 0.82$.	$Z_0^{\parallel} = Z_0^{\parallel}(\text{met}) \frac{A + \tanh(\nu t_m)}{1 + A \tanh(\nu t_m)}, \quad A = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \nu t_c, \quad \nu = \frac{1 - \text{sgn}(\omega)i}{\delta_c}$ $\frac{P}{L} = \frac{Z_0 I_b^2 t_c (\epsilon_r - 1)}{4\sqrt{\pi} b \sigma_\ell^2 \epsilon_r} \left[V - \sqrt{\pi} V^2 e^{V^2} \text{erfc}(V) \right], \quad V = \frac{\epsilon_r \sigma_\ell}{(\epsilon_r - 1) Z_0 \sigma_c t_m t_c}$ Field penetration through pipe, $\frac{E_{z,\text{out}}}{E_{z,\text{in}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4(1 - 1/\epsilon_r)t_m t_c / \delta_c^2}}$, becomes significant when $t_m \lesssim t_{\text{crit}} = \delta_c^2 / t_c$. P/L is at maximum at t_{crit} .	
Elliptical beam pipe:	Low frequency, see [7, 8, 5], high frequency, see [9, 10].	
Rectangular beam pipe:	Low frequency, see [8], high frequency, see [9, 11].	

Multi-layer pipe wall impedances: [12, 13] Cylindrical beam pipe with N layers, p th layer between $b^{(p-1)} < r < b^{(p)}$ and $b^{(N)} \rightarrow \infty$. Layer 1 is vacuum, $a < r < b^{(1)}$, with particle beam of charge Q at $r = a$ and $\theta = 0$. $r < a$ is called the 0-th layer. Each layer has its own wavenumber $\nu = k\sqrt{1 - \beta^2 \epsilon_1 \mu_1}$, $k = \omega/\nu$ and own properties $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_1 = \epsilon_0 \epsilon_r (1 + i \tan \vartheta_E) - \frac{\sigma_{dc}}{i\omega(1 - i\omega\tau)}$, $\mu = \mu_0 \mu_1 = \mu_0 \mu_r (1 + i \tan \vartheta_M)$; ϑ_E, ϑ_M are loss angles, σ_{dc} dc conductivity, and τ relaxation time. Actually any frequency dependent ϵ, μ , and conductivity can be assumed. Inside vacuum, $\nu = k/\gamma$; inside conducting metal of skin depth δ_c , $\nu \approx (1 - i)/\delta_c$. A user-friendly Mathematica code for computation is available [12]. The derivation is outlined briefly below. In terms of Bessel and Kelvin functions, m th multipole longitudinal fields inside p -th layer:

$$E_s^{(p)} = \cos m\theta e^{iks} \left[C_{Ie}^{(p)} I_m(\nu^{(p)} r) + C_{Ke}^{(p)} K_m(\nu^{(p)} r) \right], \quad \vec{E} \text{ is electric field}$$

$$G_s^{(p)} = \sin m\theta e^{iks} \left[C_{Ig}^{(p)} I_m(\nu^{(p)} r) + C_{Kg}^{(p)} K_m(\nu^{(p)} r) \right], \quad \vec{G} = Z_0 \vec{H}, \quad \vec{H} \text{ is magnetic field}$$

Matching E_s, E_θ, G_s , and G_θ at boundary $r = b^{(p)}$ between p -th and $(p+1)$ -th layers gives

$$\begin{bmatrix} C_{Ie}^{(p+1)} \\ C_{Ke}^{(p+1)} \\ C_{Ig}^{(p+1)} \\ C_{Kg}^{(p+1)} \end{bmatrix} = M_p^{p+1} \begin{bmatrix} C_{Ie}^{(p)} \\ C_{Ke}^{(p)} \\ C_{Ig}^{(p)} \\ C_{Kg}^{(p)} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{iteratively}} \begin{bmatrix} C_{Ie}^{(N)} \\ C_{Ke}^{(N)} \\ C_{Ig}^{(N)} \\ C_{Kg}^{(N)} \end{bmatrix} = \mathcal{M} \begin{bmatrix} C_{Ie}^{(1)} \\ C_{Ke}^{(1)} \\ C_{Ig}^{(1)} \\ C_{Kg}^{(1)} \end{bmatrix} \quad \text{where} \begin{cases} \mathcal{M} \equiv M_{N-1}^N M_{N-2}^{N-1} \cdots M_1^2 \\ \text{See [12] for explicit} \\ \text{expression of } M_p^{p+1} \end{cases}$$

Since the last layer goes to infinity, $C_{Ie}^{(N)} = C_{Ig}^{(N)} = 0$. From the beam region, $C_{Kg}^{(1)} = 0$ and $C_{Ke}^{(1)} = -ikQZ_0 I_m(ka/\gamma) / [\pi\beta\gamma^2(1 + \delta_{m0})]$, one can easily solve for

$$C_{Ie}^{(1)} \equiv -\alpha_1 \frac{K_m^{(1)}}{I_m^{(1)}} C_{Ke}^{(1)} = -C_{Ke}^{(1)} \frac{\mathcal{M}_{12}\mathcal{M}_{33} - \mathcal{M}_{32}\mathcal{M}_{13}}{\mathcal{M}_{11}\mathcal{M}_{33} - \mathcal{M}_{13}\mathcal{M}_{31}}, \quad \text{with } I_m^{(1)} = I_m(\nu^{(1)} b^{(1)}), \quad K_m^{(1)} = K_m(\nu^{(1)} b^{(1)}).$$

With beam at $r = a_1, \theta = 0$, reduced forces on a unit test charge at $r = a_2 > a_1$ and $\theta = \theta_2$ are

$$Z_{\parallel} = - \int ds E_s(a_2, \theta_2, s; \omega) e^{-iks}, \quad Z_x = -i \int ds [E_x(a_2, \theta_2, s; \omega) - \beta G_y(a_2, \theta_2, s; \omega)] e^{-iks}.$$

Space-charge contributions for all multiples ($\alpha_1 = 1$ or perfectly conducting at $r = b^{(1)}$):

$$Z_{\parallel}^{\text{SC}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{ikZ_0 L \cos m\theta_2}{\pi\beta\gamma^2(1 + \delta_{m0})} I_m(x_2) \mathcal{K}_m(x_1), \quad \mathcal{K}_m(x_i) = \left[K_m(x_i) - \frac{K_m^{(1)}}{I_m^{(1)}} I_m(x_i) \right], \quad x_i = \frac{ka_i}{\gamma}$$

$$Z_x^{\text{SC}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{ikZ_0 L}{\pi\beta\gamma^3(1 + \delta_{m0})} I_m(x_1) \left[\cos \theta_2 \cos m\theta_2 \mathcal{K}_m(x_2) + \frac{m\gamma}{a_2} \sin \theta_2 \sin m\theta_2 \mathcal{K}'_m(x_2) \right]$$

The rest are from wall impedances. To any order $a_1^{n_1} a_2^{n_2}$, they are

$$Z_{\parallel}^{W, n_1, n_2} = - \frac{iL\mu_0\omega}{\pi\beta^2\gamma^2} \left(\frac{ka_1}{2\gamma} \right)^{n_1} \left(\frac{ka_2}{2\gamma} \right)^{n_2} \sum' \frac{\cos m\theta_2 \bar{\alpha}_1(m) K_m^{(1)} / I_m^{(1)}}{(1 + \delta_{m0}) \left(\frac{n_1 - m}{2} \right)! \left(\frac{n_1 + m}{2} \right)! \left(\frac{n_2 - m}{2} \right)! \left(\frac{n_2 + m}{2} \right)!}$$

$$Z_x^{W, n_1, n_2} = - \frac{iZ_0 L}{\pi\beta\gamma^2 a_2} \left(\frac{ka_1}{2\gamma} \right)^{n_1} \left(\frac{ka_2}{2\gamma} \right)^{n_2} \sum' \frac{(n_2 \cos \theta_2 \cos m\theta_2 + m \sin \theta_2 \sin m\theta_2) \bar{\alpha}_1(m) K_m^{(1)} / I_m^{(1)}}{(1 + \delta_{m0}) \left(\frac{n_1 - m}{2} \right)! \left(\frac{n_1 + m}{2} \right)! \left(\frac{n_2 - m}{2} \right)! \left(\frac{n_2 + m}{2} \right)!}$$

where $\bar{\alpha}_1(m) \equiv 1 - \alpha_1(m)$, \sum' implies from $m = 0$ to $\min(n_1, n_2)$ with $n_1 - n_2$ and $n_1 - m$ even.

The usual monopole and dipole pipe-wall impedances are

$$Z_0^{\parallel} = Z_{\parallel}^{W, 0, 0} = \frac{ikZ_0 L \bar{\alpha}_1 K_0^{(1)}}{2\pi\beta\gamma^2 I_0^{(1)}} \quad \text{and} \quad Z_1^{\perp} = \frac{Z_x^{W, 1, 1}}{a_1} = \frac{iLZ_0 k^2 \bar{\alpha}_1 K_1^{(1)}}{4\pi\beta\gamma^4 I_1^{(1)}}$$

Multi-layer special cases: [13] Pipe wall: $b^{(1)} < r < b^{(2)} = b^{(1)} + t$.

Thin wall: Good for low frequencies. $t \rightarrow 0$ and E_s does not change across wall. At $r = b^{(3)}$, Case PC: perfectly conducting, Case PM: perfectly magnetic, and Case INF: $b^{(2)} \rightarrow \infty$.

$$\bar{\alpha}_1 = - \frac{\gamma^2 \beta^2 (1 - \alpha_2) + 2ix\gamma\beta/m\zeta}{1 + \frac{x^2}{m^2} - \frac{ix\gamma\beta}{m} \left[\frac{2}{\zeta(1 - \alpha_2)} + \frac{\zeta(1 - \alpha_2)}{2} \right]}, \quad \alpha_2^{\text{PC}} = -\alpha_2^{\text{PM}} = \frac{K_m(y) I_m(x)}{K_m(x) I_m(y)} \approx_0 \left(\frac{b^{(1)}}{b^{(3)}} \right)^2, \quad \alpha_2^{\text{INF}} = 0$$

$x = kb^{(1)}/\gamma, y = kb^{(3)}/\gamma, \zeta = Z_0 \sigma c t$, and $m \neq 0$.

<p>Thick wall: Good for high frequencies. At $r = b^{(2)}$, Case PC: perfectly conducting, Case PM: perfectly magnetic, and Case INF: $b^{(2)} \rightarrow \infty$. For $m \geq 1$,</p> $\bar{\alpha}_1 = \frac{-2\beta^2\gamma^2 \left[1 - \frac{(1+i)\Delta Q_\eta}{2m\beta\gamma^2} \right]}{1 - 2ip - \beta \left[\frac{(1-i)Q_\alpha}{m\Delta} - \frac{(1+i)\Delta Q_\eta}{2m} \right] + \frac{Q_\alpha Q_\eta - m^2 p^2}{m^2 \gamma^2}}, \quad p = \frac{k^2 \delta^2}{2}, \quad \Delta = \mu_1 \beta k \delta c,$ $Q_\alpha = kb^{(1)} \frac{Q_2 - \alpha_2 P_2}{1 - \alpha_2}, \quad Q_\eta = kb^{(1)} \frac{Q_2 - \eta_2 P_2}{1 - \eta_2}, \quad Q_2 = \frac{K_m^{(2)}}{K_m^{(2)}}, \quad P_2 = \frac{I_m^{(2)}}{I_m^{(2)}}$ <p>Boundary conditions require $\alpha_2^{\text{PC}} = \eta_2^{\text{PM}} = \frac{K_m^{(2,3)} I_m^{(2)}}{I_m^{(2,3)} K_m^{(2)}}$, $\eta_2^{\text{PC}} = \alpha_2^{\text{PM}} = \frac{K_m^{(2,3)} I_m^{(2)}}{I_m^{(2,3)} K_m^{(2)}}$,</p> <p>$\alpha_2^{\text{INF}} = \eta_2^{\text{INF}} = 0$, with $I_m^{(p+1,p)} = I_m(\nu^{(p+1)} b^{(p)})$, $I_m^{(p)} = I_m(\nu^{(p)} b^{(p)})$ and similar definitions for I'_m, K_m, and K'_m.</p>		
<p>Electric- and magnetic-dipole approximation: $\bar{\alpha}_1$ can also be derived [14] by approximating beam dipole motion as a superposition of oscillating electric and magnetic dipoles.</p>		
Description	Impedances	Wakes
<p>High frequency optical model: [15] High frequency $k \gg 1/h$, short-range $-z \ll h$, transition length $L \ll kh^2$, h is minimum aperture. For tapered transition of angle θ, need $k \gg 1/(h\theta)$.</p>		
Transitions, shallow cavities, collimators, irises:	Z^\parallel and kZ^\perp are both constants similar for kZ_d^\perp , kZ_q^\perp , W_d^\perp , W_q^\perp	$W_\parallel = -Z^\parallel c\delta(z)$ $W_\perp = -kZ^\perp cH(-z)$
(a) Round examples: [16]–[18] (i) step-in transition (from d to b), (ii) step-out (from b to d), long collimator, shallow cavity with gap g , (iii) thin iris	(i) $Z_0^\parallel = Z_1^\perp = 0$, (ii) $Z_0^\parallel = \frac{Z_0}{\pi} \ln \frac{d}{b}$, $kZ_1^\perp = \frac{Z_0}{\pi} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{d^2} \right)$ (iii) $Z_0^\parallel = \frac{Z_0}{\pi} \ln \frac{d}{b}$, $kZ_1^\perp = \frac{Z_0}{2\pi} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{b^2}{d^4} \right)$	where b is small iris or pipe radius, d is large pipe radius. Note: for shallow cavity, waves reflect from outer wall $\Rightarrow g \gtrsim k(d-b)^2$; for collimator, bottom length $\gg kb^2$
(b) 3D, mirror symmetric in x, y : [15] (i) flat step-out transition, aperture $2b$ to $2d$, (ii) any step-in transition; iris with small (iii) flat (height $2b$), (iv) elliptical (axes w by b), aperture	(i) $kZ_y = \frac{\pi}{8} Z_0 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{d^2} \right)$, $Z_q^y = \frac{1}{2} Z_d^y = \frac{1}{3} Z_y$ (ii) $Z_\parallel = Z_\perp = 0$, (iii) $kZ_y = \frac{Z_0}{2\pi b^2}$, $Z_q^y = Z_d^y = \frac{1}{2} Z_y$ (iv) $kZ_y = \frac{Z_0}{2\pi b^2}$, $kZ_d^y = \frac{Z_0}{4\pi b^2} \left(1 + \frac{b^2}{w^2} \right)$, $kZ_q^y = \frac{Z_0}{4\pi b^2} \left(1 - \frac{b^2}{w^2} \right)$	
High frequency diffraction formulae: $k \gg 1/b$ (a) Deep cavity (Fresnel diffraction) [19, 1], cavity radius d and gap g .	$Z_m^\parallel = \frac{\sqrt{2}Z_0}{(1+\delta_{m0})\pi^{3/2}b^{2m+1}} \sqrt{\frac{ig}{k}}$ $Z_1^\perp = \frac{2}{b^2 k} Z_0^\parallel$ Note: no reflections from outer wall $\Rightarrow g \lesssim k(d-b)^2$.	$W'_m = \frac{\sqrt{2}Z_0 c}{(1+\delta_{m0})\pi^2 b^{2m+1}} \sqrt{\frac{g}{-z}}$ $W_1 = \frac{2}{b^2} \int W'_0 dz$

Description	Impedances	Wakes
(b) Periodic array of deep cavities (model for linear accelerator structures): [20]–[24] period L , gap g , outer cavity radius d , with $g \lesssim k(d-b)^2$.	$\frac{Z_0^{\parallel}}{L} = \frac{iZ_0}{\pi kb^2} \left[1 + \frac{\alpha(g/L)L}{b} \sqrt{\frac{2\pi i}{kg}} \right]^{-1}$ $\alpha(\zeta) \approx 1 - 0.465\sqrt{\zeta} - 0.070\zeta$ $Z_1^{\perp} = \frac{2}{b^2 k} Z_0^{\parallel}$	$\frac{W_0'}{L} = \frac{Z_0 c}{\pi b^2} e^{\eta(z)^2} \operatorname{erfc}[\eta(z)]$ $\eta(z) = \frac{\alpha L}{b} \sqrt{\frac{-2\pi z}{g}}$ $W_1 = \frac{2}{b^2} \int W_0' dz$
Numerical fit: [24, 25] valid over larger z range: $-z/L \leq 0.15$, $0.34 \leq b/L \leq 0.69$, $0.54 \leq g/L \leq 0.89$.	$W_0' = \frac{Z_0 c}{\pi b^2} \exp\left(-\sqrt{\frac{z}{z_0}}\right), \quad W_1 = \frac{4Z_0 c z_1}{\pi b^4} \left[1 - \left(1 + \sqrt{\frac{z}{z_1}}\right) \exp\left(-\sqrt{\frac{z}{z_1}}\right) \right]$ $z_0 = -0.41 \frac{b^{1.8} g^{1.6}}{L^{2.4}}, \quad z_1 = -0.17 \frac{b^{1.79} g^{0.38}}{L^{1.17}}$	
Bethe's dipole moments of a hole of radius a on beam pipe wall [26].	Electric and magnetic dipole moments when wavelength $\gg a$: \vec{E} and \vec{B} are electric and magnetic flux density at hole when hole is absent. This is a diffraction solution for a thin-wall pipe.	$\vec{d} = -\frac{2\epsilon_0}{3} a^3 \vec{E}, \quad \vec{m} = -\frac{4}{3\mu_0} a^3 \vec{B}$
Small 3D obstacle on round beam pipe: [27, 28] size $\ll b$, low freq. $k \ll 1/(\text{size})$; ϕ azimuthal angular position of object.	$Z_0^{\parallel} = -ikc\mathcal{L},$ $Z_1^{\perp} = -i\mathcal{R}_1 \cos \phi$	$W_0' = -c^2 \mathcal{L} \delta'(z)$ $W_1 = -c\mathcal{R}_1 \cos \phi \delta(z)$
	Inductance $\mathcal{L} = \frac{Z_0(\alpha_e + \alpha_m)}{4\pi^2 b^2 c}$, Dipole resistance $\mathcal{R}_1 = \frac{4c}{b^2} \mathcal{L}$ α_e is electric polarizability, α_m magnetic susceptibility	
Elliptical hole: major and minor radii are a and d . $K(m)$ and $E(m)$ are complete elliptical functions of the first and second kind, with $m = 1 - m_1$ and $m_1 = (d/a)^2$. For long ellipse perpendicular to beam, major axis $a \ll b$, beam pipe radius, because the curvature of the beam pipe has been neglected here [29].	$\alpha_e + \alpha_m = \begin{cases} \frac{\pi a^3 m_1^2 [K(m) - E(m)]}{3E(m)[E(m) - m_1 K(m)]} \xrightarrow{m \rightarrow 1} \frac{\pi d^4 [\ln(4a/d) - 1]}{3a} & \begin{array}{l} \parallel \text{ beam} \\ d \ll b \end{array} \\ \frac{\pi a^3 [E(m) - m_1 K(m)]}{3[K(m) - E(m)]} & \begin{array}{l} \text{long} \\ \text{ellipse} \end{array} \end{cases}$ $\alpha_e + \alpha_m \xrightarrow{m \rightarrow 0} \frac{2a^3}{3} \quad \text{circular hole } a = d \ll b$ <p>Above are for $t \ll a$. When $t \geq a$, $\times 0.56$ when hole is circular and $\times 0.59$ when hole is long-elliptic. For higher frequency correction, add to $\alpha_e + \alpha_m$ the extra term,</p> $+ \frac{2\pi a^3}{3} \left[\frac{11k^2 a^2}{30} \right] \text{circular, } \begin{cases} -\frac{\pi a d^2}{3} \left[\frac{k^2 a^2}{5} \right] & \begin{array}{l} \parallel \text{ beam} \\ \text{long ellipse} \end{array} \\ + \frac{2\pi a^3}{3} \left[\frac{2k^2 a^2}{5[\ln(4a/d) - 1]} \right] & \begin{array}{l} \perp \text{ beam} \\ \text{long ellipse} \end{array} \end{cases}$	
Rectangular slot: length L , width w .	$\alpha_e + \alpha_m = w^3(0.1814 - 0.0344w/L) \quad t \ll a, \quad \times 0.59 \text{ when } t \geq a$	
Rounded-end slot: length L , width w .	$\alpha_e + \alpha_m = w^3(0.1334 - 0.0500w/L) \quad t \ll a, \quad \times 0.59 \text{ when } t \geq a$	

Description	Impedances	Wake
Annular-ring-shaped cut: inner and outer radii a and $d = a + w$ with $w \ll d$.	$\alpha_e + \alpha_m = \frac{\pi^2 d^2 a}{2 \ln(32d/w) - 4} - \frac{\pi^2 w^2 (a + d)}{16} \quad t \ll d$ $\alpha_e + \alpha_m = \pi d^2 w - \frac{1}{2} w^2 (a + d) \quad t \geq d$	
Half ellipsoidal protrusion with semi axes h radially, a longitudinally, and d azimuthally. ${}_2F_1$ is the hypergeometric function.	$\alpha_e + \alpha_m = 2\pi a h d \left[\frac{1}{I_b} + \frac{1}{I_c - 3} \right]$ $I_b = {}_2F_1\left(1, 1; \frac{5}{2}; 1 - \frac{h^2}{a^2}\right), \quad I_c = {}_2F_1\left(1, \frac{1}{2}; \frac{5}{2}; 1 - \frac{a^2}{h^2}\right), \quad \text{if } a = d$ $\alpha_e + \alpha_m = \pi a^3 \quad \text{if } a = d = h, \quad \frac{2\pi h^3}{3[\ln(2h/a) - 1]} \quad \text{if } a = d \ll h$ $\alpha_e + \alpha_m = \frac{8h^3}{3} \left[1 + \left(\frac{4}{\pi} - \frac{\pi}{4} \right) \frac{a}{h} \right] \quad \text{if } a \ll h = d$ $\alpha_e + \alpha_m = \frac{8\pi h^4}{3a} \left[\ln \frac{2a}{h} - 1 \right] \quad \text{if } a \gg h = d$	
Small 3D obstacle on rectangular pipe [42]: low frequency, $k \ll 1/(\text{size})$; pipe has width $2b$ and height $2d$, with small object on upper wall at $x = x_h$, with $-b < x_h < b$. Note: sums converge quickly.	$Z^{\parallel} = -ikc\mathcal{L}, \quad \mathbf{Z}_d^{\perp} = -i\mathbf{R}_d$	$W^{\parallel} = -c^2 \mathcal{L}'(z), \quad \mathbf{W}_d^{\perp} = -c\mathbf{R}_d \delta(z)$
	$\mathcal{L} = \frac{Z_0}{c} e_{n0}^2 (\alpha_e + \alpha_m), \quad \text{with}$ $e_{n0} = \frac{1}{2b} \sum \left(\frac{d}{b}, \frac{x_h + b}{2b} \right), \quad \sum(u, v) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \sin[\pi(2l+1)v]}{\cosh[\pi(2l+1)u/2]},$ $\mathbf{R}_d = \frac{\pi^2 Z_0 (\alpha_e + \alpha_m)}{16 b^4} (\Sigma_x^2 + \Sigma_y^2) \hat{\alpha}_d \cos(\phi_b - \phi_d), \quad \text{with}$ $\Sigma_x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+1) \cos[(2m+1)\pi x_h/2b]}{\sinh[(2m+1)\pi d/2b]}, \quad \Sigma_y = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m \sin[m\pi x_h/b]}{\cosh[m\pi d/b]}$ <p>with $\hat{\alpha}_d$ a unit vector, defined by $\cot \phi_d = \Sigma_y/\Sigma_x$, ϕ_b is azimuthal angle of beam</p>	
(b) Round collimator [40]: collimator radius $d \ll b$, low frequency $k \lesssim 1/d$.	$\mathcal{R}_1 = \frac{2c}{b^2} \mathcal{L}, \quad Z_0^{\parallel} = -ikc\mathcal{L}, \quad Z_1^{\perp} = -i\mathcal{R}_1$	$W_0' = -c^2 \mathcal{L}'(z), \quad W_1 = -c\mathcal{R}_1 \delta(z)$
	<p>Pill box $g \lesssim h \ll b$: $\mathcal{L} = \frac{Z_0}{2\pi cb} \left[gh - \frac{g^2}{2\pi} \right]$</p> <p>Shallow iris $g \lesssim h \ll b$: $\mathcal{L} = \frac{Z_0 h^2}{4cb}$</p> <p>Transition pair $g \gg h, h \ll b$: $\mathcal{L} = \frac{Z_0 h^2}{2\pi^2 cb} \left(\ln \frac{2\pi b}{h} + \frac{1}{2} \right)$</p>	
(a) Small objects [27, 30]: small cavities, shallow irises, and transitions at low freq. ($h \ll b, k \ll 1/h$); h is height of object, g is gap of cavity or length of iris.		
	$\mathcal{R}_1 = 0.3 \frac{Z_0}{d}, \quad Z_1^{\perp} \approx -i\mathcal{R}_1$	$W_1 \approx -c\mathcal{R}_1 \delta(z)$

Description	Impedances	Wake
(c) Small angle transitions [41]: For any frequency, small angle, $r'(s) \ll 1$, $kr r' \ll 1$, with $r(s)$ pipe profile versus longitudinal position s , and r' is derivative of r with respect to s .	$Z_0^{\parallel} = -ikc\mathcal{L}$, $Z_1^{\perp} = -i\mathcal{R}_1$	$W'_0 = -c^2\mathcal{L}\delta'(z)$, $W_1 = -c\mathcal{R}_1\delta(z)$
	$\mathcal{L} = \frac{Z_0}{4\pi c} \int ds (r')^2$, $\mathcal{R}_1 = \frac{Z_0}{2\pi} \int ds \left(\frac{r'}{r}\right)^2$ \Rightarrow symmetric tapers between $r = b$ and d ($b > d$) with angle $\theta \ll 1$: $\mathcal{L} = \frac{Z_0}{2\pi c} (b - d) \tan \theta$, $\mathcal{R}_1 = \frac{Z_0}{\pi} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{b}\right) \tan \theta$	
Small angle transitions in flat geometry [43]: low frequency, $y'(s) \ll 1$, $ky y' \ll 1$, $y \ll w \ll \ell$, with $y(s)$ vertical profile, w width, ℓ length. Analytic formulas for finite w can be found in [43]	$Z^{\parallel} = -ikc\mathcal{L}$, $Z_d^y = -i\mathcal{R}_d$, $Z_q^y = -i\mathcal{R}_q$	$W^{\parallel} = -c^2\mathcal{L}\delta'(z)$, $W_d^y = -c\mathcal{R}_d\delta(z)$, $W_q^y = -c\mathcal{R}_q\delta(z)$
	$\mathcal{L} = (0.43) \frac{Z_0}{4\pi c} \int ds (y')^2$, $\mathcal{R}_d = \frac{Z_0 w}{4} \int ds \frac{(y')^2}{y^3}$, $\mathcal{R}_q = \frac{Z_0}{4\pi} \int ds \left(\frac{y'}{y}\right)^2$ \Rightarrow symmetric tapers between $y = b$ and d ($b > d$) with angle $\theta \ll 1$: $\mathcal{L} = (0.43) \frac{Z_0}{2\pi c} (b - d) \tan \theta$, $\mathcal{R}_d = \frac{Z_0 w}{4} \left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{b^2}\right) \tan \theta$, $\mathcal{R}_q = \frac{Z_0}{2\pi} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{b}\right) \tan \theta$,	
Wall roughness inductive model [35]: 1-D axisymmetric bump on beam pipe, $h(z)$ or 2-D bump $h(z, \theta)$. Valid for low frequency $k \ll (\text{bump length or width})^{-1}$, $h \ll b$, and $ \nabla h \ll 1$. See also [36].	1-D: $\mathcal{L} = \frac{2Z_0}{bc} \int_0^{\infty} \kappa \tilde{h}(\kappa) ^2 d\kappa$, with $\tilde{h}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(z) e^{-ikz} dz$ 2-D: $\mathcal{L} = \frac{4Z_0}{bc} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\kappa^2}{\sqrt{\kappa^2 + m^2/b^2}} \tilde{h}_m(\kappa) ^2 d\kappa$ with $\tilde{h}_m(k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dz h(z, \theta) e^{-ikz - im\theta}$	Note: small periodic corrugations model is also used for wall roughness impedance estimation.
Small periodic corrugations: (a) [31, 32] $L \lesssim h \ll b$, $k \ll 1/h$; L period, h depth, g gap, \wp principal value; $\beta_g c$ group velocity.	$\frac{Z_0^{\parallel}}{L} = \frac{Z_0}{\pi b^2} \left[\pi k_r \delta(k^2 - k_r^2) + i \wp \left(\frac{k}{k^2 - k_r^2} \right) \right]$, $\frac{W'_0}{L} = \frac{Z_0 c}{\pi b^2} \cos k_r z$ $Z_1^{\perp} = \frac{2}{b^2 k} Z_0^{\parallel}$, $k_r = \sqrt{\frac{2L}{bgh}}$; $(1 - \beta_g) = \frac{4hg}{bL}$, $W_1 = \frac{2}{b^2} \int W'_0 dz$	
(b) [33] $L \gg h$, $L \ll b$, $k \ll 1/h$; $k_L = 2\pi/L$. Thin dielectric or ferrite layer on pipe: [34] thickness $h \ll b$.	$\frac{Z_0^{\parallel}}{L} = \frac{Z_0 h^2 k_L^{3/2}}{8\pi b} (-ik)^{1/2}$	$\frac{W'_0}{L} = -\frac{Z_0 c h^2 k_L^3}{16\pi^{3/2} b} \frac{1}{(-k_L z)^{3/2}}$ Like small periodic corrugations (a), but $k_r = \left[\frac{2\epsilon_r}{(\epsilon_r \mu_r - 1)bh} \right]^{1/2}$, with relative dielectric constant ϵ_r and magnetic permeability μ_r .

Description	Impedances	Wakes
<p>Coherent synchrotron radiation (CSR): [37, 38, 39] Bunch moves in free space on a circle of radius R; $k \ll \gamma^3/R$. See Sec. 2.4.16.</p>	$\frac{Z_0^{\parallel}}{L} = \frac{Z_0}{2 \cdot 3^{1/3} \pi} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left[\frac{ik}{R^2}\right]^{1/3}$	$\frac{W'_0}{L} = -\frac{Z_0 c}{2 \cdot 3^{4/3} \pi R^{2/3}} \frac{1}{z^{4/3}}$
	$\Gamma(2/3) \approx 1.3541$. Note: non-zero wake for test particle <i>ahead</i> of driving particle. $W'_0(0^+)/L \approx 0.1 Z_0 c \gamma^4 / R^2$. This is also used to approximate effect at high k for beam in beam pipe; shielded (suppressed) for $k \lesssim R^{1/2} b^{-3/2}$.	
<p>Pill-box cavity —low frequency: [44] cavity radius d, gap g; $S = d/b$. When $g \gg 2(d-b)$, replace g by $d-b$. Valid for $k \ll 1/d$.</p>	$Z_0^{\parallel} = -ik \frac{Z_0 g}{2\pi} \ln S$ $Z_1^{\perp} = -i \frac{Z_0 g}{\pi b^2} \frac{S^2 - 1}{S^2 + 1}$	$W'_0 = -\frac{Z_0 c g}{2\pi} \ln S \delta'(z)$ $W_1 = -\frac{Z_0 c g}{\pi b^2} \frac{S^2 - 1}{S^2 + 1} \delta(z)$
	Effect will be one half for a step in the beam pipe from radius b to radius d , or vice versa, when $g \gg 2(d-b)$.	
<p>Resonator model: [1] for m-th azimuthal mode, with shunt impedance $R_s^{(m)}$, quality factor Q, and resonant frequency k_r.</p>	$Z_m^{\parallel} = \frac{R_s^{(m)}}{1 + iQ(k_r/k - k/k_r)}$ $Z_m^{\perp} = \frac{R_s^{(m)}/k}{1 + iQ(k_r/k - k/k_r)}$	$W_m = \frac{R_s^{(m)} c k_r}{Q \bar{k}_r} e^{\alpha z} \sin \bar{k}_r z$ <p>where $\alpha = k_r / (2Q)$ $\bar{k}_r = \sqrt{ k_r^2 - \alpha^2 }$</p>
	Valid only close to k_r . As $k \rightarrow \infty$, $Z_0^{\parallel} \rightarrow k^{-1/2}$ for non-periodic cavities and $\rightarrow k^{-3/2}$ for an infinite array of cavities. [16, 47]	
<p>Closed pill-box cavity: [45] resonant frequencies k_{mnp} and “circuit” $(R_s/Q)_{mnp}$ [46], where m, n, p, are azimuthal, radial, longitudinal mode numbers. Cavity radius d and length g; x_{mn} is n^{th} zero of Bessel function J_m.</p>	$k_{mnp}^2 = \frac{x_{mn}^2}{d^2} + \frac{p^2 \pi^2}{g^2}$ $\left[\frac{R_s}{Q}\right]_{0np} = \frac{Z_0}{x_{0n}^2 J_0'^2(x_{0n})} \frac{8}{\pi g k_{0np}} \begin{cases} \sin^2 \frac{g k_{0np}}{2\beta} \times \frac{1}{1 + \delta_{0p}} & p \text{ even} \\ \cos^2 \frac{g k_{0np}}{2\beta} & p \text{ odd} \end{cases}$ $\left[\frac{R_s}{Q}\right]_{1np} = \frac{Z_0}{J_1'^2(x_{1n})} \frac{2}{\pi g d^2 k_{1np}^2} \begin{cases} \sin^2 \frac{g k_{1np}}{2\beta} & p \neq 0 \text{ and even} \\ \cos^2 \frac{g k_{1np}}{2\beta} & p \text{ odd} \end{cases}$	
<p>Curvature impedance: [48] Smooth toroidal chamber of rectangular cross section, width $b-a$, height h, inner radius a, outer radius b, and $R = \frac{1}{2}(a+b)$. As Lorentz factor $\gamma \rightarrow \infty$, a contribution remains.</p>	<p>Valid from zero frequency up to just below synchronous resonant modes, i.e., $0 < \nu < \sqrt{R/h}$ with $\nu = kh$,</p> $Z_0^{\parallel} = \frac{ik Z_0 h^2}{\pi^2 R} \left\{ \left[1 - e^{-2\pi(b-R)/h} - e^{-2\pi(R-a)/h} \right] \left[1 - 3 \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^2 \right] + 0.05179 - 0.01355 \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^2 \right\} + \rho k R \approx \frac{ik Z_0 h^2}{\pi^2 R} \left[A - 3B \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^2 \right],$ <p>where ρ is quadratic in ν. As $(b-a)/h$ increases, ρ vanishes exponentially and $A \approx B \approx 1$. In general, $A/B \approx 1$ implying $\text{Im} Z_0^{\parallel}$ changes sign (a node) near $\nu = \pi/\sqrt{3}$.</p>	

Description	Impedances	Wakes
<p>Kicker with window-frame magnet: [50] width a, height b, length L, beam offset x_0 horizontally, and all image current carried by conducting current plates.</p>	$Z_0^{\parallel} = \frac{k^2 c^2 \mu_0^2 L^2 x_0^2}{4a^2 Z_k}$ $Z_1^{\perp} = \frac{kc^2 \mu_0^2 L^2}{4a^2 Z_k}$	$W_0' = -\frac{c^3 \mu_0^2 L^2 x_0^2}{4a^2 Z_k} \delta_0''(z)$ $W_1 = -\frac{c^3 \mu_0^2 L^2}{4a^2 Z_k} \delta'(z)$
<p>Traveling-wave kicker [50] with characteristic impedance Z_c for the cable, and a window magnet of width a, height b, and length L. Valid for frequency below cutoff.</p>	$Z_0^{\parallel} = \frac{Z_c}{4} \left[2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - i \sin \theta \right]$ $Z_1^{\perp} = \frac{Z_c L}{4ab} \left[\frac{1 - \cos \theta}{\theta} - i \frac{\sin \theta}{\theta} \right]$	$W_0' = \frac{Z_c c}{4} \left[\delta(z) - \delta\left(z + \frac{L}{\beta_{\text{ph}}}\right) \right]$ $W_1 = \frac{Z_c \beta c}{4ab} \left[H(z) - H\left(z + \frac{L}{\beta_{\text{ph}}}\right) \right]$
<p>Strip-line BPMs (pair): [49] length L, angle each subtending to pipe axis ϕ_0, forming transmission lines of characteristic impedance Z_c with pipe.</p>	$Z_0^{\parallel} = Z_c \left[\frac{\phi_0}{2\pi} \right]^2 [2 \sin^2 kL - i \sin 2kL]$ $Z_1^{\perp} = \left[\frac{Z_0^{\parallel}}{k} \right]_{\text{pair}} \frac{1}{b^2} \left[\frac{4}{\phi_0} \right]^2 \sin^2 \frac{\phi_0}{2}$	$W_0' = Z_c c \left[\frac{\phi_0}{2\pi} \right]^2 [\delta(z) - \delta(z+2L)]$ $W_1 = \frac{8Z_c c}{\pi^2 b^2} \sin^2 \frac{\phi_0}{2} [H(z) - H(z+2L)]$
<p>Wakes for a Gaussian Bunch: The <i>bunch wakes</i> of a bunch with longitudinal charge distribution λ_z, are obtained from $W_{\lambda m}'(z) = \int_{-\infty}^0 W_m'(x) \lambda_z(z-x) dx$, $W_{\lambda m}(z) = \int_{-\infty}^0 W_m(x) \lambda_z(z-x) dx$. In the following we present bunch wakes of Gaussian bunch [$\lambda_z = e^{-(z/\sigma_z)^2/2}/(\sqrt{2\pi}\sigma_z)$, with σ_z rms bunch length] for wakefield forms found in the tables above, and also give their first moments $\langle W_{\lambda} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} W_{\lambda}(z) \lambda_z(z) dz$ and the rms $W_{\text{rms}} = \sqrt{\langle W_{\lambda}^2 \rangle - \langle W_{\lambda} \rangle^2}$. Here the z dependence alone is considered and the wake coefficient is scaled out; for a specific problem, the appropriate coefficients, found in the tables above, need to be included at the end. Note: for power law wakes with $-2 < \alpha < -1$, W_{λ} is obtained using integration by parts [38]. It is assumed that in the range $z \ll \sigma_z$ the wake form changes so that $\int_{-\infty}^{\infty} W(z) dz = 0$. Consequently, W_{λ} can be obtained without knowing the details of W at very short range.</p>	<p>The strip-lines are assumed to terminate with impedance Z_c at the upstream end.</p>	

Wake form, W	Bunch wake, W_λ	$\langle W_\lambda \rangle$	$(W_\lambda)_{\text{rms}}$
Circuit Models:			
Resistive: $\delta(z)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} e^{-(z/\sigma_z)^2/2}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma_z}$	$\frac{0.111}{\sigma_z}$
Inductive: $\delta'(-z)$	$\frac{z}{\sqrt{2\pi}\sigma_z^3} e^{-(z/\sigma_z)^2/2}$	0	$\frac{1}{\sqrt{6\pi} 3^{1/4}\sigma_z^2}$
Capacitive: $H(-z)$	$\frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{-z}{\sqrt{2}\sigma_z} \right) \right]$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$
Power Law: $(-z)^\alpha$	$f(-z/\sigma_z)\sigma_z^\alpha$, with $f(x)$ given by (upper/lower sign for $x \geq 0$):		
Low freq. resistive wall (W_m) and Fresnel dif- fraction (W'_m): $\alpha = -\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{\pi x }{8}} e^{-x^2/4} [I_{-1/4} \pm I_{1/4}] \Big _{x^2/4}$	$\frac{0.723}{\sqrt{\sigma_z}}$	$\frac{0.292}{\sqrt{\sigma_z}}$
Fresnel diffraction (W_m): $\alpha = \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{32}} \int_{-\infty}^x y ^{1/2} e^{-y^2/4} [I_{-1/4} \pm I_{1/4}] \Big _{y^2/4} dy$	$0.489\sqrt{\sigma_z}$	$0.374\sqrt{\sigma_z}$
Low freq. resistive wall (W'_m) and small periodic corrugations (W'_0): [51] $\alpha = -\frac{3}{2}$	$\sqrt{\frac{\pi x ^3}{8}} e^{-x^2/4} [I_{1/4} - I_{3/4} \pm I_{-1/4} \mp I_{3/4}] \Big _{x^2/4}$	$\frac{-0.489}{\sigma_z^{3/2}}$	$\frac{0.516}{\sigma_z^{3/2}}$
CSR (W'_0): z^α with $\alpha = -\frac{4}{3}$ (note: $z > 0$)	$-\frac{3}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{(x+y)e^{-(x+y)^2/2}}{y^{1/3}} dy$	$\frac{-0.758}{\sigma_z^{4/3}}$	$\frac{0.532}{\sigma_z^{4/3}}$
Resonator Model: $\begin{cases} \sin(-k_r z) \\ \cos(k_r z) \end{cases} e^{\alpha_r z}$, with k_r, α_r , real	$\mathcal{W} = f(-z/\sigma_z)$, with $f(x) = \frac{1}{2} e^{-(k_r^2 - \alpha_r^2)\sigma_z^2/2 - \alpha_r\sigma_z x}$ $\times \begin{cases} \operatorname{Im} \\ \operatorname{Re} \end{cases} e^{ik_r\sigma_z(x - \alpha_r\sigma_z)} \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left[\frac{(ik_r - \alpha_r)\sigma_z + x}{\sqrt{2}} \right] \right\}$		
	$\langle \mathcal{W} \rangle = \frac{1}{2} e^{-(k_r^2 - \alpha_r^2)\sigma_z^2} \begin{cases} \operatorname{Im} \\ \operatorname{Re} \end{cases} e^{-i2k_r\alpha_r\sigma_z^2} \left\{ 1 + \operatorname{erf} [(ik_r - \alpha_r)\sigma_z] \right\}$		

参考文献

- [1] A.W. Chao, Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators, Wiley (1993), Chapter 2. <https://www.slac.stanford.edu/~achao/wileybook.html>
- [2] K.Y. Ng, Space-charge impedances of beams with non-uniform transverse distributions, Fermilab-FN-0756 (2004). <https://inspirehep.net/literature/658478>
- [3] K. Bane and M. Sands, The Short-Range Resistive Wall Wakefields, Proc. Micro Bunches Workshop 1995. SLAC-PUB-95-7074. <https://www.slac.stanford.edu/pubs/slacpubs/7000/slac-pub-7074.pdf>
- [4] S. Krinsky, B. Podobedov, and R. L. Gluckstern, Impedance of finite length resistive cylinder, Phys. Rev. ST Accel. Beams **7**, 114401 (2004). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.7.114401>
- [5] A. Piwiniski, Impedances in Lossy Elliptical Vacuum Chambers, DESY 94-068 (1994). <https://cds.cern.ch/record/262333/files/desy-94-068.pdf>; A. Piwiniski, Longitudinal and transverse wake fields in flat vacuum chambers, DESY 84-097 (1984). <https://cds.cern.ch/record/155607/files/DESY-84-097.pdf>
- [6] A. Piwiniski, Penetration of the Field of a Bunched Beam through a Ceramic Vacuum Chamber with Metallic Coating, PAC 1364 (1977). https://accelconf.web.cern.ch/p77/PDF/PAC1977_1364.PDF; X.E. Lin, RF loss in and leakage through thin metal film, SLAC-PUB-7924 (1998). <https://www.slac.stanford.edu/pubs/slacpubs/7750/slac-pub-7924.pdf>
- [7] L. Palumbo and V.G. Vaccaro, The coupling impedance between a circular beam and a lossy elliptic vacuum chamber in particle accelerators. Nuov Cim A **89**, 243-256 (1985). <https://doi.org/10.1007/BF02782087>
- [8] Robert L. Gluckstern, Johannes van Zeijts, and Bruno Zotter, Coupling impedance of beam pipes of general cross section, Phys. Rev. E **47**, 656 (1993)
- [9] K. Yokoya, Resistive wall impedance of beam pipes of general cross section, Part. Accel. **41**, 2212-248 (1993). <https://cds.cern.ch/record/248630/files/p221.pdf>
- [10] A. Lutman, R. Vescovo, and P. Craievich, Electromagnetic field and short-range wake function in a beam pipe of elliptical cross section, Phys. Rev. ST Accel. Beams **11**, 074401 (2008). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.11.074401>
- [11] K.Y. Ng, Exact Solutions For The Longitudinal And Transverse impedances Of An Off centered Beam In A Rectangular Beam Pipe, Part. Accel. **16**, 63 (1984). <https://cds.cern.ch/record/1108019/files/p63.pdf>
- [12] N. Mounet and E. Metral, Electromagnetic fields created by a macroparticle in an infinitely long and axisymmetric multilayer beam pipe, CERN-BE-2009-039 (2009). <https://cds.cern.ch/record/1228293/files/CERN-BE-2009-039.pdf>. Note that

we separate impedances into the usual space-charge (self-field plus wall image, both $\rightarrow 0$ as $\gamma \rightarrow \infty$) and wall impedances, whereas Mounet separates them instead into self-direct (due to beam only but excluding wall image) and wall (our usual wall impedance plus wall image).

[13] B. Zotter, New Results on the Impedance of Resistive Metal Walls of Finite Thickness, CERN-AB-2005-043 (2005). <https://cds.cern.ch/record/877819/files/ab-2005-043.pdf>

[14] A. Burov and V. Lebedev, Transverse Resistive Wall Impedance for Multi-layer Round Chambers, EPAC02, 1402 (2002). <https://accelconf.web.cern.ch/e02/PAPERS/WEPRI021.pdf>

[15] G. Stupakov, K.L.F. Bane, and I. Zagorodnov, Optical approximation in the theory of geometric impedance, Phys. Rev. ST Accel. Beams **10**, 054401 (2007); K.L.F. Bane, G. Stupakov, and I. Zagorodnov, Impedance calculations of nonaxisymmetric transitions using the optical approximation, Phys. Rev. ST Accel. Beams **10**, 074401 (2007). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.10.074401>

[16] S.A. Heifets, Diffractive model of the high-frequency impedance, Phys. Rev. D **40**, 3097 (1989). <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.40.3097>; S.A. Heifets and S.A. Kheifets, Coupling impedance in modern accelerators, Rev. Mod. Phys. **63**, 631 (1991). <https://journals.aps.org/rmp/abstract/10.1103/RevModPhys.63.631>

[17] E. Gianfelice, L. Palumbo, Dipole impedance of a conducting cylindrical pipe with a discontinuous cross section, IEEE Trans. Nucl. Sci. **37**, 2 1084-1089 (1990). <https://doi.org/10.1109/TNS.1990.574202>

[18] I. Zagorodnov and K.L.F. Bane, Wakefield Calculations for 3D Collimators, in Proc. EPAC06 (2006), THPCH036, pp. 2859-2861. <https://accelconf.web.cern.ch/e06/PAPERS/THPCH036.PDF>

[19] J. Lawson, Rutherford Report RHEL/M 144 (1968); K. Bane, M. Sands, Wakefields of very short bunches in an accelerating cavity, SLAC-PUB-4441 (1987). <https://s3.cern.ch/inspire-prod-files-4/4bc48e8db1e2a35ba0e71ebd84648d46>

[20] R.L. Gluckstern, High-frequency behavior of the longitudinal impedance for a cavity of general shape, Phys. Rev. D **39**, 2773 (1989). <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.39.2773>. R.L. Gluckstern, Longitudinal impedance of a periodic structure at high frequency, Phys. Rev. D **39**, 2780 (1989). <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.39.2780>

[21] G. Stupakov, Coupling Impedance of a Periodic Array of Diaphragms, PAC 95, 3303. <https://accelconf.web.cern.ch/p95/ARTICLES/RAQ/RAQ09.PDF>

[22] K. Yokoya and K. Bane, The Longitudinal high frequency impedance of a periodic accelerating structure, PAC 99, 1725. <https://inspirehep.net/literature/4982>

12

- [23] A. Fedotov, R. Gluckstern, and M. Venturini, Transverse impedance of a periodic array of cavities, Phys. Rev. ST Accel. Beams **2**, 064401 (1999). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.2.064401>
- [24] K. Bane et al., Calculations of the Short-Range Longitudinal Wakefields in the NLC Linac, ICAP 98, 137. <https://accelconf.web.cern.ch/e98/PAPERS/THP29C.PDF>
- [25] K. Bane, Short-range dipole wakefields in accelerating structures for the NLC, SLAC-PUB-9663 (2003). <https://www.slac.stanford.edu/pubs/slacpubs/9500/slac-pub-9663.pdf>
- [26] M. Sands, SLAC note PEP-253 (1977); H.A. Bethe, Theory of Diffraction by Small Holes, Phys. Rev. **66**, 163 (1944). <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.66.163>
- [27] Sergey S. Kurennoy, Beam coupling impedances of obstacles protruding into a beam pipe, Phys. Rev. E **55**, 3529 (1997). <https://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.55.3529>; Robert L. Gluckstern and Sergey S. Kurennoy, Impedances of azimuthally symmetric irises and cavities with semielliptical profile in a beam pipe, Phys. Rev. E **55**, 3533 (1997). <https://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.55.3533>
- [28] S.S. Kurennoy, PA 39 (1992) 1; PA 50 (1995) 167; R.L. Gluckstern, Coupling impedance of a single hole in a thick-wall beam pipe, Phys. Rev. A **46**, 1106 (1992). <https://journals.aps.org/pra/abstract/10.1103/PhysRevA.46.1106>. Coupling impedance of many holes in a liner within a beam pipe, Phys. Rev. A **46**, 1110 (1992). <https://journals.aps.org/pra/abstract/10.1103/PhysRevA.46.1110>. S.S. Kurennoy, R.L. Gluckstern and G.V. Stupakov, Coupling impedances of small discontinuities: A general approach, Phys. Rev. E **52**, 4354 (1995). <https://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.52.4354>
- [29] A. Fedotov, Longitudinal coupling impedance of a hole in an accelerator beam pipe at finite frequencies, PhD Thesis, U. Maryland (1997). <https://www.proquest.com/docview/304350195>
- [30] S.S. Kurennoy and G.V. Stupakov, A new method for calculation of low-frequency coupling impedance, Part. Accel. **45** (1994) 95. <https://cds.cern.ch/record/250977/files/p95.pdf>
- [31] A. Novokhatski and A. Mosnier, Wakefields of short bunches in the canal covered with thin dielectric layer, PAC 97, 1661. <https://accelconf.web.cern.ch/pac97/papers/pdf/5V028.PDF>
- [32] K. Bane and A. Novokhatski, The Resonator Impedance Model of Surface Roughness Applied to the LCLS Parameters, SLAC-AP-117 (1999). <https://www.slac.stanford.edu/pubs/apnotes/slac-ap-117.pdf>

- [33] G. Stupakov, Proc. 19th Advanced ICFA Beam Dynamics Workshop (Arcidosso, 2000), 141
- [34] K.Y. Ng, Wake fields in a dielectric-lined waveguide, Phys. Rev. D **42**, 1819 (1990). <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.42.1819>; A. Burov and A. Novokhatski, Wake potentials of dielectric canal, HEACC 92, 537. <https://lib-extopc.kek.jp/preprints/PDF/1993/9301/9301203.pdf>
- [35] G.V. Stupakov, Impedance of small obstacles and rough surfaces, Phys. Rev. ST Accel. Beams **1**, 064401 (1998). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.1.064401>
- [36] K.L.F. Bane, C.K. Ng, and A.W. Chao, Estimate of the Impedance Due to Wall Surface Roughness, PAC97, 1738. <https://accelconf.web.cern.ch/pac97/papers/pdf/7V041.PDF>
- [37] J.B. Murphy, S. Krinsky, and R.L. Gluckstern, Longitudinal wake field for an electron moving on a circular, Part. Accel. **57** (1997) pp.9-64. <https://cds.cern.ch/record/1120287/files/p9.pdf>
- [38] Y. Derbenev et al., Microbunch Radiative Tail-Head Interaction, DESY-TESLA-FEL 95-05 (1995). <https://inspirehep.net/files/b609adafac80b439c64f54074b2919ed>
- [39] R. Warnock and P. Morton, Fields Excited by a Beam in a Smooth Toroidal Chamber: Part 1. Longitudinal Coupling Impedance, SLAC-PUB-4562 (1988). <https://www.slac.stanford.edu/pubs/slacpubs/4500/slac-pub-4562.pdf>; R. Warnock, Shielded coherent synchrotron radiation and its effect on very short bunches, Proc. 4th Advanced ICFA Beam Dynamics Workshop (1990) 151, SLAC-PUB-5375. <https://www.slac.stanford.edu/pubs/slacpubs/5250/slac-pub-5375.pdf>; R. Warnock, Report for working group on coherent synchrotron radiation, Proc. 4th Advanced ICFA Beam Dynamics Workshop (1990) 30, SLAC-PUB-5417. <https://www.slac.stanford.edu/pubs/slacpubs/5250/slac-pub-5417.pdf>
- [40] K. Bane and P. Morton, Deflection by the Image Current and Charges of a Beam Scraper, LINAC86, 490 (1986). <https://accelconf.web.cern.ch/l86/papers/th3-22.pdf>
- [41] K. Yokoya, Impedance of slowly tapered structures, CERN-SL-90-88-AP (1988). <https://cds.cern.ch/record/210347/files/CM-P00061004.pdf>
- [42] S. Kurennoy, R. Gluckstern, and G. Stupakov, Coupling impedances of small discontinuities: A general approach, Phys. Rev. E **52**, 4354 (1995). <https://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.52.4354>
- [43] G. Stupakov, Low frequency impedance of tapered transitions with arbitrary cross sections, Phys. Rev. ST Accel. Beams **10**, 094401 (2007). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.10.094401>

- [44] E. Keil, B. Zotter, Longitudinal stability of a coasting beam in a corrugated resistive vacuum chamber, Part. Accel. **3** (1972). <https://cds.cern.ch/record/875758/files/p11.pdf>. K.Y. Ng, Transverse Impedance of a Coasting Beam in a Corrugated Vacuum Chamber at Low Frequencies, Fermilab Report FN-0389 (1981). <https://lss.fnal.gov/archive/test-fn/0000/fermilab-fn-0389.pdf>
- [45] T. Weiland and B. Zotter, Wake potentials of a relativistic current in a cavity, Part. Accel. **11** (1981). <https://cds.cern.ch/record/124656/files/198010106.pdf>
- [46] G. Dome, Wake Potentials of a Relativistic Point Charge Crossing a Beam-Pipe Gap: An Analytical Approximation, PAC85, 2531 (1985). https://accelconf.web.cern.ch/p85/PDF/PAC1985_2531.PDF
- [47] S.A. Heifets, S.A. Kheifets, High Frequency Limit of the Longitudinal Impedance, Part. Accel. **25** (1990). <https://cds.cern.ch/record/1120205/files/p61.pdf>; A. Hofmann, T. Risselada and B. Zotter, Proc. 4th ICFA Beam Dynamics Workshop (1990) 138
- [48] K.Y. Ng and R. Warnock, Longitudinal impedance of a smooth toroidal chamber at low and intermediate frequencies, PAC 89, 798. https://accelconf.web.cern.ch/p89/PDF/PAC1989_0798.PDF; King-Yuen Ng and Robert Warnock, Reactive impedance of a smooth toroidal chamber below the resonance region, Phys. Rev. D **40**, 231 (1989). <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.40.231>
- [49] K.Y. Ng, Impedances Of Stripline Beam Position Monitors, Part. Accel. **23** (1988). <https://cds.cern.ch/record/1108069/files/p93.pdf>
- [50] T. Toyama et al., Coupling impedance of the J-PARC kicker magnets, HB 2006, 140. <https://accelconf.web.cern.ch/abdwhb06/PAPERS/TUBX03.PDF>. G. Nassibian, The Low Frequency Beam Impedance of Matched Traveling Wave Kickers, CERN/PS 84-25 (BR) (1984). <https://cds.cern.ch/record/2858292/files/CERN-PS-84-25-BR.pdf>. G. Nassibian, The real part of the low frequency beam impedance of travelling wave kickers with arbitrary terminations, CERN 85-68 (BR) (1986). <https://cds.cern.ch/record/2828756/files/CERN-PS-85-068-BR.pdf>
- [51] A. Piwinski, Bunch lengthening and power losses due to the vacuum chamber walls, DESY Report 72/72 (1972)



笔记 尽管节录的这些公式假设较为理想情况，与真实加速器管道的几何构形未必完全一致，但这些公式在评估束团集体动力学效应时仍非常有用。如果要更准确计算尾场与阻抗，一般采用数值仿真，可分为时域尾场与频域阻抗的模拟。在数值仿真方面，不管是尾场或阻抗，一般求得的都是有限激励源——即有限束长——的尾场或阻抗，即 $W_{\parallel,\perp}, Z_{\parallel,\perp}$ ，与这里给出的尾场函数或阻抗函数存在些微区别。这里介绍的尾场函数或阻抗函数 $W_{\parallel,\perp}, Z_{\parallel,\perp}$ 为源电荷产生的，源电荷被视为点电荷，因此，这里的尾场函数或阻抗函数为一种格林函数。通过数值仿真得到的尾场或阻抗更像是束团整体的尾场或阻抗。直观认为，只要我们在数值仿真中尽量将束长减小，那么得到的结果将逐渐趋近点源电荷给出的尾场函数或阻抗函数。然而，减小束长要付出的代价将是计算时间快速增加。对极短束团，准确、快速计算尾场函数或阻抗函数是极具挑战的课题。

近年有些关于结合解析分析与数值仿真，给出准确、快速的尾场函数或阻抗函数的工作，可参考 Boris Podobedov and Gennady Stupakov, Point-charge wakefield calculations from finite length bunch wake potentials, Phys. Rev. ST Accel. Beams **16**, 024401 (2013). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.16.024401>

此外，对极短束长或极高频阻抗，求解傍轴波方程的抛物线型偏微分方程也是一种有效方法。此处不论，细节可参考 Gennady Stupakov, Using the parabolic equation for calculation of beam impedance, New J. Phys. **8** 280 (2006). <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1367-2630/8/11/280/pdf>

练习 11.26 根据点源电荷尾场函数 $W_{\parallel,\perp}$ 与束团整体的尾场 $W_{\parallel,\perp}$ 之间的关系，有

$$W_{\parallel,\perp}(z) = \int W_{\parallel,\perp}(z - z') \lambda(z') dz'$$

其中， λ 为束团纵向分布函数。考虑高斯束团，通过傅里叶变换，证明点源电荷阻抗函数 $Z_{\parallel,\perp}$ 与束团整体的阻抗 $Z_{\parallel,\perp}$ 之间的关系。 ■

解

$$Z_{\parallel,\perp}(\omega) = Z_{\parallel,\perp}(\omega) e^{\omega^2 \sigma_z^2 / 2c^2}$$

其中， σ_z 为高斯束团 rms 束长。这里给出一种由束团整体阻抗反推点源电荷阻抗函数的思路。尽管得到此关系，但并不意味着此关系对任何频率都成立。当 $\omega \gg c/\sigma_z$ 时，以上关系未必准确。 ■



笔记 以上思路是将数值模拟得到的“尾场势” $W_{\parallel,\perp}$ ，通过“反卷积”(de-convolution) 得到属于格林函数的尾场函数 $W_{\parallel,\perp}$ 。然后，对实际束团纵向分布 $\lambda(z)$ ，再将尾场函数与之卷积得到我们想要的尾场势。有些读者或许觉得这个 先反卷积、再卷积 思路显得有些“绕”。思考一下会发现，属于格林函数的尾场函数就是一种基底：因为通过叠加 δ 函数，能够涵盖所有可能束团分布样貌。还有另外一种巧妙的思路，就是一开始就准备好几个良好

基底，但不是 δ 函数激励的尾场函数，而是有限束长激励的“尾场函数”（虽然应该称尾场势，但是这里想强调将之视为尾场函数）。然后，对实际束团纵向分布 $\lambda(z)$ ，可以通过这些有限束长激励的“尾场函数”卷积后得到。可以想像，由于激励源不再是 δ 函数，因此不是所有可能束团分布样貌的尾场势都能忠实呈现。比如：以 Hermite polynomial 为激励源的尾场函数一般适用于不偏离高斯分布束团太远的情况。

对此类思路感兴趣的读者，可参考 V. Nys, Computer simulation of the longitudinal motion including the wake-field force, using a Hermite polynomial expansion, CERN-LEP-TH-86-34 (1986). <https://cds.cern.ch/record/173922>。

这一章介绍了常见部件尾场与阻抗的分析，给出目前许多已知部件的尾场阻抗模型公式。测试粒子单次或单圈经过一加速器装置时，源粒子产生的总尾场或总阻抗可以通过对各个部件的尾场或阻抗进行加总而得到。由于傅里叶变换为线性变换，使用尾场函数或阻抗函数不影响最终动力学结果。一个良好、理想的尾场或阻抗函数，其计算尾场或阻抗时不依赖于束团特性。但是，从前面三个例子的分析中发现，空间电荷尾场或阻抗并不满足这里所谓的良好、理想的特性。从前面几页的公式中也可以看到，有些评估尾场或阻抗的公式中包含束团参数。

这里我们稍微讨论一下 总尾场/阻抗 = 独立部件的尾场或阻抗加总 的成立前提。首先，成立的前提要求各个部件与安排次序无关，即满足交换律。对应到实际情况，成立的前提有：

1. 各个部件尾场或阻抗模型不依赖于束团参数，或者，不能太过于依赖束团参数，否则总尾场或总阻抗未必准确反映真实情况。当然，从应用角度看，此成立条件还与考虑的集体动力学的时间尺度有关：不同集体效应涉及的时间尺度可能非常不同，当涉及的时间尺度较长时，可以适当放宽此成立条件。
2. 尾场的特征长度尺度或阻抗的中心波长不能太短，或者说，对于高频阻抗，直接将各个部件阻抗加总可能忽略了部件间可能的干涉效应。当高频尾场的频率高于临近部件的截止频率时，尾场不被局限在某个部件内，此时加总法则将失效。这与 §11.7.2 介绍的高频、多个谐振腔，按周期形成的串列结构的纵向阻抗频率定标关系 $\propto \omega^{-3/2}$ 与单个谐振腔的纵向阻抗频率定标关系 $\propto \omega^{-1/2}$ 有根本上的差异的原因相关。

感兴趣的读者可以试着找出哪些公式包含束团参数。



笔记 与机器运行直接相关的加速器学家，应随时检测机器的整体阻抗：一台加速器的总体阻抗体现的是它的“健康”情况。随着机器运行、升级、更迭，安装或移除电磁部件（尤其是插入件）或改变金属真空管道结构等都将对加速器的总体阻抗——包含实部的电阻与虚部电抗——造成影响。由此，对束团集体效应的影响或冲击也就随之改变。集体效应的粒子动力学将在第12章、第13章介绍。

分析一加速器设计参数的集体效应时，是不是就是把这一小节给出的表格里所有尾场函数或阻抗加总，然后作为第12章、第13章即将介绍的粒子动力学分析的已知信息？理想情况下可以这么认为。但是，一台加速器的不同部件这么多，林林总总加起来是非常艰巨的任务。一般来说，在设计阶段，我们会针对眼前最需要考虑的集体效应，根据其不同机制，涉及的空间、时间特征尺度也不同，选择最相关的一个或几个尾场或阻抗模型纳入分析。例如，对直线加速器驱动的自由电子激光装置，影响上游直线加速段单束团集体效应的尾场主要有几何尾场 (geometric wakefield)，束长短于 $100 \mu\text{m}$ 之后，则主要由相干同步辐射 (coherent synchrotron radiation, CSR) 与纵向空间电荷场主导。CSR 将在第15章进一步介绍。

在加速器总体设计阶段，有一个专有名词称“阻抗预算”(impedance budget)，这里解释一下。加速器中的粒子束在传输时会与周围环境发生相互作用，即这里介绍的尾场、阻抗函数加总导致的效应。阻抗预算是一种量化和管理这些相互作用的权衡。它本质上是一个“预算”，用于设定粒子束在不导致严重集体不稳定性的前提下，允许束团与环境相互作用的上限。阻抗预算可以想成财务预算，就像我们为不同的开支分配资金，并努力控制在这些限度内一样，加速器物理学家也为机器的不同部分分配一定量的阻抗，并努力将总阻抗保持在预算之内。通过仔细设计加速器组件以最小化总阻抗函数，可以确保粒子束在加速器中的整个传输过程中保持稳定，并维持其所需的能量和特性。如果想提高阻抗预算，那么就需要更强的外部阻尼机制或更好的磁聚焦结构设计。



笔记 对“阻抗预算”一词好奇的读者，还可以想想，为什么不称“尾场预算”？

11.7.5 能量损耗因子

前面 §11.5、§11.6 给出了尾场函数与阻抗函数的定义。回忆一下，会发现尾场函数的定义基于一明确的物理图像：尾场正比于纵向力 (或纵向电场) 对测试粒子在一段时间或一段距离的积累效果，即冲量 (impulse)

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) \equiv -\frac{\beta c}{q_1 q_2} \int dt \mathbf{F}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau; t) \quad (11.323)$$

当介绍阻抗函数时，直接定义其为 (已经考虑因果律的) 尾场函数的傅里叶变换。由高等数学知识知道，一组互为傅里叶变换的函数在数学上等价。但是，到目前为止，似乎觉得阻抗函数的物理图像不像尾场函数这么明确。这一节将介绍一个重要的物理量：能量损耗因子 (loss factor)。结合以前在电路理论学过的概念，可将损耗因子与前面介绍的阻抗函数的概念关联起来。

电路理论学过，一载流导线电流 I 经过阻抗 Z 元件时，产生的热功率 P 有

$$P = I^2 Z \quad (11.324)$$

试着类比到粒子加速器情况。首先，带电粒子运动形成电流 I_b 。再来，带电粒子经过加速器部件时，残留的电磁场可以尾场函数 W_{\parallel} 表示，或者等价地以阻抗函数 Z_{\parallel} 表

示。对有限电导率金属而言，残留在真空管壁上的电磁场将产生热；对具有结构不连续的真空管道(如谐振结构)而言，残留在结构内的电磁场形同从粒子束能量摘取一部分能量。总之，这些被动元件本质上将从粒子束提取部分能量³⁵。现在，我们试着从第一原理出发，推导粒子束经过尾场/阻抗结构时所导致的能量损耗。

分析整体束团能量损耗的第一步，先从考虑束团内某个粒子的能量改变开始。作为测试粒子 dq' ，假设在束团内的位置为 z' ，则只有其前方粒子 $z > z'$ (假设电荷量 dq) 产生的尾场能够影响，即

$$\Delta\mathcal{E}_{dq'}(z') = - \int dq W_{\parallel}(z' - z) = - \int_{z'}^{\infty} dz \lambda(z) W_{\parallel}(z' - z) \quad (11.325)$$

注意，这里是尾场函数，不是“单位长度”尾场函数。

其中， $dq = \lambda(z)dz$ ， λ 为一维纵向线密度分布。接着，利用叠加原理，束团整体的能量改变可写成

$$\Delta\mathcal{E} = \int dq' \Delta\mathcal{E}_{dq'}(z') = - \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_{z'}^{\infty} dz \lambda(z) \lambda(z') W_{\parallel}(z' - z) \quad (11.326)$$

其中， $dq = \lambda(z)dz$ ， $dq' = \lambda(z')dz'$ 。现在，考虑对电荷密度³⁶与尾场函数同时做傅里叶变换，并利用阻抗对称特性，有

$$\Delta\mathcal{E} = - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\lambda}(\omega)|^2 Z_{\parallel}(\omega) d\omega = - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\lambda}(\omega)|^2 \operatorname{Re} Z_{\parallel}(\omega) d\omega \quad (11.327)$$

以上写成电荷密度 λ 形式，也可以写成束团电流 I 的形式，有

$$\Delta\mathcal{E} = - \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_0^{\infty} dt I(t') I(t' - t) W_{\parallel}(-ct) \quad (11.328)$$

傅里叶变换³⁷后，有

$$\Delta\mathcal{E} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} |\tilde{I}(\omega)|^2 Z_{\parallel}(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} |\tilde{I}(\omega)|^2 \operatorname{Re} Z_{\parallel}(\omega) \quad (11.329)$$

以上几种不同但等价的 $\Delta\mathcal{E}$ 表达式给出了束团整体经过尾场/阻抗结构时产生的能量损耗： $\Delta\mathcal{E} > 0$ 表示束团获得能量、 $\Delta\mathcal{E} < 0$ 表示束团失去能量。对于功率损耗，有 $P = \Delta\mathcal{E}/\Delta T$ ，差一个时间量纲 ΔT 。一般 ΔT 取值为束团经过该结构的时间。



笔记 回忆电路理论学过的 $P = I^2 Z$ ，与上面结果比较，找出相似处。由此，纵向阻抗函数被赋予了明确的物理意义：其实部表征束团的能量损失。

³⁵主动元件如加速腔，在第 8 章介绍过，是给粒子束供应能量。

³⁶利用 $\tilde{\lambda}(-\omega) = \tilde{\lambda}^*(\omega)$ 与

$$\tilde{\lambda}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-i\omega z/c} \lambda(z) \Leftrightarrow \lambda(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{c} e^{i\omega z/c} \tilde{\lambda}(\omega)$$

注意， $\lambda(z)$ 与 $\tilde{\lambda}(\omega)$ 量纲不同。

³⁷利用 $\tilde{I}(-\omega) = \tilde{I}^*(\omega)$ 与

$$\tilde{I}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} I(t) \Leftrightarrow I(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \tilde{I}(\omega)$$

注意 $I(t)$ 、 $\tilde{I}(\omega)$ 两者量纲不同。与线电荷密度函数相比，有 $I(t) = c\lambda(z)$ 或 $\tilde{I}(\omega) = \tilde{\lambda}(\omega)$ 。留意线电荷密度函数 \neq 线密度函数，差一个电荷 q 量纲。



笔记 对远程尾场或窄带阻抗，一般适用于储存环中的多圈情况，束团整体的能量改变还可写成

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{E} &= -\int_{-\infty}^{\infty} dz' \lambda(z') \int_{-\infty}^{\infty} dz \lambda(z) \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_{\parallel}(kC + z' - z) \\ &= -\frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left| \tilde{\lambda}(p\omega_0) \right|^2 \operatorname{Re} Z_{\parallel}(p\omega_0)\end{aligned}\quad (11.330)$$

其中， $\omega_0 = 2\pi c/C$ 。这里用了如下近似代换：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega_0} \rightarrow \sum_{p=-\infty}^{\infty} \quad (11.331)$$

由以上讨论可以看到，无论是连续积分 \int 或离散加总 \sum ，束团的能量损耗或功率损耗都正比于 $|\tilde{I}(\omega)|^2 Z_{\parallel}(\omega)$ 或 $|\tilde{\lambda}(p\omega_0)|^2 Z_{\parallel}(p\omega_0)$ ，即与束团线密度谱（或线电流谱）、外部阻抗谱的重叠程度有关。利用此概念，可以预想，对一短束团来说，低频阻抗对其影响相比于高频阻抗来得小。是否可以以此类推，对长束团来说，高频阻抗对其影响相比于低频阻抗来得小？大致可以。但是，要留意长束团内如果存在“微结构”，则即使是长束团，其微结构体现在束团线密度谱将存在高频成分，此时高频阻抗的影响将未必能忽略。

上面讨论的是纵向尾场/阻抗与能量损耗的关系。对横向尾场/阻抗来说，对束团的影响体现在横向动量偏差 $\Delta x'$ 或 Δp_x 。按类似方法，可以写出

$$\begin{aligned}\langle \Delta x' \rangle &= \frac{\langle \Delta p_x \rangle}{P_0} \approx -\frac{1}{E_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_0^{\infty} dt x I(t') I(t' - t) W_{\perp}(-ct) \\ &= -\frac{x}{E_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} |\tilde{I}(\omega)|^2 Z_{\perp}(\omega) \\ &= -\frac{x}{E_0} q_{\text{bunch}}^2 \frac{1}{q_{\text{bunch}}^2} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\pi} |\tilde{I}(\omega)|^2 \operatorname{Im} Z_{\perp}(\omega) \\ &= -\frac{x}{E_0} q_{\text{bunch}}^2 \kappa_{\perp}\end{aligned}\quad (11.332)$$

由于横向体现在动量偏差，因此 $\langle \Delta p_x \rangle$ 又称 kick factor 或称横向损耗因子 (transverse loss factor)。



笔记 横向阻抗函数也被赋予了明确的物理意义：其虚部表征对束团产生的横向动量改变。

以下定义纵向能量损耗因子与横向 kick factor。

定义 11.13. 损耗因子 (loss factor) κ_{\parallel} 、kick factor κ_{\perp}

束团经过尾场/阻抗结构时产生能量或功率损耗，由纵向尾场/阻抗导致的纵向损耗因子定义如下：

$$\Delta\mathcal{E} = -\kappa_{\parallel} q_{\text{bunch}}^2, \quad P = \kappa_{\parallel} q_{\text{bunch}} I_{\text{beam}} \quad (11.333)$$

其中,

$$\begin{aligned}
 \kappa_{\parallel} &= \frac{1}{q_{\text{bunch}}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} |\tilde{I}(\omega)|^2 Z_{\parallel}(\omega) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} |\tilde{\lambda}(\omega)|^2 Z_{\parallel}(\omega) \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\pi} |\tilde{\lambda}(\omega)|^2 \text{Re} Z_{\parallel}(\omega) \\
 &= \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} Z_{\parallel}(p\omega_0) |\tilde{\lambda}(p\omega_0)|^2, \quad \text{对储存环的窄带或离散阻抗谱或远程尾场} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \lambda(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} dt \lambda(\tau-t) W_{\parallel}(t) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \lambda(\tau) \mathcal{W}_{\parallel}(\tau) \equiv \langle \mathcal{W}_{\parallel} \rangle
 \end{aligned} \tag{11.334}$$

类似地, 由横向尾场/阻抗导致的 kick factor 定义如下:

$$\langle \Delta x' \rangle = \frac{\langle \Delta p_x \rangle}{P_0} = -\frac{x}{cP_0} q_{\text{bunch}}^2 \kappa_{\perp} \approx -\frac{x}{E_0} q_{\text{bunch}}^2 \kappa_{\perp} \tag{11.335}$$

其中,

$$\begin{aligned}
 \kappa_{\perp} &= \frac{1}{q_{\text{bunch}}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} |\tilde{I}(\omega)|^2 Z_{\perp}(\omega) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} |\tilde{\lambda}(\omega)|^2 Z_{\perp}(\omega) \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\pi} |\tilde{\lambda}(\omega)|^2 \text{Im} Z_{\perp}(\omega) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \lambda(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} dt \lambda(\tau-t) W_{\perp}(t) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \lambda(\tau) \mathcal{W}_{\perp}(\tau) \equiv \langle \mathcal{W}_{\perp} \rangle
 \end{aligned} \tag{11.336}$$

注 $\Delta \mathcal{E}$ 与束团内粒子位置无关。但是, κ_{\perp} 则与束团整体的横向偏移 x 成正比。如果束团内不同纵向切片内的粒子的横向偏移量不全是 x , 则上式未必适用。此外, $\langle \Delta x' \rangle$ 表征的是束团整体的平均效应: 对存在横向 x 偏移的束团整体, 并不是束团内所有纵向切片的粒子都经历一样的横向动量偏移: 尾部切片的粒子通常受到比头部粒子更大的横向动量偏移。

注 $\kappa_{\parallel}, \kappa_{\perp}$ 的 SI 单位均为 V/C。



笔记 计算损耗因子时, 一个可能有用的积分公式:

$$\int_0^{\infty} e^{-\mu x^2} x^{\nu-1} dx = \frac{1}{2} \mu^{-\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)$$

□

由上定义知, 纵向能量损耗因子 κ_{\parallel} 的量纲为 V/C, 与纵向尾场函数 W_{\parallel} 一样; 横向 kick factor κ_{\perp} 的量纲为 V/C/m, 与横向尾场函数 W_{\perp} 一样。尽管对应的量纲一样, 区别是: 尾场函数与束团参数无关, 能量损耗因子或 kick factor 则与束团参数有关。

练习 11.27 对 RLC 窄带阻抗 $\omega_R/Q \ll \omega_0$ 、对短高斯束团 $\sigma_z \ll c/\omega_R|\Delta|$, 其中, $\Delta =$

$(h\omega_0 - \omega_R)/\omega_R$, 证明束团整体的能量改变有

$$\Delta\mathcal{E} \approx -\frac{\omega_0 q^2 R_S}{\pi} \frac{e^{-\omega_R^2 \sigma_z^2/c^2}}{1 + 4Q^2 \Delta^2}$$

■

 **笔记** 实验上测加速器阻抗的一种方式即测束团能量损失(与阻抗实部相关)、束团纵向振荡频移(与阻抗虚部相关)。

 **练习 11.28** 利用第 1 章 (§1.5) 学过的坡印廷向量与坡印廷定理, 证明能量损耗因子可改写为

$$\kappa_{\parallel} = -\frac{1}{q} \int_{-\infty}^{\infty} dt \oint_A \mathbf{S} \cdot d\mathbf{S}$$

■

解 单粒子电流密度可写成 $\mathbf{J} = qv\delta(x)\delta(y)\delta(s-vt)\mathbf{e}_z$, 根据尾场与阻抗函数分析的刚性束团假设, 要求 $\partial W_{EM}/\partial t = 0$ 。 ■

 **笔记** 以上介绍的损耗因子表征束团经过尾场/阻抗结构时产生的能量损耗 $\Delta\mathcal{E} \propto \langle \mathcal{W}_{\parallel} \rangle$ 或横向 $\langle \Delta x' \rangle \propto \langle \mathcal{W}_{\perp} \rangle$, 体现的物理量是一阶矩 (first moment)。还可以定义二阶矩

$$\sigma_{\mathcal{W}_{\parallel,\perp}}^2 = \langle \mathcal{W}_{\parallel,\perp} - \langle \mathcal{W}_{\parallel,\perp} \rangle \rangle^2 = \langle \mathcal{W}_{\parallel,\perp}^2 - \langle \mathcal{W}_{\parallel,\perp} \rangle^2 \rangle \propto \sigma_{\delta, \mathcal{W}_{\parallel}}, \sigma_{x', \mathcal{W}_{\perp}} \quad (11.337)$$

将表征束团经过尾场/阻抗结构时导致的能散或角散。

11.7.6 有效阻抗

到目前为止, 我们介绍的尾场函数与阻抗函数都基于格林函数的概念, 即基于刚性束团近似、冲量近似, 为沿轴并行运动的测试粒子与源粒子间的图像。受周遭环境产生尾场的源粒子, 视为 δ 函数, 不是一个有限范围内分布的束团。且严格来说, 尾场函数与阻抗函数都独立于束团特性³⁸, 仅与电磁部件的参数相关。至于束团整体所受的影响, 借助上一小节的能量损耗因子 κ_{\parallel} 、 κ_{\perp} 思路, 可以通过将束团分布函数与格林函数卷积得到, 即将束团的时域分布函数与尾场函数卷积, 或者, 将束团的频域分布函数与尾场函数卷积。这里的束团频域分布函数将与如下定义的“束团功率谱”(bunch power spectrum) 相关。

有些读者可能会纳闷, 上面这段话看似不是新概念, 为什么要重复介绍一样的概念? 保持耐心, 以下即将介绍的有效阻抗 (effective impedance) 的概念与能量损耗因子 κ_{\parallel} 、 κ_{\perp} 概念仍有区别。

上一小节介绍能量损耗因子 κ_{\parallel} 、 κ_{\perp} 时, 假设束团分布是“平静”的 (tranquil)。但是, 当

³⁸空间电荷场与相干同步辐射场为例外。

束团即将变得不稳定之前，束团内部潜在的集体效应机制其实是正在酝酿着，而不是表面上看到的平静的分布。于是，一个聪明的想法是将束团分布函数转换到频域——即束团功率谱，此束团功率谱如果与阻抗函数在一段频率范围内出现明显重叠的话，就表示此束团容易受集体效应影响。回顾能量损耗因子 κ_{\parallel} 的表示式，其中的 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} |\tilde{I}(\omega)|^2 Z_{\parallel}(\omega)$ 体现了这个概念。但区别是，以下即将定义的有效阻抗 (effective impedance) 更关注的是束团内部微结构振荡时的谱样貌。

定义 11.14. 有效阻抗

分纵向有效阻抗 $\left(\frac{Z_{\parallel}}{n}\right)_{\text{eff}}$ 与横向有效阻抗 $Z_{\perp,\text{eff}}$ 。 (n, m, ℓ) 模的有效阻抗分别定义为

$$\left(\frac{Z_{\parallel}}{n}\right)_{\text{eff}} = \frac{\sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{Z_{\parallel}(\omega_p)}{n_p} \cdot h_{\ell}(\omega_p)}{\sum_{p=-\infty}^{\infty} h_{\ell}(\omega_p)} \in \mathbb{C} \quad (11.338)$$

与

$$Z_{\perp,\text{eff}} = \frac{\sum_{p=-\infty}^{\infty} Z_{\perp}(\omega_p) \cdot h_{\ell}(\omega_p - \omega_{\xi})}{\sum_{p=-\infty}^{\infty} h_{\ell}(\omega_p - \omega_{\xi})} \in \mathbb{C} \quad (11.339)$$

其中，

- $\omega_p = (pM + n)\omega_0 + m\omega_{\beta} + \ell\omega_s$, M 为束团个数 (单束团 $M = 1$), $n = 0, 1, 2, \dots, (M - 1)$ 为第 n 个耦合束团振荡模式
- ω_0 为储存环绕行频率, ω_{β} 为横向 betatron 振荡频率, ω_s 为纵向同步振荡频率
- $n_p \equiv \omega_p / \omega_0$
- 对纵向有效阻抗, $m = 0, \ell = 1, 2, 3, \dots$ 。 $\left(\frac{Z_{\parallel}}{n}\right)_{\text{eff}}$ ($m = 0, \ell = 1$) 为最低阶纵向有效阻抗, 需要计算 $h_{\ell=1}(\omega)$ 束团功率谱
- 对横向有效阻抗, $m = 1, 2, 3, \dots$ 且 $\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ 。 $Z_{\perp,\text{eff}}$ ($m = 1, \ell = 0$) 为最低阶横向有效阻抗, 需要计算 $h_{\ell=0}(\omega)$ 束团功率谱
- 对横向有效阻抗, $\omega_{\xi} \equiv \omega_{\beta}\xi / \eta\nu_{\beta}$, 其中, $\xi = \Delta\nu_{\beta} / \delta$ 为自然色品, η 为滑相因子, $\nu_{\beta} = \omega_{\beta} / \omega_0$
- 如果纵向束团分布为高斯分布, 则束团功率谱定义为^a

$$h_{\ell}(\omega) = (\omega\sigma_{\tau})^{2\ell} e^{-(\omega\sigma_{\tau})^2} \quad (11.340)$$

其中, σ_{τ} 为 rms 束长。

注 有效阻抗不同于阻抗函数, 与束团特性有关。一般情况, $\left(\frac{Z_{\parallel}}{n}\right)_{\text{eff}}$ 希望控制在 1Ω 或更小。

注 可以看到, 横向有效阻抗中的束团功率谱有一频率偏移 ω_{ξ} , 此为 §7.10 介绍过的色品效应与横向 betatron 振荡一起导致。此效应在头尾不稳定性扮演重要角色, 将在 §12.3.4 介绍。

注 对纵向有效阻抗, 有些文献仍用 $h_{\ell=0}(\omega)$ 作为束团功率谱计算。此处不细究其

差别。

注 $M = 1$ 时的单束团有效阻抗，又称机器阻抗 (machine impedance)。

注 如果阻抗函数为宽带 (broadband) 阻抗，则可采用如下代换简化求和

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega_0} \quad (11.341)$$

再应用阻抗的对称性，于是有如下特性：

性质 11.10. 宽带有效阻抗实部恒为零

纵向宽带有效阻抗实部恒为零，即

$$\operatorname{Re} \left(\frac{Z_{\parallel}}{n} \right)_{\text{eff,BB}} = 0 \quad (11.342)$$

同理，当 $\xi = 0$ 时，横向宽带有效阻抗实部恒为零，即

$$\operatorname{Re} Z_{\perp,\text{eff,BB}} = 0 \quad (11.343) \quad \square$$

注 上面横向等效阻抗中出现 ω_{ξ} ，称为色品频率 (chromatic frequency)。 h_{ℓ} 中出现额外频率 ω_{ξ} 是由于单束团内存在由于 betatron 振荡与色品效应组合形成的微结构。更多讨论可参考 §12.3.4、§13.8.4。

“此处归一化因子不需要，因为有效阻抗定义式的分母会除掉。” □

在加速器中，粒子束通常不是一个束团而已，而是形成束团串 (bunch train)，彼此存在一定间距。第 8 章介绍过，此间距由提供纵向聚焦的射频 RF 加速腔的波长决定。如果我们将束团串视为一巨型束团，那么巨型束团内个别束团的横向与纵向振荡恰好构成丰富的束团功率谱，则以上定义的有效阻抗恰好可以应用到束团串的集体效应分析。多束团形成的束团串的集体不稳定性有时又称耦合束团不稳定性 (coupled bunch instabilities)。耦合束团不稳定性的分析相对复杂，此讲义暂不介绍。简单地说，从时域看，前方束团留下的长程尾场在尚未明显衰减前，将影响后方束团，当后方束团、尾场与环境形成正反馈时，系统将变得不稳定。从频域看，当束团串整体的某个振荡模式恰好对应阻抗函数中具有较大阻抗值的频率时，或者说束团功率谱与阻抗函数两者存在明显重叠时，表征束团与环境形成正反馈，此时系统将变得不稳定。



笔记 关于早期定义有效阻抗的一种说法是，早期加速器中的粒子束团长度比较长，粒子感受到的阻抗主要以感性阻抗为主，即 $Z_{\parallel}(\omega) \propto \omega$ 。于是，一个方便的表述可以选择 $|Z_{\parallel}(\omega)/\omega| \propto L$ ，即等效电感值。尽管近代加速器的束长越来越短，有效阻抗的概念在分析集体效应时仍然有用。

关于有效阻抗，此处仅给出定义与简短介绍，将不展开讨论。这一章重点在场动力学，粒子动力学将在下一章介绍。

11.8 关于宽带阻抗模型的更多讨论

上一节介绍尾场与阻抗公式时，先从等效 RLC 模型出发，然后，基于宽带阻抗模型 $Q \sim 1$ ，重点讨论了类腔结构的阻抗估算，包含相对低频 $\omega \leq c/b$ 到相对高频 $\omega \geq c/b$ ，最后介绍两种更高频的分析方法：Fresnel 衍射模型与几何光学近似。有时候，提到宽带阻抗模型时，稍低频段也称 Fraunhofer 衍射，稍高频段则称 Fresnel 衍射模型。结束这一章前，这一节将总结几个关于宽带阻抗模型的讨论：

1. 为什么特意花篇幅介绍宽带阻抗模型？

⇒ 对发生在单束团内的集体效应 (第12章、第13章将介绍)，特别是短束团情况，由于束团短，束团频谱在频域延展的范围很大，因此与阻抗谱交集后的净效应主要体现在其平均包络。图 11.30 给出束团经过类腔结构后的尾场，通过对不同时间长度取值，做傅里叶变换后，可以看到，较小范围的尾场数据体现在频域为平缓的、展宽的谱线，没有共振尖峰，对实部、虚部皆如此。这些平缓的、展宽谱线可以通过等效 RLC 宽带模型拟合。由此可知，对单、短束团的集体效应分析，一般关心的是平缓的、展宽的阻抗频谱，此时可以通过等效 RLC 宽带模型拟合。前面介绍过，构建等效 RLC 宽带模型的方法可以先从能量守恒定律、法拉第感应定律等开始，给出阻抗实部或虚部的初步估算，然后再根据 RLC 宽带模型的特性，拟合旁路阻抗 R_S 与中心频率 ω_R 。由于是宽带阻抗模型，假设 $Q = 1$ 。宽带阻抗模型方便之处在于，一个可能很复杂的电磁部件仅需要两个参量 R_S, ω_R 描述即可。

2. 宽带阻抗模型有什么缺点？

⇒ 从等效 RLC 模型可以很快得到，对极高频 $\omega \gg 1$ 情况，纵向阻抗实部 $\text{Re } Z_{\parallel} \propto 1/\omega^2$ 。然而，根据 Fresnel 衍射模型分析， $\text{Re } Z_{\parallel} \propto 1/\sqrt{\omega}$ 。对多个谐振腔，按周期形成的串列结构，有 $\text{Re } Z_{\parallel} \propto 1/\omega^{3/2}$ 。这些差异将导致评估短束团能量损失时的误差，因为

$$\Delta \mathcal{E} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\lambda}(\omega)|^2 \text{Re } Z_{\parallel}(\omega) d\omega \quad (11.344)$$

对极低频情况，对应长束团，评估短束团能量损失也未必准确。这里没有介绍，但目前常用的有两套改良的宽带阻抗模型：

- Hofmann-Zotter 模型 ⇒ 将目前等效 RLC 阻抗模型的实部的高频 ω^{-2} 依存关系，根据不同需要，调整为 $\omega^{-3/2}$ 或 $\omega^{-1/2}$ 。极低频部分也可根据相应条件调整。Hofmann-Zotter 模型可再细分第一类模型与第二类模型。

- Heifets-Bane 模型 ⇒ 将阻抗函数按如下方式展开

$$Z_{\parallel}(\omega) = -i\omega L + R + B [1 - i \text{sign}(\omega)] \sqrt{|\omega|} + \frac{1 + i \text{sign}(\omega)}{\sqrt{|\omega|}} \tilde{Z}_c + \dots \quad (11.345)$$

这样展开的好处有：

- 每一项对应明确的物理意义 ⇒ 第一项为低频感性阻抗 (如：taper、bellows、浅层或小谐振腔结构、准直孔等)，一般为加速器阻抗的主要贡献；第二

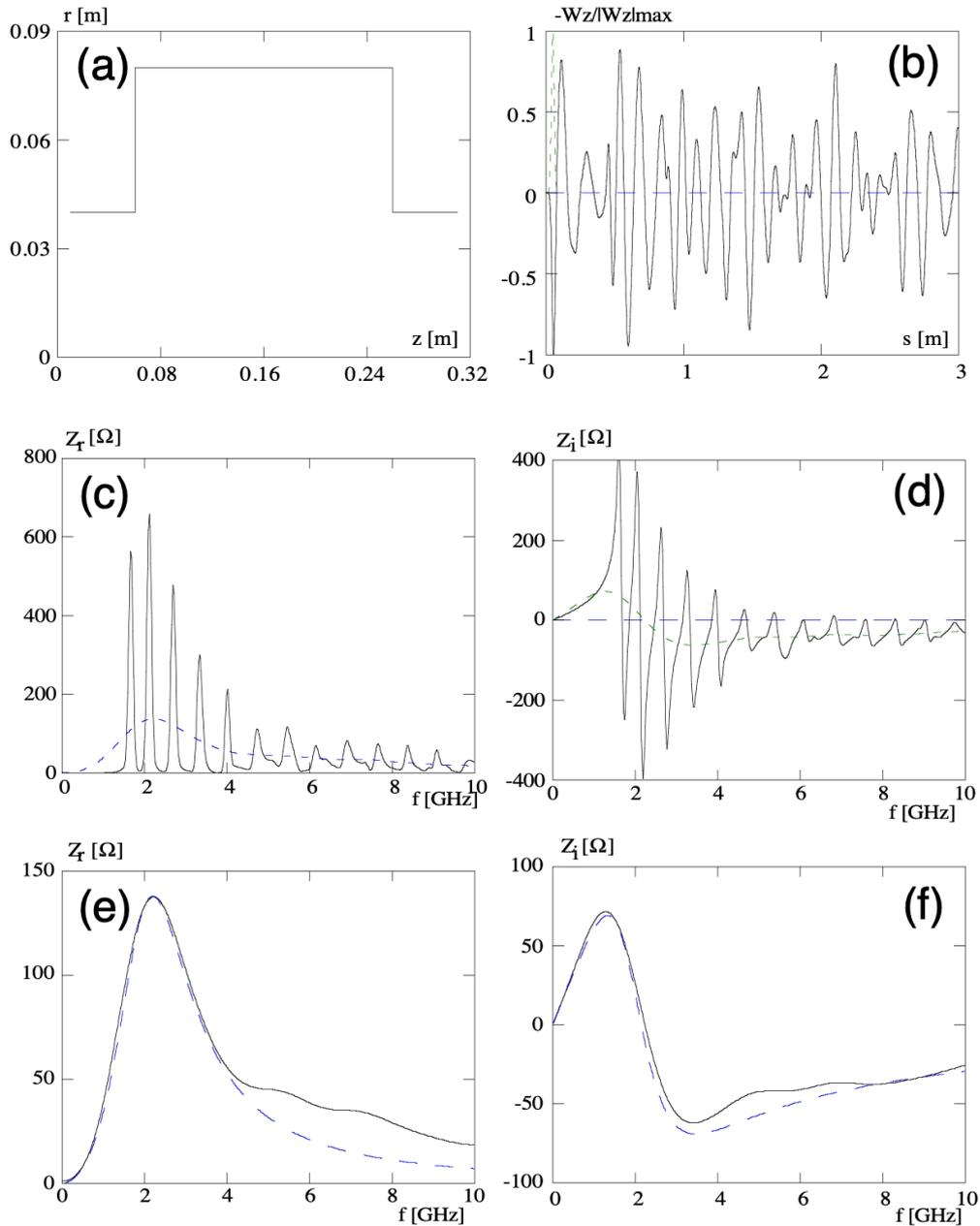


图 11.30: (a) 类腔结构示意图; (b) 束团 (绿色虚线 $\sigma_z = 3$ cm) 经过类腔结构产生的尾场; (c) 利用傅里叶变换计算得到的阻抗实部, 实线为将 (b) 中 3 m 的所有尾场都做傅里叶变换, 虚线仅将 (b) 中 30 cm (即 $10\sigma_z$) 的部分尾场做傅里叶变换得到; (d) 利用傅里叶变换计算得到的阻抗虚部, 实线与虚线同 (c) 方式得到; (e) 将 (c) 中的虚线取出, 以等效 RLC 宽带模型拟合后的实部比较; (f) 将 (d) 中的虚线取出, 以等效 RLC 宽带模型拟合后的虚部比较。图例修改自 L. Palumbo, V.G. Vaccaro, and M. Zobov, Wake Fields and Impedance, arXiv (2003). <https://arxiv.org/abs/physics/0309023>.

项为电阻阻抗 (如: 深层谐振腔, 参考 §11.4); 第三项明显为电阻壁阻抗 (参考 §11.3); 第四项则对应 §11.7.2 介绍的类腔结构。

- 每一项对应的尾场函数可以通过解析公式写出来。细节此处不论, 感兴趣的读者可参考 L. Palumbo, V.G. Vaccaro, and M. Zobov, *Wake Fields and Impedance*, arXiv (2003). <https://arxiv.org/abs/physics/0309023>。

3. 还有什么属于宽带阻抗模型范畴, 但是这里没有介绍?

⇒ 在加速器中, 束团传输过程, 除了金属真空管道由于周遭环境改变而不可避免出现过渡区域的 *step-in*、*step-out* 或 *taper-in*、*taper-out* 结构与加速谐振腔外, 还有布局、寄生在加速器管道内的束测元件。这些束测元件除了作为一种电磁部件对束团造成影响外, 束团的尾场也可能反过来影响束测元件的取值, 进而影响束测结果。束测元件一般可视为一类特殊的宽带阻抗模型。细节此处不论, 对此感兴趣的读者应参考相关专著。

定理 11.28. *step-in*、*step-out* 阻抗

参考图 11.31, 一阶近似下, *step-in*、*step-out* 阻抗为电阻性主导, 分别为

$$Z_{\parallel}^{\text{step-in}} \approx 0, \quad Z_{\parallel}^{\text{step-out}} \approx \frac{Z_0}{\pi} \ln \left(\frac{d}{b} \right) \quad (11.346)$$

其中, b 为进入前的管壁半径, d 为进入后的管壁半径。

证明 先考虑 *step-out* 情况, 束团从较窄的区域进入较宽敞的区域, 其空间电荷场需要填充额外的 $b < \rho < d$ 的空间, 对应束团损失的能量记为 U 。此外, 一部分的空间电荷场将随结构骤变而衍射, 对应损失的能量写做 E_{rad} 。粗略近似两者贡献一样, 即 $U \approx E_{\text{rad}}$ 。由损耗因子知,

$$\Delta \mathcal{E} = -\kappa_{\parallel}^{\text{step-out}} q_{\text{bunch}}^2 = -U - E_{\text{rad}} \quad (11.347)$$

现在试着估算 U , 先由高斯定律计算束团在较窄区域的电场, 有

$$\int_{-b/2\gamma}^{b/2\gamma} E_{\rho} 2\pi\rho dz = \frac{q_{\text{bunch}}}{\epsilon_0} \Rightarrow E_{\rho} = \frac{q_{\text{bunch}} \gamma}{2\pi\epsilon_0\rho b} \quad (11.348)$$

则

$$U(b < \rho < d) = \int_b^d \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-b/2\gamma}^{b/2\gamma} dz \epsilon_0 E_{\rho}^2 = \frac{q_{\text{bunch}}^2 Z_0}{2\pi} \ln \left(\frac{d}{b} \right) \left(\frac{c\gamma}{b} \right) \quad (11.349)$$

于是,

$$\kappa_{\parallel}^{\text{step-out}} = \frac{U + E_{\text{rad}}}{q_{\text{bunch}}^2} \approx \frac{2U}{q_{\text{bunch}}^2} \approx \frac{Z_0}{\pi} \ln \left(\frac{d}{b} \right) \left(\frac{c\gamma}{b} \right) \stackrel{!}{=} \frac{Z_{\parallel}^{\text{step-out}}}{\sigma_{t,\text{eff}}} \quad (11.350)$$

其中, $\sigma_{t,\text{eff}} = \frac{b/c}{\gamma}$ 为束团空间电荷场的有效时间 (或有效长度)。留意, 损耗因子的量纲与阻抗的量纲差一个“时间”。因此有 $Z_{\parallel}^{\text{step-out}} \approx \frac{Z_0}{\pi} \ln \left(\frac{d}{b} \right)$ 。

对 *step-in* 情况, 束团从较宽敞的区域进入较窄的区域, 尽管其空间电荷场随结构

骤变而衍射，但这些能量不进入较窄区域，因此不影响束团能量，即

$$\Delta\mathcal{E} = -\kappa_{\parallel}^{\text{step-in}} q_{\text{bunch}}^2 \stackrel{!}{=} 0 \quad (11.351)$$

因此有 $Z_{\parallel}^{\text{step-in}} \approx 0$ 。

注 此处给出半定量证明，较严谨的证明可参考相关文献，如 Ahmed M. Al-Khateeb, Longitudinal geometric loss factor and impedance of a step-out discontinuity at arbitrary beam energy in a round cylindrical beam-pipe, Nucl. Instrum. Methods A **635**, 35-40 (2011). <https://doi.org/10.1016/j.nima.2011.01.169>。 □

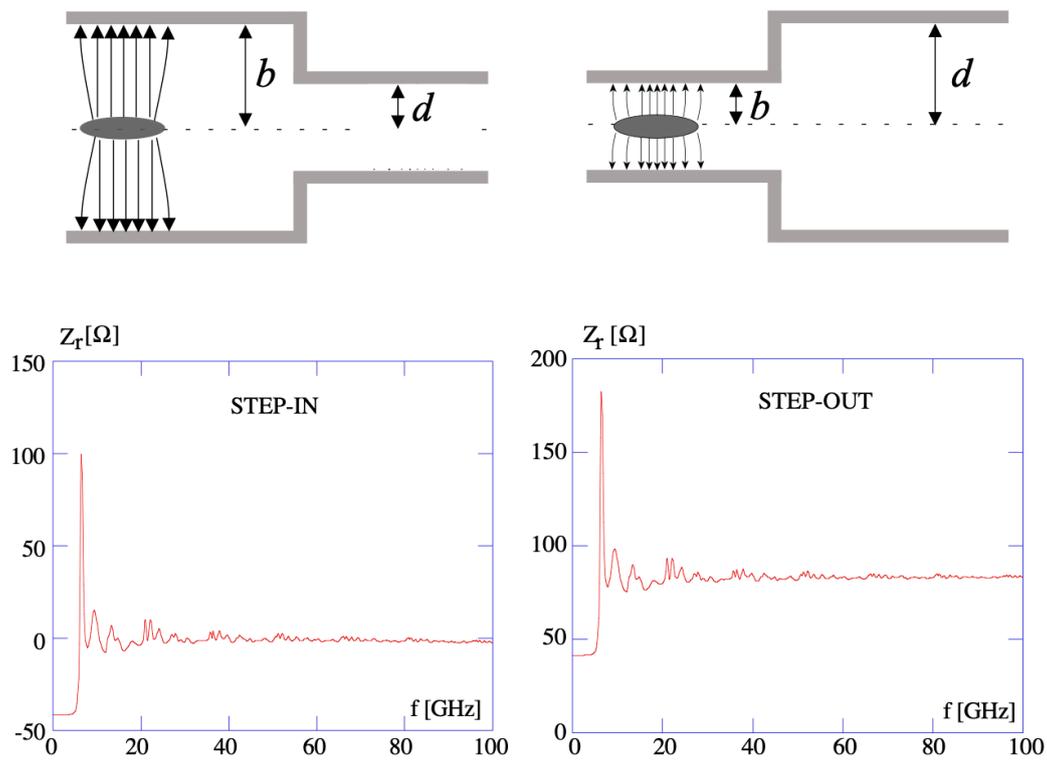


图 11.31: Step-in、step-out 阻抗。图例修改自 L. Palumbo, V.G. Vaccaro, and M. Zobov, Wake Fields and Impedance, arXiv (2003). <https://arxiv.org/abs/physics/0309023>。

11.9 关于尾场定义的更多讨论

前面 §11.5.1 节给出的尾场函数的定义里提到，对纵向尾场来说，

$$W_{\parallel}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = -\frac{c}{q_1} \int dt \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau; t) \quad (11.352)$$

理想情况下，积分上下限应为 $(-\infty, \infty)$ ，分析的电磁部件单独存在于系统中，不包含其它部件。考虑到实际加速器传输段不可能只有一个部件，因此，合理的修正积分上下限应为 $(-L/2, L/2)$ ，其中， L 为部件结构长度。但是，仔细想想之后会发现，由于部件总是半开放的，为了束团能够经过，电磁部件必须与金属真空管道接合，因此，只有在尾场泄露到部件外的贡献可以忽略时，这么设定才合理。于是，读者可能会想，把积分上下限再往两侧以外推，模糊地定为“感兴趣的”长度范围 L_1, L_2 ，应该可以更好地³⁹包含部件的尾场。以上讨论可总结写成如下：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rightarrow \int_{-L/2}^{L/2} \rightarrow \int_{-L_1}^{L_2} \rightsquigarrow \text{积累后的冲量或能量变化作用在测试粒子}$$

如果在我们关心的电磁部件前后附近没有其它部件，那么此法或许能给出令人满意的结果。但是，如果临近还有其它电磁部件，则此法将不再令人满意。此时可能需要将临近几个电磁部件一块纳入考虑，视为整体，如此一来才能够将高频（特别是高于金属真空管道截止频率的）成分的尾场完整包含到模型中。注意到，以上对电磁部件长度积分后的冲量或能量变化作用在测试粒子上，根据集总元件的思路，此冲量或能量变化作用在测试粒子的位置一般合理选择为部件的中央、对称位置。此“中央、对称位置”看似合理的选择将受到下面另一个更合理的概念挑战。

由目前讨论可以知道，这里定义的尾场函数忽略了追赶长度 (catch-up distance) 的概念。追赶长度的概念是如此直观，以至于让人几乎认为这个概念是正确的。既然在目前的尾场函数定义里忽略了追赶长度，即束团经过电磁部件后，尾场将作为一瞬时冲量近似地在部件的中央、对称位置处作用在束团上，即前面介绍的 **impulse approximation**。从物理图像来看，忽略追赶长度的前提为电磁部件长度足够长，束团在经历此电磁部件过程中、受尾场追赶的“暂态”过程能够被忽略，即 $L \gg b^2/2\Delta$ ，其中， Δ 为源粒子与测试粒子的间距，其数量级不妨可视为束长。随着加速器性能提升，束长越来越短，比值 $b^2/2\Delta$ 将越来越大，以至于追赶效应将不再能忽略不计。由此将衍生一系列科学问题：

追赶长度在尾场模型里是否需要考虑？

或者说，追赶长度的图像是真是假？若是真的话，对束团稳定性的分析可能带有颠覆性的影响？若是假的话，那么一些教科书提到追赶长度概念的都要重新审核了。不管是真的假的，都有严重的后果⁴⁰。

如果存在修正的理论模型，则应体现在场动力学与粒子动力学：

³⁹既然积分上下限的认定变得模糊了，初学者也就不容易理解，并且，对积分上下限的认定变得要靠经验。一般不乐见这种做法。

⁴⁰此段文字部分源自 2023 年秋与赵午教授的邮件讨论及与高能所许海生、王娜等集体效应读书会成员的讨论。

尾场如何修正以体现此追赶图像?

积累的冲量应在部件中央、对称位置或在其它位置作用在测试粒子?

即, wake kick 要算对, 作用在测试粒子的位置、时刻也要算对。

进一步思考后, 还会发现, 尾场先赶上的是束团尾部粒子, 随着时间演化, 再往前追赶上束团前方粒子。此图像与后面第12章、第13章将介绍的集体效应有根本上的不同。是否存在一种追赶长度导致的不稳定性 (delayed catch-up instability)? 如果是, 此不稳定性是否存在阈值? 此外, 追赶长度的概念是否与束流负载基本定理 (fundamental theorem of beam loading, 第12章将介绍) 自洽? 追赶长度的概念是否与不同波段的尾场有关?

第十一章 补充习题

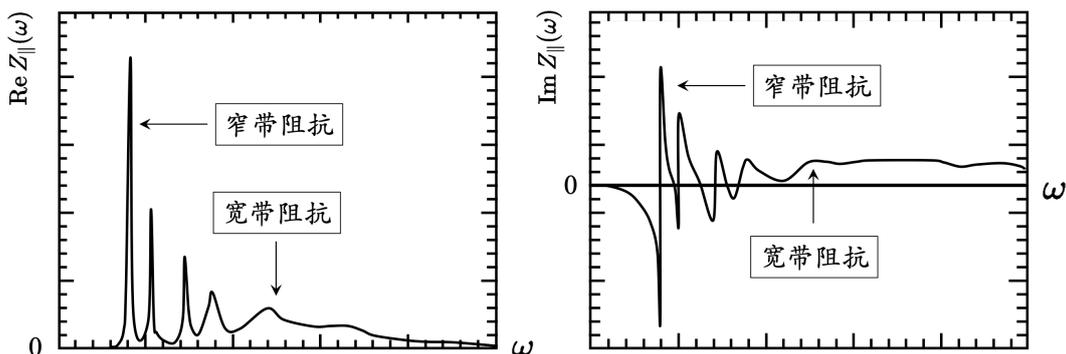
1. 试简述 Panofsky-Wenzel 定理，写出其时域尾场函数与频域阻抗函数形式。
2. 尾场函数 (wake function) 可以视为一驱动电荷源分布的时域响应函数 (response function)，又称格林函数 (Green function)。阻抗函数则是对应的驱动电荷源分布的频域响应函数。在频域中，有欧姆定律 $V = -IZ$ 。
 - a) 根据因果律，推论阻抗函数在复 k 平面上半平面必须为解析函数。
 - b) 据此推导阻抗函数必须满足如下关系⁴¹

$$\operatorname{Re} Z_{\parallel}(\omega) = \frac{1}{\pi} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\operatorname{Im} Z_{\parallel}(\omega')}{\omega' - \omega}$$

$$\operatorname{Im} Z_{\parallel}(\omega) = -\frac{1}{\pi} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\operatorname{Re} Z_{\parallel}(\omega')}{\omega' - \omega}$$

以上关系称 Kramers-Kronig (KK) 关系，又称 Hilbert 变换，或称色散关系。通过 KK 关系，可以在仅知道阻抗函数的实部或虚部部分信息下，推知另一部分信息。

3. 粒子加速器中常见的纵向集总阻抗函数如下图



试定性说明纵向阻抗函数有如下特性的理由：

- a) 较低频区域的阻抗存在共振，且实部与虚部大致呈现如图样貌。提示：利用 KK 关系。
- b) 较高频区域的阻抗相对平缓，不再有共振峰。
- c) 估算低频区域与高频区域的分界。
- d) 解释为什么每个共振模为有限谱宽。
- e) 由上图可以看到，由低频至高频的四个共振模，其品质因数 Q 值越来越小，试着给出解释。
- f) 通过 KK 关系，其实可以利用低频区域的信息推知高频区域的信息，试想其分析思路。

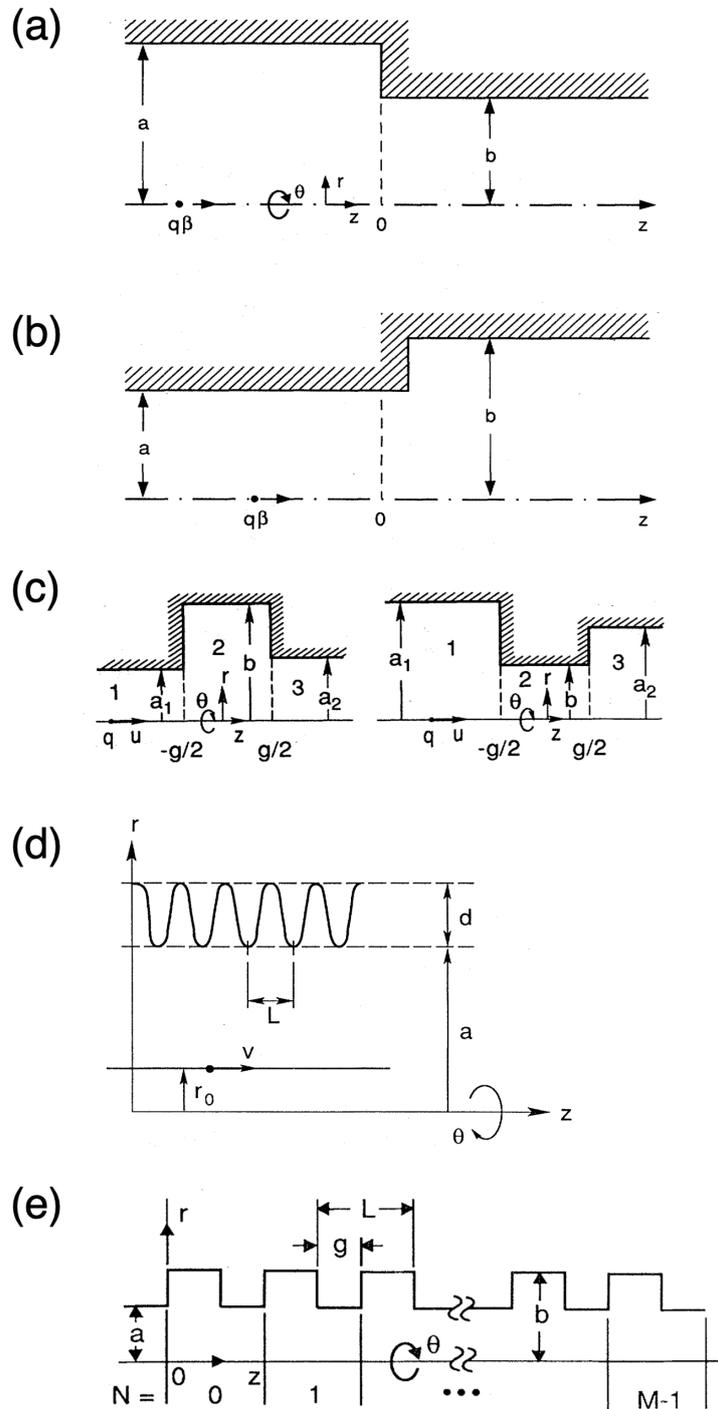
⁴¹参考 Ref. [2] 的 Eq. (2.94)。

- g) 证明在高频区域, 有 $Z_{\parallel} \propto 1/\sqrt{\omega}$ 。对横向阻抗, 有 $Z_{\perp} \propto 1/\sqrt{\omega^3}$ 。提示: 参考 *diffraction model*。
4. 用 RLC 阻抗模型量化加速器部件阻抗是典型方法, 但是其在高频区域 $Z_{\text{RLC}} \propto 1/\omega^2$, 与上题 (g) 的 $Z_{\parallel} \propto 1/\sqrt{\omega}$ 不一致。有没有什么办法调和这个不一致?
- 解** 思路: 要求满足 kick factor 有限且满足数值计算的 ω 定标关系, 再回头修正阻抗模型, 作为约束条件。
5. 试简述以下求解尾场阻抗的几种方法大致思路:
- 相对低频: 场匹配法、微扰法、级数展开/截断法
 - 相对高频: 积分方程法、格林函数法、迭代法、宽带谐振腔模型、衍射模型
6. 试描述以下加速器常见结构的尾场阻抗分析思路⁴²: (参考下页图)
- step-in
 - step-out
 - 单个 open cavity (左图) 或 collimator (右图, 又称 iris)
 - bellows⁴³
 - 串列 cavities
 - 实际计算 (a,b) 情况, 会发现, 在高频区间, (a) 的实部阻抗 $\rightarrow 0^-$, (b) 的实部阻抗几乎为一常数 > 0 。试着利用物理图像解释此结果。提示: 结构不连续面会截断束团库仑场。
 - 对 (c) 左边图情况, 试说明, 束团纵向束长 σ_z 与束团横向尺寸 σ_{\perp} , 何者与金属管壁尺寸 r_b 对集体效应关系更紧密?
 - 对 (c) 左边图情况, 当束团长度远大于金属管壁不连续尺寸时, 试估算或说明阻抗为纯虚数⁴⁴。提示: 利用法拉第定律。
 - 对图 (d,e) 情况, 试说明, (d) 中的波纹管半径 $r_b(z)$ 改变幅度不是太剧烈情况下, 阻抗为纯虚数。
 - 对图 (d,e) 情况, 试估算, 对 (e) 结构, 当凹槽深度 $(b-a)$ 多深时, $r=b$ 外侧金属管壁将不贡献阻抗。正是这个原因, 衍射模型才能适用。
 - 对图 (d,e) 情况, 试说明, 对单个 cavity, 有 $Z_{\parallel} \propto 1/\sqrt{\omega}$ 。对于无穷长串列 cavities, 则有 $Z_{\parallel} \propto 1/\sqrt{\omega^3}$ 。提示: 此题稍难。
7. 考虑理想导体金属管壁存在小凹槽, 管壁半径 b , 凹槽深度 d , 长度 g , 估算其阻抗。以 RLC 阻抗表示, 有 $R_S \approx 60 \Omega$ 、 $Q \approx 1$ 、 $\omega_R \approx \frac{c}{b}$ 。
8. 忽略同步辐射效应, 考虑一储存环, 周长 100 m, 真空金属铝管半径 5 cm, 束团粒子个数 10^{11} , 束长 1 cm。假设环中仅有一圆柱射频谐振腔, 腔半径 10 cm。腔中除基模外, 存在中心频率等间隔的六个高阶模, 每个高阶模 $R_S/Q = 60 \Omega$ 。

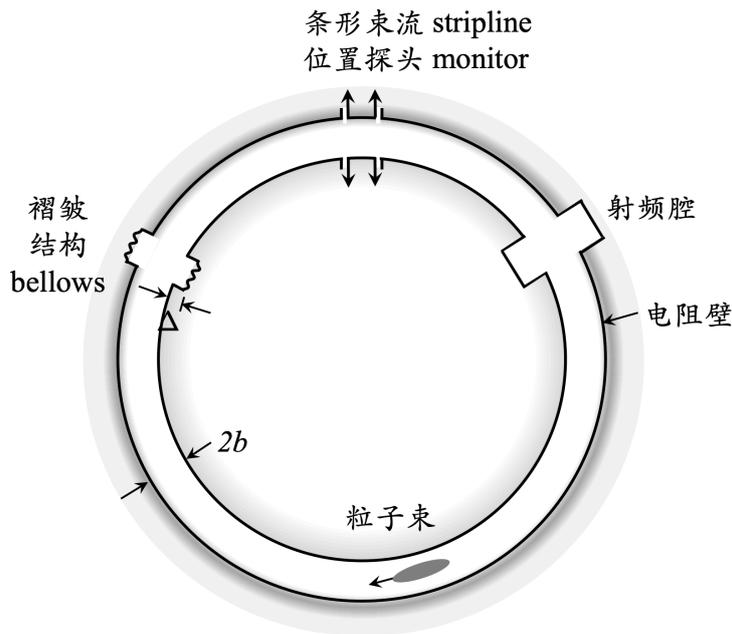
⁴²这题用文字说明大致的分析思路即可。

⁴³在加速器某些位置为了容许温度改变造成有些部件纵向可能的位移或有些部件需要加热至高温以达到更好的真空条件, 会在那些部件其间插入波纹管。

⁴⁴此题可以通过上题检验结果一致性。首先, 上题 (b) 的实部阻抗在束团长度远大于金属管壁不连续尺寸时几乎为一常数 > 0 且趋近于 0^+ 。对 (c) 左图情况, 可以视为 step-out 与 step-in 的串列结构, 束团经过 step-out 时, $\text{Re } Z \sim 0^+$ 表征损失能量; 束团经过 step-in 时, $\text{Re } Z \sim 0^-$ 表征得到能量。当长束团经过 (c) 左图的结构时, 束团整体净能量改变 ~ 0 。结构阻抗对束团的影响为改变束团内部能量分布, 为纯虚数。



- 估算基模在金属管壁上的能量损失。
 - 估算每个高阶模在金属管壁上的能量损失。
 - 估算其余高于 c/b 的高频成分阻抗在金属管壁上的能量损失。
 - 估算趋肤深度。由趋肤深度可以推知衰减系数，由此推论这些能量损失是“局部”局限在加速器金属管壁或是“均匀”分布在加速器金属管壁？
9. 参考下图，评估全环的 $|Z_{\parallel}/n|$ 与 Z_{\perp} 。假设储存环全环周长 200 m，包含 10 个波纹管 (bellows, $\Delta = 1$ cm)，10 个条带型束测元件 (stripline monitor, $R_S = 3 \Omega$, $d = 20$ cm)，2 个 RF 腔。



10. 利用平面电磁波展开式

$$E_{\parallel}(z, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{E}_{\parallel}(\omega, k) e^{-i\omega t + ikz}$$

代入尾场函数定义，证明尾场函数的主要贡献源于与测试速度粒子同步的场分量。

考虑以下两种情况：

- 假设结构长度无限大，积分范围 $(-\infty, \infty)$ 。
 - 假设结构为有限长度，积分范围 $(-L/2, L/2)$ 。注：此结论对极高频的谐波分量未必成立。
11. 对纵向 RLC 阻抗 $Z_{\parallel}^{\text{RLC}}(\omega)$ ，证明

$$\int_0^{\infty} \text{Re} Z_{\parallel}(\omega) d\omega = \frac{\pi R_S \omega_R}{2Q}$$

