

# 电磁辐射与加速器束流动力学导论

**Introduction to Accelerator Beams, Collective Dynamics,  
Electromagnetic Radiation and Free-electron Lasers**

作者：蔡承颖 (Cheng-Ying Tsai, C.-Y. Tsai)

## 特别声明

此笔记/讲义非最终版，内容可能存在笔误、谬误，仍在迭代修改中。此讲义不定期更新。

# 第七章 粒子加速器基础：束流光学 — 横向

## 内容提要

- 线性磁铁部件
- 磁铁的磁场强度极限：饱和、磁滞
- Hill 方程、Courant-Snyder 参量或 Twiss 参量
- 发射度的定义
- 几种常见的磁聚焦结构单元
- 传输矩阵 — Case 1
- 闭轨畸变、共振 — Case 2
- 色散、色品 — Case 3
- $H$  函数
- 动力学孔径

为描述加速器带电粒子束流动力学，上一章作为预备知识，介绍了经典力学中的哈密顿力学、相空间基本概念、正则变换与 Frenet-Serret 坐标系。这一章将从单粒子开始，暂时忽略束团内粒子间彼此的交互作用，先讨论单粒子受外部磁场影响时的动力学过程。由于忽略了束团内粒子间彼此的交互作用，又称束流光学 (beam optics) 或电子光学 (electron optics)<sup>1</sup>。这一章主要介绍横向，下一章介绍纵向动力学。多粒子效应将在第9章与第三册介绍。

在介绍加速器哈密顿量时，我们从假设一带电粒子在外加电磁场中开始，但还未指明产生外部电磁场的部件。在粒子加速器中，一般用电场加速或减速粒子，用磁场弯转或聚焦粒子。以下先介绍几种常见的磁铁部件。带电粒子经过这些磁铁部件时，其运动轨迹自然受到影响。一些磁铁部件按特定顺序、依次排列，用来传输带电粒子束从一输入的相空间状态到一输出的相空间状态，称此为一段磁聚焦结构 (lattice)。于是，我们接着介绍一种<sup>2</sup>描述带电粒子在磁聚焦结构中运动行为的系统性的方法，称 Courant-Snyder 参量。带电粒子经过由磁铁部件组成的周期性磁聚焦结构后，可以决定其单粒子的光学稳定性。再来，简短介绍几种常见的磁聚焦结构 (lattice) 单元。由于加速器从不是以加速或传输单一个<sup>3</sup>带电粒子为目的，而是加速或传输粒子束团 (即，尽可能多的粒子)。考虑到非参考粒子，这一章后半篇幅将讨论带电粒子在加速器中的闭轨畸变 (closed orbit distortion, COD)、共振 (resonance)、色散 (dispersion)、色品 (chromaticity) 等效应。

以下如没有特别声明，这一章一律假设电子参考能量恒定，暂时忽略同步辐射效应。

初次接触加速器物理的读者可能会有疑惑：加速器不加速粒子，还称加速器？既然名为加速器动力学导论，学了前六章却对粒子加速过程着墨不多。首先，

- 对直线加速器 (linear accelerator, linac)，在加速腔中的粒子 — 如果不在零相位或  $\pi$  相位 — 确实获得加速 (减速)，粒子能量增加 (减少)。

<sup>1</sup>这里虽称“光学”，但其实与“光”没有关系，只是这里描述电子的运动行为与描述几何光学用的传输矩阵法 (又称 ABCD 矩阵) 非常类似，因此才称电子光学或束流光学。

<sup>2</sup>虽然不是唯一的方法，但是是一种自然的、直观的、标准的方法。

<sup>3</sup>从这个意义上讲，单个电子能值多少钱？

- 对同步加速器 (synchrotron), 细分两种。一种是真用来加速粒子, 称增强器或增能环 (booster 或 booster synchrotron), 粒子能量逐圈改变, 加速腔 (或称谐振腔) 在粒子逐圈绕行时提供能量加速粒子至更高能量。另一种是储存环 (storage ring), 粒子能量逐圈大致维持恒定, 此时加速腔 (或称谐振腔) 只是用来补偿逐圈绕行时由于同步辐射或其它原因的小幅度能量损失。
- 对能量循环直线加速器 (energy recirculation linac) 或能量回收直线加速器 (energy recovery linac, ERL), 在加速腔中的粒子 — 如果不在零相位或  $\pi$  相位 — 确实获得加速 (减速), 粒子能量增加 (减少)。

从实际机器运行层面看, 粒子处在加速或减速过程的时间较短 (一般以“秒”或“毫秒”计), 处在储存过程则相对长得多 (一般以“小时”或“几十分钟”计)。虽然我们同样关心粒子加速/减速过程与储存过程的束流动力学, 但从学习层面看, 由简至繁, 固定能量情况的分析相对简单。所以, 从能量恒定的情况开始应该是合理的。

## 7.0 问答预览

1. 粒子加速器中常用的磁场部件有哪些?  
⇒ 二极铁、四极铁、六极铁、螺线管等。
2. 什么是漂移段? 它在粒子加速器中起到什么作用?  
⇒ 真空漂移段, 没有外加电场和磁场, 使粒子沿直线运动。
3. 二极铁、四极铁、六极铁分别是什么类型的磁场部件? 它们对粒子的运动有什么影响?  
⇒ 二极铁使粒子转弯, 四极铁使粒子聚焦或散焦, 六极铁用来修正色差。
4. 什么是超导磁铁? 与常温磁铁相比有哪些优缺点?  
⇒ 超导磁铁的磁体使用超导材料, 磁场强度高, 但需要低温环境。
5. 什么是 Hill 方程?  
⇒ Hill 方程描述粒子在磁场中的运动, 形式类似于准简谐振动。
6. 什么是 Courant-Snyder 参数? 它们如何描述粒子的运动行为?  
⇒ Courant-Snyder 参数包括  $\beta, \alpha, \gamma$ , 分别描述粒子的振幅、在相空间中的倾斜程度和高度。
7. 什么是传输矩阵? 它如何描述粒子的运动过程?  
⇒ 传输矩阵描述粒子在磁聚焦结构中的运动, 线性传输矩阵元素仅与部件参数有关, 可以简化计算。
8. 什么是发射度?  
⇒ 发射度描述束团在相空间中的分布面积, 反映了束团的大小和形状。
9. 什么是闭轨畸变?  
⇒ 闭轨畸变是指参考粒子在存在系统误差的磁聚焦结构中形成的非完美封闭轨迹。
10. 在粒子加速器中, 什么是共振?

- ⇒ 共振是指粒子在磁聚焦结构中由于系统误差导致的振幅快速增加现象。
11. 在粒子加速器中，什么是色散？
- ⇒ 色散是指不同能量的粒子在色散元件中运动轨迹的差异。
12. 在粒子加速器中，什么是色品？
- ⇒ 色品描述不同能量偏差导致的 **betatron** 振荡频率的差异。
13. 六极铁如何修正色品？它的代价是什么？
- ⇒ 六极铁通过改变不同能量偏差粒子的 **betatron** 振荡频率来修正色品，代价是减小动力学孔径。
14. 什么是动力学孔径？
- ⇒ 动力学孔径描述粒子在磁聚焦结构中运动的有效边界，反映了束团的稳定性和寿命。
15. 什么是频率映射分析法？
- ⇒ 频率映射分析法通过分析粒子的 **betatron tune** 和扩散率来研究束流的非线性动力学。

## 7.1 几种常见的磁铁部件

这里的外部磁场源于加速器的各种磁铁部件, 包含二极铁 (dipole, 又称弯转磁铁, 使粒子转弯)、四极铁 (quadrupole, 使粒子横向聚焦、散焦)、六极铁 (sextupole, 修正粒子色品)、螺线管 (solenoid, 使粒子横向聚焦、散焦) 等。没有磁场情况下的真空漂移段 (drift) 可以视为一种特殊的磁铁部件。

这里仅考虑电子受外部静磁场影响, 不考虑电子加速或减速, 也不考虑电磁辐射效应。



**笔记** 只要力的大小一样, 静电场其实也可以使粒子弯转, 为什么不介绍电场?

$$\frac{|\mathbf{F}_e|}{|\mathbf{F}_m|} = \frac{|q||\mathbf{E}|}{|q||\mathbf{v} \times \mathbf{B}|} = \frac{E}{vB} \equiv 1 \Rightarrow \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{B}|} = \beta c \quad (7.1)$$

当粒子能量非常低时,  $\beta \ll 1$ , 用电场使粒子转弯不失为一办法 (以前中学物理也学过)。但是, 当粒子接近相对论速度时,  $\beta \approx 1$ , 且  $\beta c \approx c \approx 3 \times 10^8$  m/s, 此时 300 MV/m 的电场大小约为 1 T 的磁场大小。在自然界, 要产生 1 T 的静磁场相对容易, 但是要产生 300 MV/m 的静电场就很有难度了。同时别忘了金属结构在高场强情况下容易崩溃, 参考 §1.14。

### 7.1.1 真空漂移段

#### 定义 7.1. 漂移段 (drift)

又称真空或自由空间 (free space) 段, 不存在外加电场、磁场, 即

$$\mathbf{B} = 0, \quad A_s = 0 \quad (7.2)$$

为线性部件。

### 7.1.2 二极铁

#### 定义 7.2. 二极铁 (dipole)

类似于光学中的棱镜。定义为

$$\mathbf{B} = \hat{y}B(s), \quad A_s = -B(s)x \left(1 - \frac{x}{2\rho}\right) \quad (7.3)$$

为线性、横向  $xy$  非耦合部件。其中,  $\rho \gg x$  为二极铁弯转半径。

**注** 与磁极间距有关, 一般常温/室温的加速器二极铁弯转磁场强度大约在 0.5 ~ 1.8 Tesla; 超导二极铁弯转磁场强度则可以到 5 ~ 10 Tesla。

由图 7.1 可以看出, 二极铁的功能为使带电粒子转弯。粒子经过二极铁, 转弯的程度由磁铁磁场强度与磁铁长度有关。作为单一功能的分极磁铁, 理想的二极铁磁场为均匀场。希望均匀场的范围越大越好, 在工程实际中, 一般好场区 (good field region, GFR) 的

典型要求为  $\pm 10^{-4} \Delta B/B$ 。

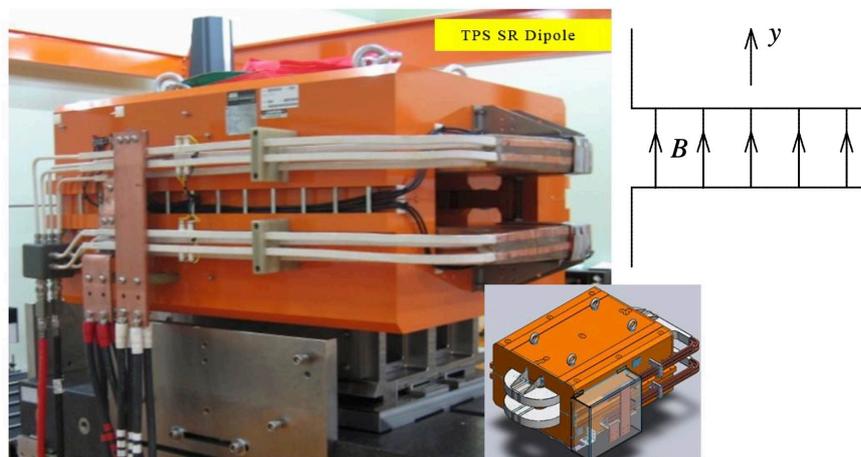


图 7.1: 二极铁。图例取自周炳荣上课讲义。

练习 7.1 忽略  $|x/\rho|$  的二阶小项，证明  $\mathbf{B} = \hat{y}B(s)$ 。 ■

解 利用 Frenest-Serret 坐标系中  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  的向量运算公式。 ■

### 7.1.3 四极铁

#### 定义 7.3. 四极铁 (quadrupole)

分为正四极铁 (normal quadrupole) 与斜四极铁 (skew quadrupole)，类似<sup>a</sup>于光学中的透镜。正四极铁定义为

$$\mathbf{B} = G(s)(\hat{y}x + \hat{x}y), \quad A_s = \frac{1}{2}G(s)(y^2 - x^2) \quad (7.4)$$

为线性、横向  $xy$  非耦合部件。其中， $G(s)$  为正四极铁梯度。

斜四极铁为正四极铁旋转  $45^\circ$ ，定义为

$$\mathbf{B} = G_{sq}(s)(-\hat{y}y + \hat{x}x), \quad A_s = G_{sq}(s)xy \quad (7.5)$$

为线性、横向  $xy$  耦合部件。其中， $G_{sq}(s)$  为斜四极铁梯度。

**注** 与孔径尺寸有关，一般常温/室温的加速器四极铁磁场梯度大约在  $1 \sim 50$  T/m 范围；超导四极铁磁场梯度则可以到  $50 \sim 250$  T/m 范围。

<sup>a</sup>不同的地方在于，光学透镜对光束在横向两个方向同时聚焦或同时散焦。 □

四极铁的功能为使带电粒子聚焦或散焦。由图 7.2 可以看出，粒子在水平  $x$  方向如果聚焦，则在  $y$  方向将是散焦。由 Maxwell 方程，四极铁只能在一个方向聚焦，在另一个方向将散焦，无法同时在两个方向提供聚焦或散焦。相对于光子束，不同的地方在于，光学透镜对光束在横向  $x, y$  两个方向能同时聚焦或同时散焦。

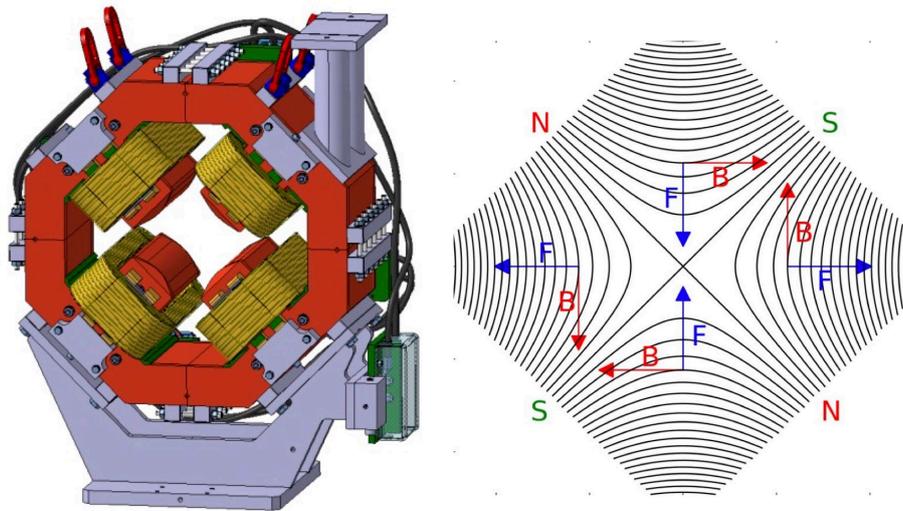


图 7.2: 正四极铁。黑色实线为磁场线。右图中的箭头  $\mathbf{F}$  方向代表正电粒子入纸面受力, 或负电粒子出纸面受力。

斜四极铁为正四极铁旋转  $45^\circ$ , 场形如图 7.3 所示。当粒子经过斜四极铁时, 在横向  $x$  与  $y$  方向的受力同时存在, 可能导致粒子横向运动耦合。一般来说, 我们希望粒子束的磁聚焦结构设计尽可能在三个方向解耦, 因此, 当设计一(正)四极铁时, 希望将磁铁“摆正”, 尽量减少斜四极铁磁场分量。但实际加速器设计中, 不可避免存在斜四极场分量, 一个用来消除斜四极场的方式即安装斜四极铁。

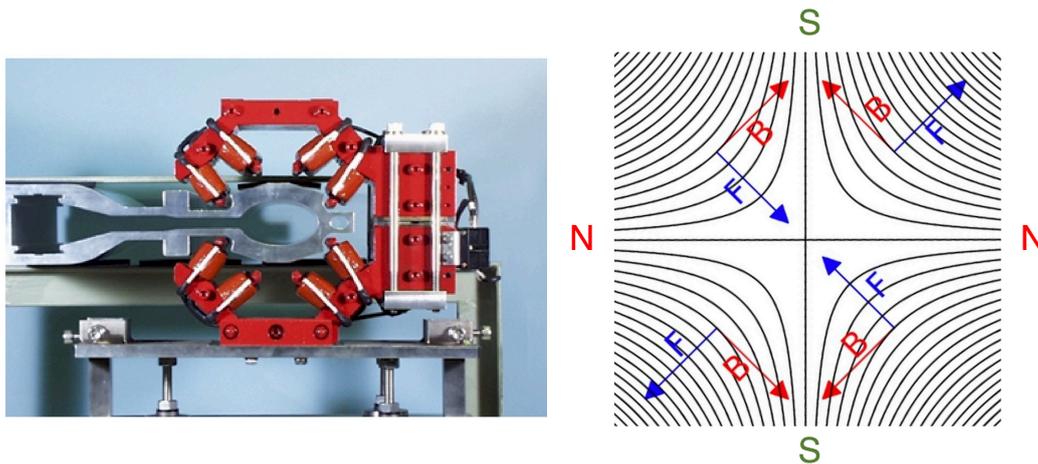


图 7.3: 斜四极铁。黑色实线为磁场线。右图中的箭头  $\mathbf{F}$  方向代表正电粒子入纸面受力, 或负电粒子出纸面受力。左图取自 <https://accelconf.web.cern.ch/e00/papers/tup4a03.pdf>。

以下比较目前采用的传统常温磁铁与低温超导磁铁的区别。

	传统磁铁	超导磁铁
操作环境	室温 20°C 或 300 K	低温 (cryogenic)
形态	铁磁	超导电缆
品质要求	极面修整 (shim)	超导电缆绕制
最大场强	~ 2 T	~ 10 T
典型梯度	~ 20 T/m	~ 150 T/m

 **笔记** 关于“低温”，对应的英文为 cryogenic temperatures，而不是笼统地称 low temperatures。一般指  $-150^{\circ}\text{C}$  (或 123 K) 至绝对零度  $-273.15^{\circ}\text{C}$  (或 0 K) 的温度范围。 $-150^{\circ}\text{C}$  以上一般不视为“低温”，因为金属在高于  $-150^{\circ}\text{C}$  环境下处理时，一般不发生明显结晶结构变化。一般通过液氮 (liquid nitrogen, 77.4 K)、液氦 (liquid helium, 4.2 K) 等达到这样的温度。如果不使用低温系统，就无法实现超导。

氦气是冷却剂的自然选择。在大气压力下，气态氦在大约 4.2 K 时变成液态。进一步冷却到 2.17 K 或更低温度时，它就会从流体状态转变为超流体 (superfluid)。超流体氦具有非常独特的特性，比如极高的热导率，为一种高效的热导体。这些特性使得氦气成为冷却和稳定加速器大型超导系统的绝佳制冷剂。大型强子对撞机 (Large Hadron Collider, LHC) 上的所有磁铁为电磁铁，即磁场由电流产生的磁铁，线圈材料为 NbTi，必须保持低温才能达到超导状态。大型强子对撞机的主磁铁工作温度为 1.9 K ( $-271.3^{\circ}\text{C}$ )，比外太空的 2.7 K 温度要低。冷却过程一般需要数周，包含三个阶段：第一阶段，先将氦气冷却到 80 K，再到 4.5 K；第二阶段，氦气被注入磁体的冷块；第三阶段再冷却到 1.9 K。除超导磁铁外，超导技术也被应用到射频加速腔 (第 8 章将介绍)，运行温度约在 2 至 4.2 K。超导射频腔 (superconducting cavity, SRF cavity) 是一复杂的多学科、跨学科领域，目前仍在不断进展。另外，高场低温射频光阴极电子注入器 (ultrahigh field cryogenic RF photocathode) 也采用低温，运行温度约在 20 至 50 K。

 **笔记** 对超导磁铁应用在粒子加速器的更多介绍，可参考 D. Schoerling and A. Zlobin Ed., Nb3Sn Accelerator Magnets: Designs, Technologies and Performance, Springer (2019). <https://library.oapen.org/handle/20.500.12657/23335>。

在一些磁铁设计中，可能需要同时使粒子偏转与聚焦 (或散焦)。这类磁铁设计称组合磁铁 (combined-function magnet)，如图 7.4 (右)，为一种横向梯度二极铁。图 7.4 (左) 为单纯提供弯转磁场的二极铁，有时又称 separate-function magnet。

图 7.5 给出两种不同剖面磁场，分别对应横向水平聚焦与横向水平散焦。这里假设粒子带正电，运动方向为入纸面。

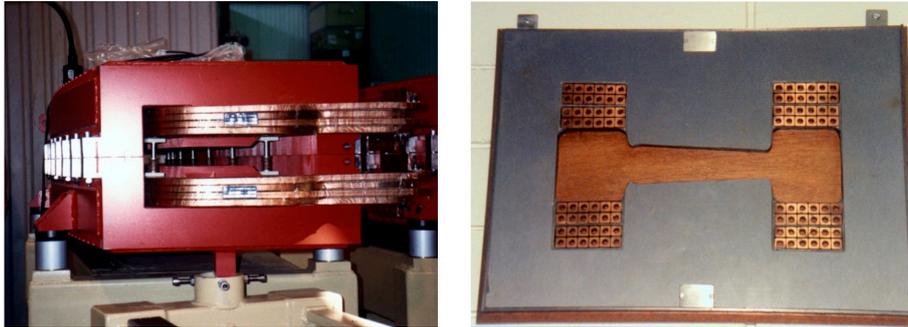


图 7.4: 左图: 单纯提供弯转磁场的二极铁 (separate-function dipole magnet); 右图: 组合磁铁 (combined-function magnet)。图例取自周炳荣博士上课讲义。

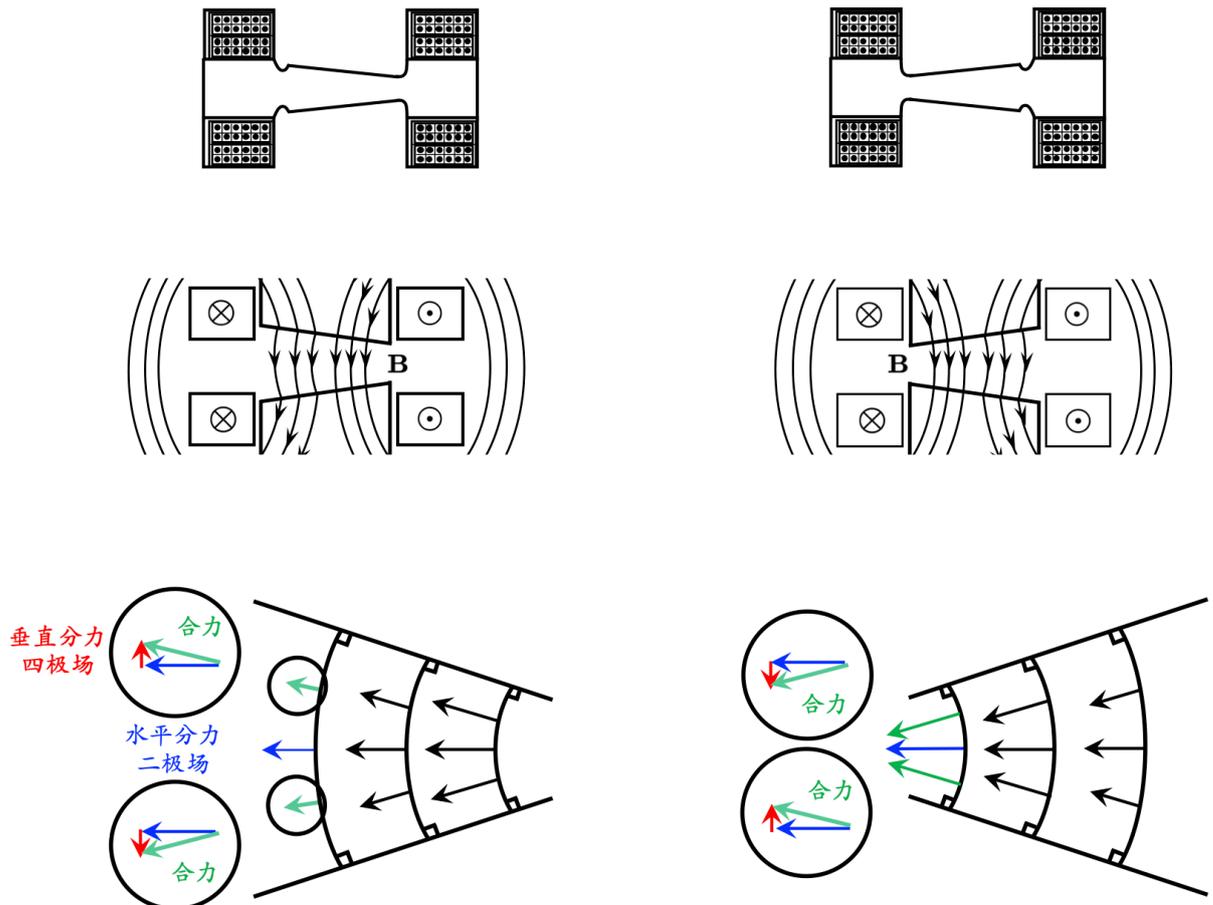


图 7.5: 组合磁铁中的磁场线。左图: 横向水平聚焦 (垂直散焦); 右图: 横向水平散焦 (垂直聚焦)。束团进入纸面后往左弯转。

练习 7.2 计算磁铁中空区域的磁场。参考图 7.6 中的二极铁与四极铁，计算中空区域磁场。为简化分析，假设铁磁媒质  $\mu_{\text{iron}} \rightarrow \infty$ 。

解 利用安培定律。此例给出上述二极铁的  $B(s) = \frac{\mu_0 NI}{a}$ ，四极铁的  $G(s) = \frac{2\mu_0 NI}{a^2}$ 。

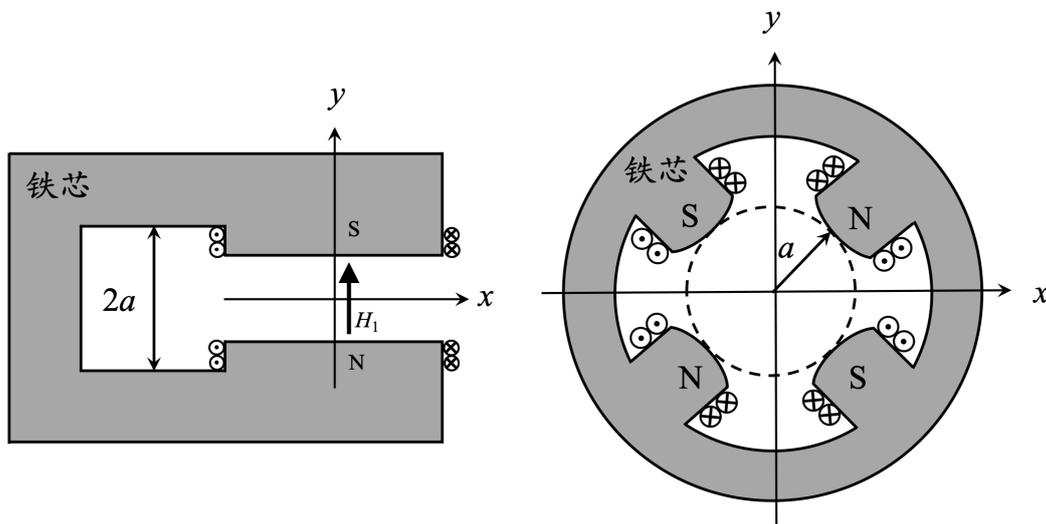


图 7.6: 左图: C 形二极铁; 右图: 载流线圈绕成的四极铁。图中的  $a$  称为四极铁的孔径半径 (bore radius)。

笔记 美国费米实验室 (Fermilab) 的图标即为二极铁与四极铁有机组合 (a union of dipole and quadrupole magnets), 在 1967 年由 Angela Gonzales 设计。感兴趣的读者可自行查找或参考 [https://history.fnal.gov/virtual/gonzales\\_wall17.html](https://history.fnal.gov/virtual/gonzales_wall17.html)。

由前面讨论知，穿过四极铁中心或轴心对称位置的粒子感受不到四极磁场，或者说，看不到四极铁的存在，四极铁对其没有作用。对不在轴心轨道上的粒子，四极铁可以用来将粒子聚焦或散焦，但是，仍假设这些不在轴心轨道上的粒子能量仍为参考粒子能量，即假设这些不在轴心轨道上的粒子能量仍满足磁刚度  $B\rho$  条件。实际情况下，不在轴心轨道上的粒子的能量未必为参考能量，因此，相同的磁场强度未必能起到同样的偏转、聚焦/散焦的效果。利用洛伦兹力方程，粒子通过四极铁受到横向力有

$$\frac{dp_x}{ds} = -q \frac{v_z}{c} B_y = -q \frac{v_z G}{c} x \quad (7.6)$$

其中， $G = \frac{\partial B_y}{\partial x}$ 。根据  $p_x = \gamma m_0 v_x = \gamma m_0 \dot{x} \approx \gamma m_0 c x'$ ，有  $\frac{dp_x}{ds} \approx \gamma m_0 c x''$ ，于是，洛伦兹力方程可改写为

$$\frac{d^2 x}{ds^2} \approx -\frac{qv_z B_y}{\gamma m_0 c^2} = -\frac{qv_z G}{E} x \quad (7.7)$$

在横向同一位置不同能量的两粒子，由于接收到的四极铁聚焦程度不同，即通过四极铁后，能量不同的粒子将感受到不同的  $\Delta x'$

$$\Delta x' \approx \left( \frac{d^2 x}{ds^2} \right) \Delta s_{\text{quad}} \propto \frac{1}{E} \quad (7.8)$$

在下游  $\ell$  处将出现  $\Delta x = (\Delta x') \ell$  差异。这种类似于“像差”的效应可以通过六极铁修正。

## 7.1.4 六极铁

**定义 7.4. 六极铁 (sextupole)**

六极铁为非线性磁铁部件，指的是磁场的空间坐标分布不再是一次关系  $\propto x, y$  而是  $\propto x^2, y^2, xy$ 。六极铁磁场定义为

$$\mathbf{B} = S(s) \left[ \frac{1}{2} \hat{y} (x^2 - y^2) + \hat{x} xy \right], \quad A_s = S(s) \left( \frac{1}{2} xy^2 - \frac{1}{6} x^3 \right) \quad (7.9)$$

其中， $S(s) = \partial^2 B_y / \partial x^2$  为六极铁梯度。按惯例， $S > 0$  称聚焦六极铁 (focusing sextupole)； $S < 0$  称散焦六极铁 (defocusing sextupole)。

**注** 六极铁也分正六极铁与斜六极铁，斜六极铁为正六极铁旋转  $30^\circ$ ，细节此处不论。

**注** 与孔径尺寸有关，一般常温/室温的加速器六极铁磁场梯度约可到  $2000 \text{ T/m}^2$ ；超导六极铁磁场梯度甚至可到  $3000 \text{ T/m}^2$  以上。 □

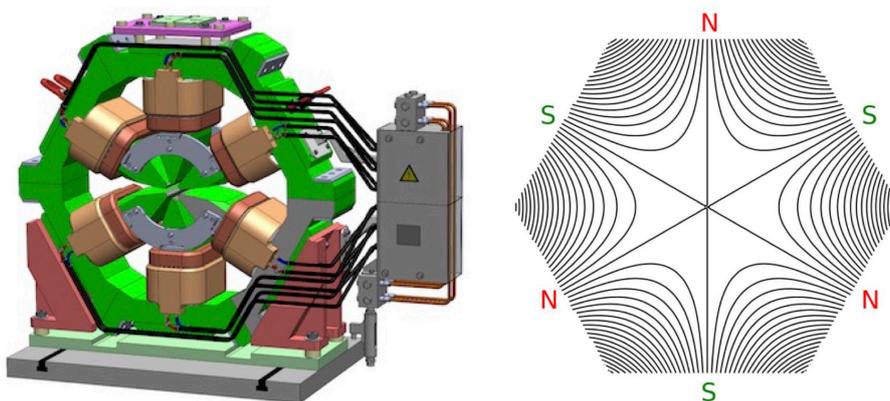


图 7.7: 正六极铁。黑色实线为磁场线。

**练习 7.3** 根据图 7.7，利用洛伦兹力判断电子经过六极铁时，磁场与磁力方向。验证除  $x$  轴外，左侧半平面与右侧半平面分别为  $x$  方向散焦与聚焦，或  $y$  方向聚焦与散焦。 ■

**练习 7.4** 计算  $S(s)$ 。为简化分析，假设铁磁媒质  $\mu_{\text{iron}} \rightarrow \infty$ 。 ■

参考图 7.7，利用洛伦兹力判断电子经过六极铁时磁场与磁力方向，将发现，除  $x$  轴外，左侧半平面与右侧半平面分别为  $x$  方向散焦与聚焦，或  $y$  方向聚焦与散焦。由 Eq. (7.7) 可以看到，沿着  $y$  轴在  $x$  的两侧，四极铁对不同能量偏差的粒子导致的聚焦/散焦异号。因此，如果能在四极铁下游处适当位置安排六极铁，恰好使得由于能量偏低而过度聚集的粒子落在六极铁散焦一侧，使由于能量偏高而聚集不足的粒子落在六极铁聚焦一侧，则可以有效修补像差。上述情况将以“色品”(chromaticity) 参量量化。六极铁长被用来修正色品，为非线性部件。色品在这一章后面 §7.10 将介绍。

**定义 7.5. 二极铁、四极铁、六极铁强度**

常见的二极铁、四极铁、六极铁强度定义如下：

$$\text{Dipole strength } \frac{1}{\rho} [\text{m}^{-1}] = \frac{|q|cB_0}{E} = 0.2998 \frac{B_0[\text{T}]}{E[\text{GeV}]} \quad (7.10)$$

$$\text{Quadrupole strength } K_1 [\text{m}^{-2}] = \frac{|q|cG}{E} = 0.2998 \frac{G[\text{T/m}]}{E[\text{GeV}]} \quad (7.11)$$

其中， $G = \frac{\partial B_y}{\partial x}$ 。有时  $K_1$  写成  $K$ 。

$$\text{Sextupole strength } K_2 [\text{m}^{-3}] = \frac{|q|cS}{E} = 0.2998 \frac{S[\text{T/m}^2]}{E[\text{GeV}]} \quad (7.12)$$

其中， $S(s) = \partial^2 B_y / \partial x^2$ 。当不存在与四极铁强度  $K_1$  混淆时，有时  $K_2$  也写成  $K$ ，宜留意。

图 7.8 比较前面提到的二极铁、四极铁、六极铁与横向梯度二极铁的磁场强度函数与磁场线横截面示意图。

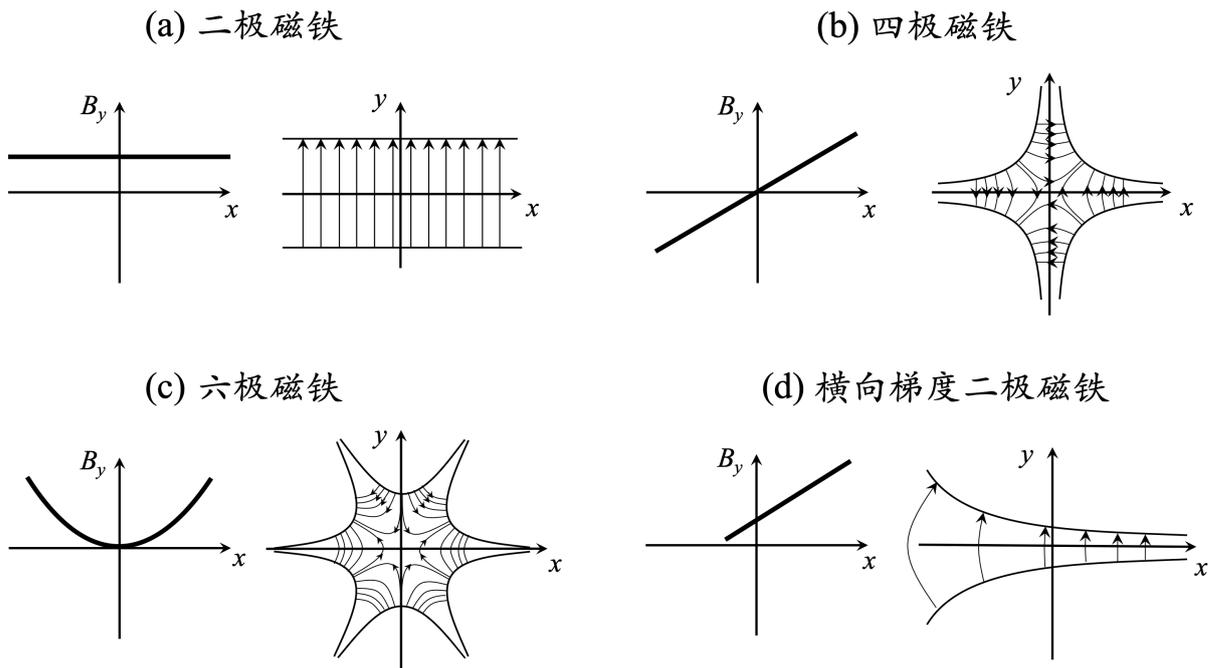


图 7.8: 磁场强度函数与磁场线横截面示意图。(a) 二极铁、(b) 四极铁、(c) 六极铁与 (d) 横向梯度二极铁。

图 7.9 比较前面提到的二极铁、四极铁、六极铁横向剖面与对应功能。

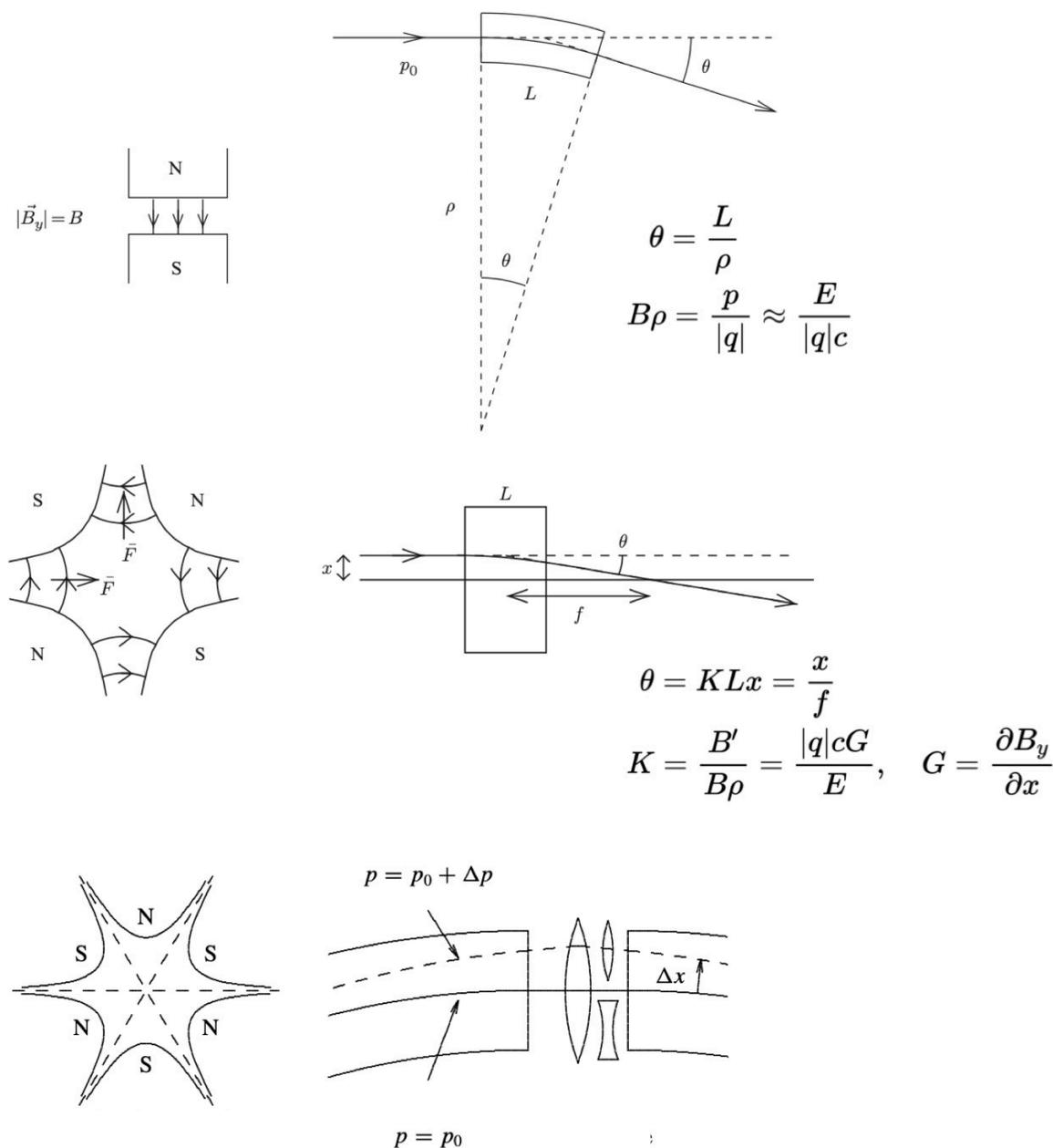


图 7.9: 二极铁、四极铁、六极铁横向剖面与功能比较。

**笔记** 以上横向场分极磁场的概念还可以继续往高阶推广，有八极铁 (octupole)、十极铁 (decapole) 等，用来修正对应的高阶磁铁像差或提供朗道阻尼抑制集体效应等，细节此处不论，有兴趣的读者请自行调研相关文献。

一种用于分析横向、高阶磁铁磁场的系统方法称 **Beth representation**，其思路为将描述磁场的向量位函数  $A_s$  与计算无电流区域采取的标量磁位函数  $\varphi_m$  结合，定义一个在复平面  $z = x + iy$  上的复变函数  $f(z)$ 。首先，在 §1.1.3 介绍过，对分析的磁场区域不存在电流情况，由于  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f = \mathbf{0}$ ，可引入标量磁位函数  $\varphi_m$  满足  $\nabla^2 \varphi_m = 0$ ，而有磁场

$\mathbf{B} = -\mu\nabla_{\perp}\varphi_m$ 。此外,对横向、二维静磁场,也可选向量位函数  $A_s(x, y)$  用来描述,横向磁场有  $\mathbf{B}_{\perp} = (\nabla \times A_s \mathbf{e}_s)_{\perp}$ 。

简化起见,不考虑弯转段,即  $\rho \rightarrow \infty$ ,由 Frenet-Serret 坐标系的向量运算,则有

$$\begin{aligned} B_x &= -\frac{\partial\varphi_m}{\partial x} = +\frac{\partial A_s}{\partial y} \\ B_y &= -\frac{\partial\varphi_m}{\partial y} = -\frac{\partial A_s}{\partial x} \end{aligned} \quad (7.13)$$

学过复变函数理论的读者应该能对以上形式结果与柯西-黎曼条件 (Cauchy-Riemann condition)<sup>4</sup>相对照,通过在复平面  $z = x + iy$  上构造一复变函数  $f(z)$ ,则分析二维、横向静磁场的问题就能转化为求解单变量复变函数的问题。关于 Beth representation 的结果总结为如下定理:

### 定理 7.1. Beth representation

通过构造如下复变函数

$$f(z = x + iy) = A_s(x, y) + i\varphi_m(x, y) \quad (7.15)$$

其磁场可以通过对  $z$  微分后得到,有<sup>a</sup>

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_s}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_m}{\partial y} - i \frac{\partial A_s}{\partial y} + i \frac{\partial\varphi_m}{\partial x} \right) \\ &= -(B_y + iB_x) \end{aligned} \quad (7.16)$$

于是,一个系统的讨论分极磁场的方法为将  $f(z = x + iy)$  做泰勒展开,即

$$\begin{aligned} f(z) &= A_s(x, y) + i\varphi_m(x, y) \\ &= -B_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n + ia_n}{n+1} (x + iy)^{n+1} \quad [\text{美式惯例}] \\ &= -B_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m + ia_m}{m} (x + iy)^m \quad [\text{欧式惯例}] \end{aligned} \quad (7.17)$$

对应的磁场有

$$\begin{aligned} B_y + iB_x &= B_0 \sum_{n=0}^{\infty} (b_n + ia_n) (x + iy)^n \quad [\text{美式惯例}] \\ &= B_0 \sum_{m=1}^{\infty} (b_m + ia_m) (x + iy)^{m-1} \quad [\text{欧式惯例}] \end{aligned} \quad (7.18)$$

此处  $B_0$  为二极磁场分量,按美式惯例,  $b_n$  和  $a_n$  称为  $2(n+1)$  阶多极展开系数;按欧式惯例,则  $b_m$  和  $a_m$  称为  $2m$  阶多极展开系数。 $b$  系数是“正”(normal)分量,

<sup>4</sup>对在  $z = x + iy$  复平面上的函数  $f(z)$  可解析  $\Leftrightarrow$  即其实部与虚部函数满足如下柯西-黎曼条件

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{与} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (7.14)$$

$a$  系数则为“斜”(skew)分量。

**注** 此法仅适用于横向、二维静磁场计算。

**注** 此讲义采用美式惯例。

**注** 更多细节讨论与例子可参考 [https://people.nslc.msu.edu/~haoy/teaching/AP\\_course\\_materials/magnets/magnets.html](https://people.nslc.msu.edu/~haoy/teaching/AP_course_materials/magnets/magnets.html)。原始论文可参考 R.A. Beth, Complex Representation and Computation of Two-Dimensional Magnetic Fields, J. Appl. Phys. **37**, 2568-2571 (1966). <https://doi.org/10.1063/1.1782086>

<sup>a</sup>由  $z = x + iy, z^* = x - iy$ , 有  $x = \frac{(z+z^*)}{2}, y = \frac{(z-z^*)}{2i}$ , 有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), & \frac{d}{dz^*} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z^*}, & \frac{\partial}{\partial y} &= i \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \end{aligned}$$

□

令  $B_{y0}$  为  $z = 0$  — 即  $x = y = 0$  — 取值, 则通过泰勒展开, 有

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{B_{y0}} \frac{\partial^n B_y}{m!} \Big|_{x=y=0} \\ a_n &= \frac{1}{B_{y0}} \frac{\partial^n B_x}{m!} \Big|_{x=y=0} \end{aligned} \quad (7.19)$$

其中,  $a_0 = 0, b_0 = 1$ 。对“正”分量, 恒有  $a_n = 0$ ; 对“斜”分量, 恒有  $b_n = 0$ 。以  $n = 0$  为例, 对应二极场分量, 其中, 正二极铁的磁场可写为

$$B_y + iB_x = B_{y0}b_0 \Rightarrow B_y = B_{y0}b_0, B_x = 0 \quad (7.20)$$

如果是斜二极铁, 其磁场可写为

$$B_y + iB_x = iB_{y0}a_0 \Rightarrow B_y = 0, B_x = B_{y0}a_0 \quad (7.21)$$

继续, 如果仅看  $n = 1$ , 对应四极场分量<sup>5</sup>, 其中, 正四极铁的磁场可写为

$$B_y + iB_x = B_{y0}b_1(x + iy) \Rightarrow B_y = B_{y0}b_1x, B_x = B_{y0}b_1y \quad (7.22)$$

如果是斜四极铁, 其磁场可写为

$$B_y + iB_x = iB_{y0}a_1(x + iy) \Rightarrow B_y = -B_{y0}a_1y, B_x = B_{y0}a_1x \quad (7.23)$$

对更高阶磁通磁场, 可以以此类推。

**练习 7.5** 粒子加速器中 — 特别是强子加速器, 一种常见的磁铁称  $\cos \theta$  磁铁 (cosine-theta magnet), 如图 7.10 给出。试估算中空区域的磁场。 ■

**解** 如图 7.10 (右),  $\cos \theta$  磁铁可近似视为二平行且半径皆为  $R$  的长圆柱载流导体, 有均匀、反向电流密度  $\mathbf{J}$ , 重叠区域的磁场可利用叠加原理求得。左侧圆柱在重叠区域内一

<sup>5</sup>留意, 仅看  $m = 1$  分量。如果同时考虑  $m = 0$  与  $m = 1$ , 那就是具有弯转与聚焦/散焦的组合功能磁铁。

点  $Q$  产生的磁场为

$$\mathbf{B}_Q^L = \frac{\mu_0 I_{enc}}{2\pi r_1} \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_{r_1} \stackrel{I_{enc} = \pi r_1^2 J}{=} \frac{\mu_0}{2} \mathbf{J} \times \mathbf{r}_1$$

类似地，右侧圆柱产生的磁场  $\mathbf{B}_Q^R = -\frac{\mu_0}{2} \mathbf{J} \times \mathbf{r}_2$ 。合成磁场有

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_Q &= \mathbf{B}_Q^L + \mathbf{B}_Q^R \\ &= \frac{\mu_0}{2} \mathbf{J} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{r}_P \end{aligned}$$

为单向均匀磁场，即二极磁场。 ■

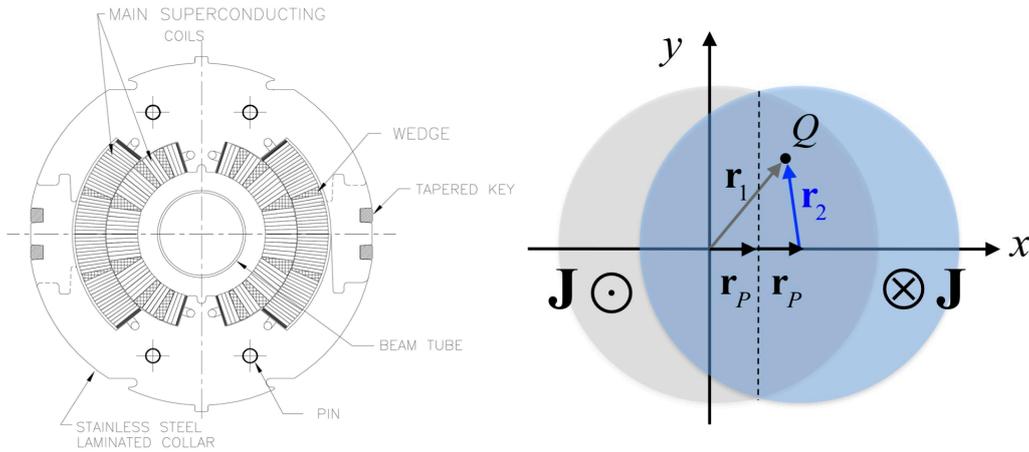


图 7.10:  $\cos \theta$  二极磁铁，左图为工程设计图，右图为简化模型。

🔴 练习 7.6 参考图 7.11，同样分析  $\cos \theta$  磁铁，但考虑镜像电流的影响。 ■

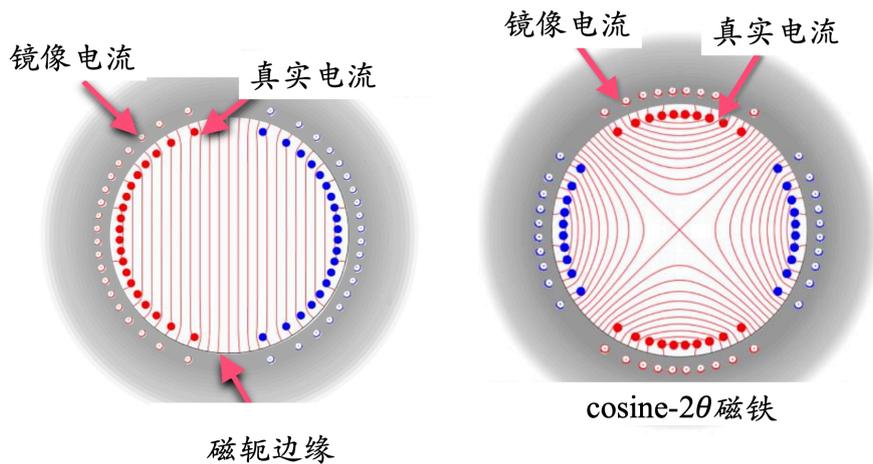


图 7.11: (左) 考虑镜像电流的  $\cos \theta$  二极磁铁，(右) 为  $\cos 2\theta$  四极磁铁。图例修改自 K. Sugita et al., Superconducting Septa and Fast Ramped  $\cos \theta$  Magnets, FCC Week 2015.

🔴 练习 7.7 参考图 7.11，除了  $\cos \theta$  磁铁外，还有  $\cos 2\theta$  磁铁，试计算中空区域内磁场。 ■

练习 7.8 对一般  $m$  阶  $\cos m\theta$  电流分布情况, 体电流密度函数可写成

$$J_z(\rho, \phi) = \frac{mI_0}{2a} \delta(\rho - a) \cos m\phi$$

其中,  $I_0$  为电流,  $a$  为磁铁的孔径半径。试计算中空区域内磁场。 ■

解

$$\begin{aligned} B_y + iB_x &= \frac{m\mu_0 I_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\cos m\phi}{z - ae^{i\phi}} \\ &= \frac{\mu_0 m I_0}{4a} \begin{cases} -\left(\frac{z}{a}\right)^{m-1} & \text{for } \rho < a \\ \left(\frac{a}{z}\right)^{m+1} & \text{for } \rho > a \end{cases} \end{aligned}$$

其中,  $z = x + iy$ ,  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。

推导可能用到

$$\frac{\mu_0 I_0}{2\pi(z - z_0)} \rightarrow \frac{\mu_0}{2\pi} \iint \frac{J_z(\rho, \phi)}{z - z_0(\rho, \phi)} \rho d\rho d\phi$$

### 7.1.5 螺线管

为纵向磁场主导的磁场部件。螺线管一般用在较低能量粒子束的横向聚焦。不同于四极铁, 螺线管的纵向磁场能够同时在横向  $x, y$  方向产生聚焦。螺线管的磁场包含本体场 (body field) 与端部场 (end field)。

无限长螺线管仅包含本体场, 以前在大学物理或电磁学课堂介绍静磁场时学过, 可以通过先计算一个“载流圆环”的磁场开始, 然后利用叠加原理将  $N$  匝“载流圆环”产生的磁场贡献加起来。参考图 7.12, 一个半径  $R$  的“载流圆环”沿着轴上距离环面  $d$  处  $P$  点的磁场有  $\mathbf{B}_P = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + d^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z$ 。则对于有限长  $L$  的螺线管, 半径  $R$ 、截面积  $\mathcal{A} = \pi R^2$ 、单位长度圈数密度  $n = N/L$ 、载流  $I$ 、内部磁导率  $\mu_0$  (假设真空), 利用叠加原理, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(s) &= \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 n I}{2} \left\{ \int_0^s \frac{R^2}{[R^2 + (z' - s)^2]^{3/2}} dz' + \int_s^L \frac{R^2}{[R^2 + (z' - s)^2]^{3/2}} dz' \right\} \\ &= \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 n I}{2} [\cos \alpha + \cos \beta] \end{aligned} \quad (7.24)$$

其中,  $\alpha, \beta$  如图 7.12 定义。当  $L \rightarrow \infty$  时,  $\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z \mu_0 n I = \mathbf{e}_z B_0$ , 无限长情况与螺线管截面形状无关。

螺线管纵向磁场形态与磁力线分布如图 7.13, 可以看到, 在螺线管端部 (前端与后端) 的场逐渐降为零。当螺线管很长时, 端部就像阶梯函数 (step function): 在螺线管内部磁场接近常数  $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z \mu_0 n I$ , 在边缘外部为零。但是, 这只是近似图像, 如果只用此螺线管主体场模型来做粒子动力学分析, 很可能得到错误的结果: 因为此近似图像的磁场不

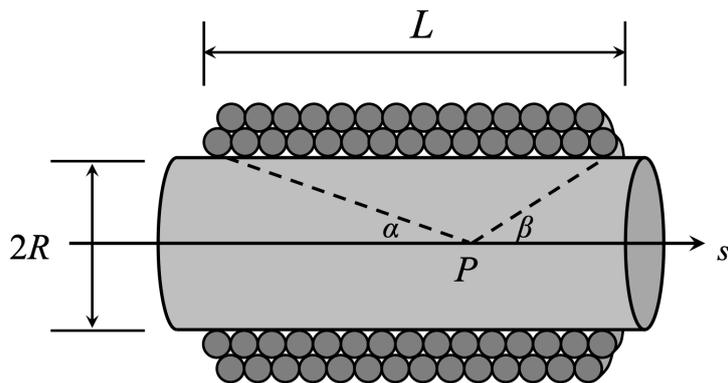


图 7.12: 有限长螺线管, 长度  $L$ 、截面半径  $R$ 、单位长度圈数密度  $n = N/L$ 、载流  $I$ 。

满足高斯定律  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ <sup>6</sup>! 在分析粒子动力学时, 必须考虑端部磁场的影响。

🔴 **练习 7.9** 验证一下, 仅有  $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z \mu_0 n I$  无法满足磁场高斯定律。 ■

在圆柱坐标系下, 磁场高斯定律有  $\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial B_z}{\partial s} = 0$ , 考虑角方向场均匀情况, 即  $\frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} = 0$ , 则在端部  $B_z$  分量随  $s$  的改变意味着伴随非零的  $B_\rho$ 。假设在两个端部的  $B_\rho$  分别有

$$B_{\rho, \text{左端}} \propto -\rho \delta \left( s + \frac{L}{2} \right), \quad B_{\rho, \text{右端}} \propto \rho \delta \left( s - \frac{L}{2} \right) \quad (7.25)$$

或

$$B_\rho = -C \rho \delta \left( s + \frac{L}{2} \right) + C \rho \delta \left( s - \frac{L}{2} \right) \quad (7.26)$$

其中,  $C$  为常数, 这里假设其两端磁场强度对称、相等。将  $B_z = B_0$  代入磁场高斯定律, 得到  $C = B_0/2$ 。因此, 完整的用于分析粒子动力学的螺线管磁场应写成

$$\mathbf{B}_{\text{sol}}(\rho, s) \approx -\frac{B_0}{2} \rho \delta \left( s + \frac{L}{2} \right) \mathbf{e}_\rho + B_0 H \left( s + \frac{L}{2} \right) H \left( \frac{L}{2} - s \right) \mathbf{e}_z + \frac{B_0}{2} \rho \delta \left( s - \frac{L}{2} \right) \mathbf{e}_\rho \quad (7.27)$$

其中,  $H$  为 Heaviside unit step function。

以上螺线管磁场的表示式假设主体场为常数, 即  $B_z = B_0$ 。当  $B_z$  为一函数时, 如:  $B_z = B_z(s)$ , 则完整的螺线管磁场应写成

$$\mathbf{B}_{\text{sol}}(x, y, s) \approx B_{z,0}(s) \mathbf{e}_z - \frac{x}{2} B'_{z,0}(s) \mathbf{e}_x - \frac{y}{2} B'_{z,0}(s) \mathbf{e}_y \quad (7.28)$$

其中,  $\prime \equiv d/ds$ 。

📖 **笔记** 这里的  $H$  为 unit step function, 又称 Heaviside step function, 定义为

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (7.29)$$

留意, 这里为近似符号。严格满足 Maxwell 方程组的解需要继续往下迭代添加修正项才行。

<sup>6</sup>四个麦克斯韦方程组, 有时候有些方程可以近似使用, 有些则不能妥协, 必须严格成立。

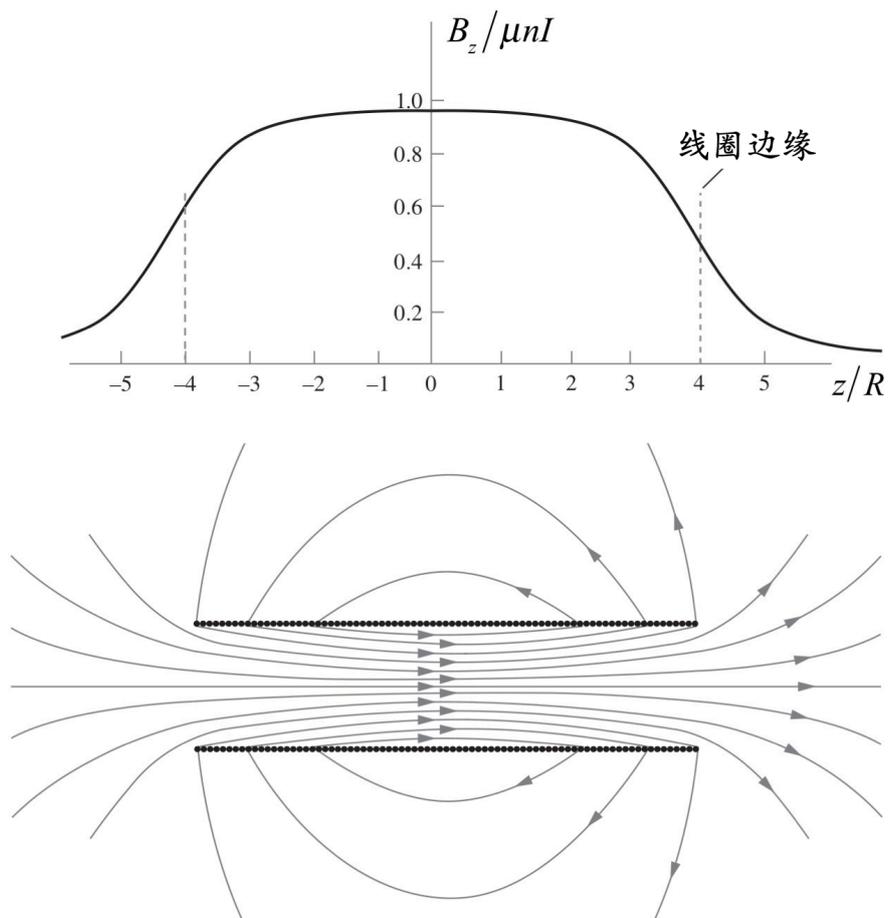


图 7.13: 有限长螺线管纵向磁场形态(上图)与磁力线分布(下图)。从下图可推知螺线管电流方向, 以此验证磁场的切向分界面边界条件。

此外, 这里的  $\delta$  为 Dirac delta function, 不是能量偏差坐标  $\delta$ , 不要搞混。附带一提, Heaviside step function 与 Dirac delta function 的关系有

$$\delta(x) = \frac{d}{dx}H(x), \quad H(x) = \int_{-\infty}^x \delta(s)ds \quad (7.30)$$

**注** 尽管较完整的螺旋管磁场仅在端部加了两个  $\delta$  函数构成的 kick<sup>7</sup>, 即  $\Delta x'$  或  $\Delta y'$ , 但是它对于粒子动力学的影响有时是决定性的、不可忽略的。当碰到螺线管粒子动力学分析时, 宜留意。

### 定义 7.6. 螺线管 (solenoid)

不同于四极铁, 螺线管的纵向磁场能够同时在横向  $x, y$  方向产生聚焦。螺线管的磁场包含本体场 (body field) 与端部场 (end field), 定义为

$$\mathbf{B}_{\text{sol}} = \mathbf{B}_{\text{本体}} + \mathbf{B}_{\text{端部}} \quad (7.31)$$

其中,

$$\mathbf{B}_{\text{本体}} = (0, 0, B_0), \quad \mathbf{B}_{\text{端部}} = \left(-B_0 \frac{x}{2\Delta s}, -B_0 \frac{y}{2\Delta s}, 0\right) \quad (7.32)$$

其中,  $B_0 = \mu_0 n I$ ,  $n$  为单位长度绕匝数 (线密度),  $I$  为单匝电流。上式的  $\Delta s$  为端部有效长度。对应的向量磁位函数有

$$\mathbf{A} = \left(-\frac{B_0}{2}y, \frac{B_0}{2}x, 0\right) \quad (7.33)$$

**注** 在粒子加速器中, 螺线管一般用在较低能量粒子束的横向聚焦、俘获粒子、控制粒子的自旋 (spin)<sup>a</sup> 等。

<sup>a</sup>自旋为粒子的一个本质参数, 其方向随着外部磁场环境改变, 更准确地说, 粒子自旋沿着磁力线方向进动 (precession)。

**练习 7.10** 证明此螺线管向量磁位函数能给出本体场与端部场。 ■

**解** 在螺线管端部,  $B_0$  不再视为常量, 此时  $\partial B_0 / \partial s \rightarrow B_0 / \Delta s$ 。 ■

### 定理 7.2. 圆柱对称螺线管的磁场

对圆柱对称螺线管, 已知对称中心轴上的磁场  $B_z(\rho = 0, \phi = 0, z)$ , 则根据 Maxwell 方程, 离轴的横纵向磁场有

$$\begin{aligned} B_z(\rho) &= B_{z,0} - \frac{\rho^2}{4}B_z'' + \frac{\rho^4}{64}B_z'''' - \frac{\rho^6}{2304}B_z'''''' + \dots \\ B_\rho(\rho) &= -\frac{\rho}{2}B_z' + \frac{\rho^3}{16}B_z''' - \frac{\rho^5}{384}B_z'''' + \dots \end{aligned} \quad (7.34)$$

其中,  $B_{z,0}$  为纵向峰值磁场,  $l = d/ds$ 。

**证明** 自行验证。 □

<sup>7</sup>这个词不容易翻译, kick 指一个“瞬间改变”。在加速器领域, 常用 energy kick 表示瞬间的能量改变。这里的 kick 则表示磁场在端部的瞬间改变。在加速器中, 有一个用于修正粒子运动轨迹的部件, 称 kicker, 一般用一短脉冲磁场或电场“踢一下”粒子。

螺线管端部对粒子影响的细致讨论此处不展开，仅考虑其对粒子横向（机械）动量的影响。以下将说明，经过螺线管端部时，粒子的横向（机械）动量  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_x$  改变，但是其正则动量  $\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{e}_x = (\mathbf{p} + q\mathbf{A}) \cdot \mathbf{e}_x$  不变。考虑粒子即将经过螺线管端部，假设端部有效长度  $\Delta s$ ，粒子速度  $\beta c$  与螺线管中心轴  $s$  夹角  $\theta$ ，则粒子沿  $s$  轴的速度为  $v_s = \beta c \cos \theta$ 。于是，粒子经过端部需要的时间约  $\Delta t = \frac{\Delta s}{v_s}$ ，过程中的横向动量变化为  $\Delta p_x = F_x \Delta t = -qv_s B_y \Delta t$ ，而正则动量变化有

$$\Delta \pi_x = \Delta p_x + qA_x = -qv_s B_y \Delta t + qA_x \quad (7.35)$$

磁场也是有“动量”的。

将以上螺线管相关量代入，将发现  $\Delta \pi_x = 0$ ，对  $y$  方向也一样，说明粒子经过螺线管端部时，（机械）动量变了，但正则动量不改变。正则动量不改变是因为磁场本身具有的动量（源自向量磁位函数）恰好抵消了螺线管对粒子（机械）动量的改变量。

粒子经过螺线管，由于纵向磁场，在管内如果粒子速度与轴存在夹角，则呈螺旋运动：运动轨迹在纵向的投影为等速直线运动，在横向的投影为圆周运动。分析粒子在螺线管中的运动涉及两种绕行频率：回旋频率  $\omega_c$ 、拉莫尔频率  $\omega_L$ 。定义如下：

#### 定义 7.7. 回旋频率 (cyclotron frequency)、拉莫尔频率 (Larmor frequency)

带电粒子在磁场中会沿着磁力线回旋运动，定义回旋角频率为

$$\omega_c = \frac{|q|B_0}{\gamma m_0} \quad (7.36)$$

其中， $q$  为粒子电荷， $B_0$  为（纵向）磁场强度， $m_0$  为粒子静止质量， $\gamma$  为洛伦兹因子。这里的  $\omega_c$  又称磁旋频率 (gyro-frequency)。

一个类似的物理量还有拉莫尔频率，回旋沿着螺线管轴心的旋转角频率。定义为

$$\omega_L = \frac{|q|B_0}{2\gamma m_0} = \frac{\omega_c}{2} \quad (7.37)$$

有些文献以拉莫尔半径 (Larmor radius) 或磁旋半径 (gyroradius)，用来描述粒子在磁场中的螺线运动，定义为

$$r_L = \frac{p_{\perp}}{|q|B_0} = \frac{\gamma m_0 v_{\perp}}{|q|B_0} \quad (7.38)$$

**注** 在同步加速器中，绕行环形加速器的（角）频率  $\omega_{\text{rev}} = \frac{2\pi}{T_{\text{rev}}} = \frac{c}{\rho}$  不是此处定义的频率。

**注** 这里的  $\omega_c$  不要与第 4 章介绍的临界光子频率混淆。

**注** 更多讨论可参考 V. Kumar, Understanding the focusing of charged particle beams in a solenoid magnetic field, Am. J. Phys. **77**, 737 (2009). <https://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.3129242>



**笔记** 上面介绍的粒子加速器磁铁部件仅是最常见的几种，还有许多功能性磁铁、高阶磁铁（如：八极铁等）、交流磁铁（如：kicker 等）等，此处不做介绍。此外，这里的介绍也不涉及实际设计时需要考虑的其它因素，如：多极场抑制、控制等。有兴趣的读者可参考

关于磁铁的专著。

**注** 以上给出关于磁铁部件的场的描述。我们将在 §7.8 介绍几种常见磁铁部件的横向  $2 \times 2$  线性传输矩阵。下一章介绍粒子的纵向动力学后，将结合横向与纵向维度，给出常见磁铁部件的  $6 \times 6$  线性传输矩阵，参考 §8.6。

### 7.1.6 磁铁的磁场强度极限：饱和、磁滞

回忆一下，在 §1.14 介绍过电场的击穿效应，其可视为金属加速结构的电场强度极限，超过该极限后，金属将不再按我们学过的熟悉的机制响应。类似的情况也发生在磁媒质，即磁铁的磁场强度极限，称饱和 (saturation) 或磁滞效应 (magnetic hysteresis)。

正是因为常温条件下，磁铁的饱和效应限制了磁场强度上限，因此才有前面提到的磁铁梯度极限，也因此催生超导磁铁研制。这里简单介绍饱和、磁滞效应。

物质在外加磁场中的行为可分为与磁场强度无关的线性 ( $\mu = \mu_0 \mu_r$ ) 媒质，及与磁场强度有关的非线性 ( $\mu = \mu(\mathbf{H})$ ) 媒质。前者有顺磁性 (paramagnetic) 或逆磁性 (diamagnetic) 物质，后者多为铁磁物质 (如：铁、钴、镍等)。铁磁媒质特点有：

- $\mu_r$  铁磁媒质  $\gg \mu_r$ , 顺/逆磁媒质  $\approx 1$ <sup>8</sup>。
- 磁化强度  $\mathbf{M}$  与  $\mathbf{H}$  为高度非线性、且与温度、历史有关。
- 磁滞曲线 (magnetic hysteresis curve) 的行为一般如图 7.14 所示。
- 曲线行为与磁畴 (magnetic domain) 形成及热运动 (摩擦) 有关。磁滞曲线所围面积表征磁滞耗损  $W = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \propto \oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H}$ ，通常为热形式。

磁滞曲线本质上是由于磁偶极分布形成，并非由个别原子形成。并且是以磁畴 (magnetic domain) 为单位形成，因此，曲线成因应以磁畴为组成单位考虑。针对图 7.14 中的四个特征点说明：

① 无磁化状态，原点。

当外部磁场增加时，沿着图 7.14 的虚线上去。

② 饱和状态。增加  $H$  会使磁区开始对齐 (因而  $M$  增加)，直到  $H = H_{\text{饱和}}$  为止。

③ 永久磁化状态。当外部磁场减少至 0 时，仍有残磁，形成永久磁铁。

④ 零磁通状态。加反向磁场，直到抵消残磁的工作点。

根据 §1.5 的介绍，磁场能量体密度可写成

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \int_{\mathbf{B}_0}^{\mathbf{B}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \quad (7.39)$$

<sup>8</sup> 顺/磁媒质的  $\mu_r > 1$ ，逆磁媒质的  $\mu_r < 1$ 。

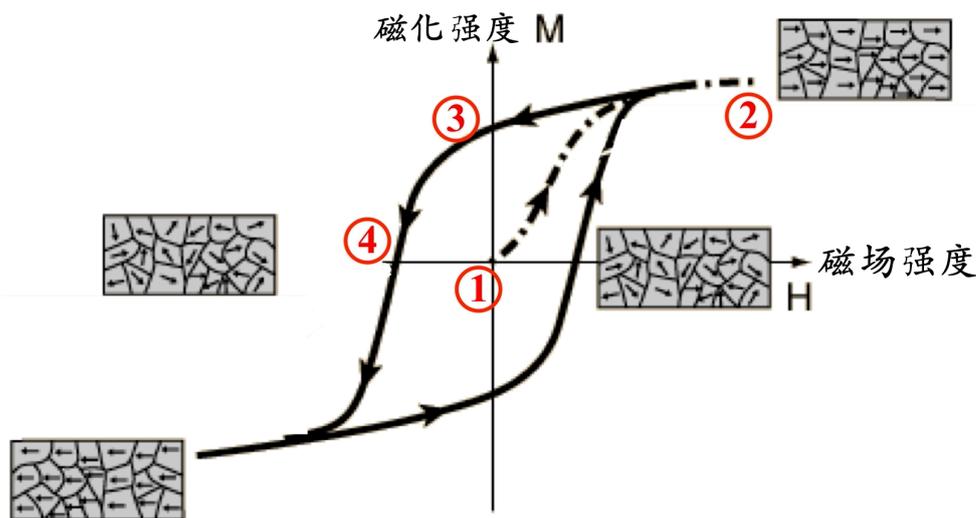


图 7.14: 典型的磁滞曲线。状态 1 为无磁化状态、2 为饱和状态、3 为永久磁化状态、4 为零磁通状态。

封闭磁滞曲线内所围面积表征磁场能量，磁场能量体密度可写成  $w_m = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$ 。更准确地说，媒质受外部磁场磁化的过程，媒质将从外部激励源获取能量，然后转化为热，为一种不可逆过程。在单位时间内，比如外部时变磁化激励源周期，对应磁滞损耗功率，有

$$P_m = \frac{W_m}{T} = f \iiint_V dV \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \quad (7.40)$$

其中， $f$  为外部激励源频率。由于不同磁媒质的特性可能差异甚大，目前没有关于  $P_m$  的一般公式。对外部激励源为正弦振荡形式，则有以幂次形式表示的经验公式，称 Steinmetz 公式，有

$$P_m \approx k \cdot f^a \cdot B_{pk}^b \cdot V \quad (7.41)$$

其中， $B_{pk}$  为峰值磁场， $V$  为铁磁媒质体积， $k, a, b$  称 Steinmetz 系数，除与不同铁磁媒质相关外，也与温度有关。对大多数铁磁媒质， $a \approx 1, b \approx 2$ ；如果考虑磁导率的高阶非线性效应，则大概有  $1 < a < 2, 2 < b < 3$ ，常见  $a = 1, b = 1.6$ 。对普通钢， $k \approx 3000$ 。此经验公式在低频时有效。

由于存在残磁状态， $\mathbf{H}$  场变化并不总是能够使磁媒质回到无磁化(原点)状态。一般将一物质消磁的方式：让物质接通一周期衰减的电流，如： $I(t) = I_0 e^{-\alpha t} \cos \omega t$ ，使其磁滞曲线在  $\mathbf{M}-\mathbf{H}$  图上轨迹逐渐缩小，最终收敛于原点，达到消磁。媒质对去磁化的抵抗程度由其矫顽力(coercivity)决定。高矫顽力对于永磁体是有利的，因为这意味着磁化不容易受到干扰。



**笔记** 永久磁铁是一种“近似”的说法。磁铁磁场不是凭空而得，磁铁用久了磁场强度势必会减弱(退磁)。不然，永久磁铁就要像永动机了。至于永磁体的磁性如何产生的，目前的认知是源于媒质内部磁矩的排列。这种排列是由于原子和电子的磁性质引起的。在铁磁

媒质中，如：铁、钴和某些合金，各个原子的磁矩有一种自发 (spontaneous) 的趋势，形成被称为磁畴的区域。每个磁畴表现为一个微小的磁铁，具有自己的磁矩。此物理过程称自发磁化 (spontaneous magnetization)，处于磁学研究范畴，为量子多体问题。

磁的迟滞现象是受迫非线性动力系统 (forced dynamical system) 的普适现象，并不限于磁性物质。也有电滞现象。

#### 定义 7.8. 迟滞系统

迟滞系统具有以下两个普适特性：

- 多个稳态平衡操作点。
- 形成迟滞现象的动力学尺度与输入信号变化的时间尺度不完全匹配，因此在输入信号变化期间，系统已经达到另一个稳态平衡。



**笔记** 感兴趣的读者，不妨参考以下介绍性质的文献：K.A. Morris, What is Hysteresis? *Appl. Mech. Rev.* **64**, 050801 (2012). <https://doi.org/10.1115/1.4007112>。迟滞现象在电路理论的探讨：M.P. Kennedy and L.O. Chua, Hysteresis in electronic circuits: A circuit theorist's perspective, *International Journal of Circuit Theory and Applications* **19**, 471-515 (1991). <https://doi.org/10.1002/cta.4490190505>。

## 7.2 Hill 方程

上一章末尾给出了加速器哈密顿量的一般形式

$$\mathcal{H}(x, P_x, y, P_y) = -(1 + \delta) \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \left(1 - \frac{1}{2}P_x^2 - \frac{1}{2}P_y^2\right) - \frac{q}{p_0} A_s \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \quad (7.42)$$

其中,  $P_x = p_x/p_0, P_y = p_y/p_0, \delta = \frac{v-p_0}{p_0} \approx \frac{E-E_0}{E_0}$ 。有时候用  $x', y'$  近似地表示  $P_x, P_y$ , 其中,  $x' \equiv \frac{dx}{ds} = \frac{v_x}{v_s} = \frac{p_x}{p_s} \approx P_x, y' \equiv \frac{dy}{ds}$ 。对电子而言,  $q = -e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ 。



**笔记** 不同的粒子有不同的动量, 即不同的  $p_0$ 。这样看来, 是不是束团内不同的粒子都有一个不同  $p_0$  的哈密顿量, 还是一个束团只有一个  $p_0$  的哈密顿量? 答案是一个束团只有一个  $p_0$  的哈密顿量。首先,  $p_0$  是参考粒子动量。“参考粒子”, 既然称为“参考”, 这个概念其实就隐含了它是束团里的一个粒子——一个具有代表性的粒子。与束团内参考粒子有些参数偏差的其它粒子(称非参考粒子), 就有非零的  $x, P_x, y, P_y, \delta$ , 这些都在加速器哈密顿量里。对参考粒子, 情况比较简单, 因为  $x = 0, y = 0, P_x = 0, P_y = 0, \delta = 0$ 。在这哈密顿量里, 不管是参考粒子或是非参考粒子,  $p_0$  取值都一样, 就是取参考粒子的  $p_0$ , 它在哈密顿量里其实不是动力学变量(dynamical variable), 而是把它视为一常数或参量(parameter), 与二极铁弯转半径  $\rho$  在这里扮演的角色一样。在束团中, 非参考粒子与参考粒子的动量(或能量)差异体现在  $P_x, P_y, \delta$ 。

现在我们想利用上一节介绍的几个线性磁铁部件, 构造简化的加速器哈密顿量, 用来研究粒子经过这些磁铁的动力学。不考虑横向  $xy$  耦合, 将漂移段、二极铁与四极铁的  $A_s$  代入加速器哈密顿量, 忽略三阶及以上项, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -(1 + \delta) \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \left(1 - \frac{1}{2}P_x^2 - \frac{1}{2}P_y^2\right) \\ &\quad - \frac{q}{p_0} \left[-B(s)x \left(1 - \frac{x}{2\rho}\right) + \frac{1}{2}G(s)(y^2 - x^2)\right] \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \\ &\approx -1 - \delta - \delta \frac{x}{\rho} + \frac{1}{2}P_x^2 + \frac{1}{2}P_y^2 + \frac{x^2}{2\rho^2} - \frac{q}{p_0} \frac{1}{2}G(s)(y^2 - x^2) \end{aligned} \quad (7.43)$$



**笔记** 以上将漂移段、二极铁与四极铁一同加在了哈密顿量中, 但二极铁和四极铁明明不能同时出现(如果不是功能组合型磁铁的话), 不同的时刻或位置,  $A_s$  应该只能取二者其中一个吧, 为什么可以写成同时求和表达式呢? 上式这种写法在加速器理论有时称“平滑近似”(smooth approximation)。就是说, 我们把离散的磁铁部件它们分开的影响全部“揉”或集总(lumped)在一起考虑, 或者说, 把不同部件的各自效应“平均分摊”在粒子传输过程中。因此, 如果直接看此哈密顿量, 我们默认不再纠结于在某个特定位置受哪一种场的影响。但这终究是“近似”, 并不是对所有要研究的问题对象都可以这么处理。只不过对许多问题, 这么处理没什么问题。特别是对储存环加速器, 假设周长 300 m, 粒子在加速器里一般绕行一周大概  $\frac{300 \text{ m}}{3 \times 10^8} = 1 \mu\text{s}$ , 这种加速器运行大概都是 10 hour 或更长时间, 可以想像绕行了  $3.6 \times 10^{10}$  圈, 对研究单电子光学问题(对其它问题可能会有影响), 单圈内分立的磁铁效应分摊或仔细依序考虑一般不导致太大区别, 平滑近似可以很好成

立。即使一些集体不稳定性增长率很大，比如在 ms 量级，此时粒子已经绕行 1000 圈以上，近似一般也会采用。当然，此时平滑近似是不是能令人满意地成立，值得进一步探索。

 **笔记** 关于集总模型 (lumped model) 与分散模型 (distributed model) 的更多讨论，可参考 §12.4 讨论。

如果仅考虑参考动量粒子<sup>9</sup> $\delta = 0$ ，则有加速器哈密顿量

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_x + \mathcal{H}_y \quad (7.44)$$

其中，

$$\mathcal{H}_x = \frac{1}{2}P_x^2 + \frac{x^2}{2\rho^2} + \frac{1}{2}\frac{q}{p_0}G(s)x^2 \quad (7.45)$$

$$\mathcal{H}_y = \frac{1}{2}P_y^2 - \frac{1}{2}\frac{q}{p_0}G(s)y^2 \quad (7.46)$$

$$(7.47)$$

按哈密顿运动方程， $x$  方向运动方程有

$$\begin{cases} x' = \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial P_x} = P_x \\ P_x' = -\frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial x} = -\left(\frac{x}{\rho^2} + \frac{q}{p_0}G(s)x\right) \end{cases} \quad (7.48)$$

或

$$x'' + \left(\frac{q}{p_0}G(s) + \frac{1}{\rho^2}\right)x = 0 \quad (7.49)$$

类似地， $y$  方向运动方程有

$$y'' - \frac{q}{p_0}G(s)y = 0 \quad (7.50)$$

可以看到，对  $q > 0$  情况，在  $x$  方向聚焦 ( $G > 0$ ) 的话，在  $y$  方向就散焦；反之，在  $x$  方向散焦 ( $G < 0$ ) 的话，则在  $y$  方向就聚焦。另外，在没有四极铁 ( $G = 0$ ) 的情况，横向  $x$  方向仍有二极铁提供弱聚焦，且与电荷符号无关。近代加速器几乎横向都采用强聚焦，因此， $\frac{1}{\rho^2}$  项有时忽略不计。以下表格整理四极铁梯度与聚焦/散焦符号。

四极铁梯度	$x$ 方向	$y$ 方向
$G = \partial B_y / \partial x > 0$	聚焦	散焦
$G = \partial B_y / \partial x < 0$	散焦	聚焦

对储存环光源设计，四极铁梯度表征着整体效能。一般来说<sup>10</sup>，对第三代同步辐射光源储存环， $G \approx 10 \sim 50$  T/m，对第四代衍射极限储存环， $G \approx 80 \sim 100$  T/m 或更高。

 **练习 7.11** 按图 7.2，验证以上表格。 ■

<sup>9</sup>注意，“参考动量粒子” $\neq$ “参考粒子”。“参考动量粒子”是粒子的  $\delta = 0$ ，但  $x, x'$  可以非零。“参考粒子”的定义则是  $x = x' = y = y' = z = \delta = 0$ 。

<sup>10</sup>关于“加速器光源”的代 (generation) 的定义，将在 §10.1 讨论。

解 留意 Frenet-Serret 坐标系满足右手定则。 ■

### 定理 7.3. 横向强聚焦、交变梯度聚焦

对带电粒子束，从外部提供聚焦是必须的，否则束团在自由空间中漂移，其束团尺寸最终将会无止尽发散，直到撞到金属真空管道为止。能不能横向  $x, y$  方向同时提供聚焦？可以，这种称弱聚焦 (weak focusing)。1950 年代或更早期的加速器一般是基于横向弱聚焦原理的加速器。对高能粒子，由于磁刚度增加，加速器会变很巨大，因为环变很大。一直到 1950 年左右，Courant, Livingston, Snyder 与 Blewett 等人发表了关于横向强聚焦 (strong focusing) 原理，或称交变梯度聚焦 (alternating-gradient focusing) 原理。横向强聚焦原理的大致思路是：当横向  $x, y$  两个维度不能同时聚焦时，一次一个维度来， $x$  聚焦- $y$  散焦- $y$  聚焦- $x$  散焦-... 如此交替、轮流地在  $x, y$  方向分别聚焦/散焦粒子束。能证明，在不考虑其它更复杂的效应下，束团整体在  $x, y$  方向能够稳定传输。此结论一得到后，很快就有了交变梯度同步加速器，能够达到同样能量级别的粒子束，且加速器装置尺寸小得多。近代加速器几乎采用横向强聚焦原理。

**证明** 对该原理感兴趣的读者，可参考原始论文：

- Ernest D. Courant, M. Stanley Livingston, and Hartland S. Snyder, The Strong-Focusing Synchrotron — A New High Energy Accelerator, Phys. Rev. **88**, 1190 (1952). <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.88.1190>
- J.P. Blewett, Radial Focusing in the Linear Accelerator, Phys. Rev. **88**, 1197 (1952). <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.88.1197>
- E.D. Courant and H.S. Snyder, Theory of the Alternating-Gradient Synchrotron, Annals of Physics **281**, 360408 (2000). <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0003491658900125>. 这是作者们在 1953 年论文的基础上修改、完善后，当时为实验室内部报告，后来在 2000 年由 Annals of Physics 重印发表。
- E.D. Courant, M.S. Livingston, H.S. Snyder, and J.P. Blewett, Origin of the “Strong-Focusing” Principle, Phys. Rev. **91**, 202 (1953). <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.91.202.2>. 四位作者在这篇简短声明指出，在更早之前，强聚焦原理的想法已经由 Nicholas Christofilos 点出 (当时 N. Christofilos 没有发表为论文，而将其作为专利)。 □



**笔记** 有些读者可能在一些文献看到过另一种磁铁梯度的定义如下：

$$n = -\frac{\rho}{B_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} \quad (7.51)$$

其中，下标 0 表示沿参考轨道。物理量  $n$  称场指标 (field index)，无量纲。此种定义常见

于早期横向弱聚焦或固定梯度聚焦加速器中。对比于这里定义的磁铁梯度

$$K(s) = \frac{q}{p_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{1}{B\rho} \frac{\partial B_y}{\partial x} \quad (7.52)$$

为有量纲的物理量。

**固定场交替梯度加速器** 在刚提出横向强聚焦概念的时代，还有一种方案称固定场交替梯度加速器 (fixed-field alternating gradient, 简称 FFA 或 FFAG) 也被提出。这里简短介绍一下此机制的大致原理，不打算深入讨论这种机制。

FFAG 也是一种环形加速器，此处的“固定场”指的是与时间无关的静磁场。在环形加速器中，磁场用于使粒子弯转。弯转所需的磁场随粒子能量的增加而增大，当粒子加速时，要么粒子轨道增大，要么磁场必须随时间增加，以保持粒子维持在固定大小的轨道上绕行。FFAG 采用前一种方法，即允许粒子轨道随加速而变化(大)。除了维持轨道不至于使粒子碰到真空盒，FFAG 还要使粒子束保持聚焦，对此，FFAG 不再采用弱聚焦，而是强聚焦(又称交替梯度聚焦)。使用交替梯度聚焦可实现更紧凑的粒子束聚焦和整体装置。FFAG 的磁场沿着环周长方向变化，类似于回旋加速器(参考图 7.15)，粒子绕行半径在加速过程中会变化，但聚焦强度比回旋加速器更强，类似于同步加速器。FFAG 结合了相对便宜的固定磁铁和强聚焦机制。FFAG 又分等比 (scaling) 与非等比 (non-scaling) 形态。

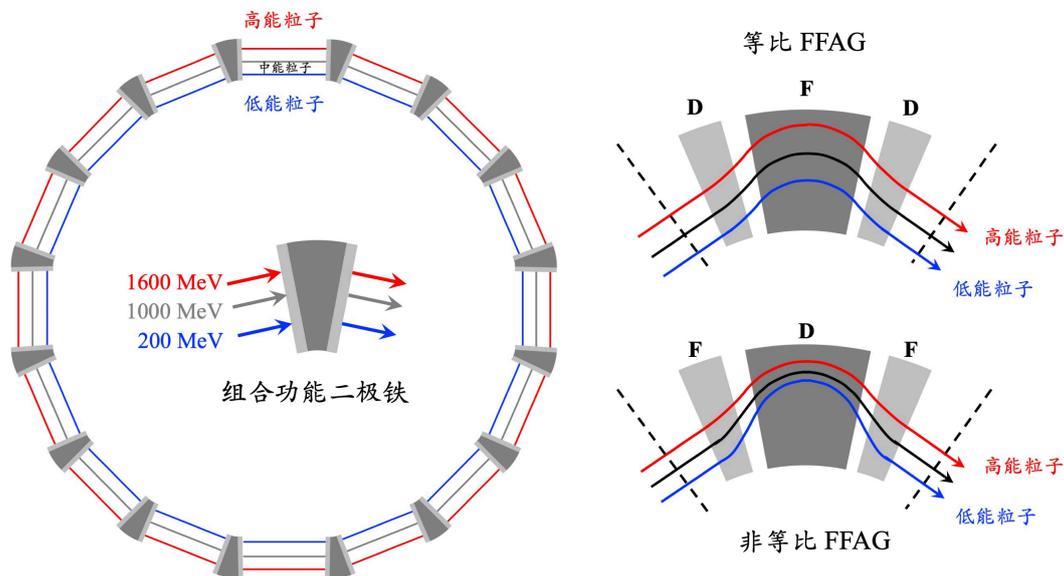


图 7.15: 固定场交替梯度加速器 (FFAG) 示意图。FFAG 的磁场可沿径向 ( $r$ )，也可沿角向 ( $\theta$ ) 变化。

FFAG 的最初概念在 1950 年代就被提出，但在 1980 年中期之前，除少数试验型加速器外，并未得到广泛探索。部分源于是因为当时 Courant 等人提出的横向强聚焦概念更简洁，而当时 FFAG 的论文相对晦涩难懂。另外，FFAG 对磁铁设计的精度要求更高，磁铁截面、场形也更复杂，在当时计算机还未崛起的时代，就更难收到重视。近年来对

FFAG 研究似乎又重新燃起。这里就此打住，细节此处不论。



**笔记** 对 FFAG 更多讨论感兴趣的读者，可先参考 Handbook §1.6.6 或原始论文 K.R. Symon et al., Fixed-Field Alternating-Gradient Particle Accelerators, Phys. Rev. **103**, 1837 (1956). <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.103.1837>。

回到主题横向强聚焦主题。在往下继续讨论前，为简化起见，以下将  $x$  方向加速器哈密顿量写成

$$\mathcal{H}_0(x, P_x, s) = \frac{1}{2}P_x^2 + \frac{1}{2}K(s)x^2 \quad (7.53)$$

其中，

$$K(s) = \frac{q}{p_0}G(s) + \frac{1}{\rho^2}, \quad G(s) = \frac{\partial B_y(s)}{\partial x} \quad (7.54)$$

利用定义的哈密顿运动方程，此哈密顿量对应的运动方程有如下定义的一般形式，称 Hill 方程 (Hill equation)。

#### 定义 7.9. Hill 方程

Hill 方程具有如下一般形式：

$$\frac{d^2x}{ds^2} + K(s)x = 0 \quad (7.55)$$

其中， $K$  为周期函数，即， $K(s) = K(s + L)$ 。

**注** 此处  $K(s) = \frac{q}{p_0}G(s) + \frac{1}{\rho^2} \approx \frac{q}{p_0}G(s)$ 。

Hill 方程是一著名的微分方程<sup>11</sup>。求解 Hill 方程的标准做法需要用到 Floquet 变换 (Floquet transformation)<sup>12</sup>，即，令其通解有如下形式

$$x(s) = Aw(s) \cos \psi(s) \quad (7.56)$$

其中， $A$  为比例系数， $w(s)$  与  $\psi(s)$  分别称为振幅与相位函数，为实函数。

<sup>11</sup>G.W. Hill 是美国天体物理学家与数学家，主要工作以研究月球绕地球轨道和行星环绕恒星轨道的多体问题为名。对 Hill 方程原始论文感兴趣的读者，可参考 G.W. Hill, Researches in the Lunar Theory, American Journal of Mathematics **1**, No. 1 (pp. 5-26), No. 2 (pp. 129-147), No. 3 (pp. 245-260) (1878). <https://doi.org/10.2307/2369430>。

<sup>12</sup>Floquet 变换又称 Floquet 定理，在凝聚态物理里分析周期性结构中波的传播即对应鼎鼎有名的布洛赫定理 (Bloch theorem)。当这里介绍的 Hill 方程被应用到分析周期性结构中波的传播时，又称马修方程 (Mathieu equation)，其通解称马修函数，是一种特殊函数形式。由于带电粒子在磁聚焦结构中的行为有时候与电磁波在物质的原子分子周期结构中的行为类似，因此在一些加速器相关的教科书或文献也会介绍马修方程。马修方程的一般形式有

$$\ddot{x} + \omega_0^2(t)x = 0$$

其中，具有周期函数的系数  $\omega_0(t)$  有

$$\omega_0^2(t) = \Omega^2[1 - h \cos(\nu t)]$$

当  $h \rightarrow 0$  时，解退化为简谐振子的解。马修方程的解特别的地方在于，尽管  $h$  很小，但当  $h, \Omega, \nu$  满足某些特性时，其解展现出的行为将变得与简谐振子的解非常不同。比如，当  $\nu \approx 2\Omega/n$  (其中， $n \in \mathbb{N}$ ) 时，解  $x(t)$  随时间  $t$  将变得不稳定。不稳定性区间取决于  $h$  的大小。细节此处不论，感兴趣的读者请参考相关教科书。Hill 方程的  $K(s)$  也是周期函数，只是周期函数的形式比起这里的  $\omega_0^2(t)$  更复杂些。

代入 Hill 方程后, 可拆解为两个方程, 分别为振幅  $w(s)$  与相位  $\psi(s)$  应满足的方程, 有

$$w'' + K(s)w - \frac{1}{w^3} = 0 \quad (7.57)$$

$$\psi' = \frac{1}{w^2} \quad (7.58)$$

这里我们约定相位方程的积分常数为零<sup>13</sup>, 并将  $w^2(s)$  写成  $\beta(s)$ , 称  $\beta$  函数或 betatron 函数<sup>14</sup>。在加速器领域, 振幅方程又称 betatron 包络方程

$$\frac{1}{2}\beta\beta'' - \frac{1}{4}\beta'^2 + K(s)\beta^2 = 1 \quad (7.59)$$

相位方程现在则写为

$$\psi' = \frac{1}{\beta} \quad (7.60)$$

由于系数  $K(s) = K(s + L)$  具有周期性, 不难预期,  $\beta(s) = \beta(s + L)$  与  $\psi(s) = \psi(s + L)$ <sup>15</sup> 也应具有周期性。这里的  $\beta$  函数将成为 Courant-Snyder (或称 Twiss 参数) 的其中一个重要参量。

由于  $w^2(s) = \beta(s)$ ,  $\psi(s) - \psi_0 = \int_0^s 1/\beta(\tau)d\tau$ , 稍微调整符号之后, Hill 方程的通解 (homogeneous solution) 可以写为

$$x(s) = A\sqrt{\beta(s)} \cos[\psi(s) - \psi_0] \quad (7.61)$$

其中,  $A$  为比例系数, 其绝对数值此处先不论。此通解的大致样貌可参考图 7.16。

先不纠结于定量结果, 从图 7.16 可以看到, 在一给定的周期外部磁聚焦结构 (lattice)  $K(s)$  函数后 (不纠结  $K(s)$  的具体形式), 粒子在 lattice 的  $\beta(s)$  函数表征振荡振幅。图 (d) 中的实线可视为不同初始条件  $\psi_0$  的粒子在包络内的运动轨迹。眼尖的读者可能注意到图 (b,c) 中的实线旁边标注了“C”、“S”, 其实 (b,c) 可视为把通解  $x(s) = A\sqrt{\beta(s)} \cos[\psi(s) - \psi_0]$  按三角函数恒等式

$$\cos[\psi(s) - \psi_0] = \cos \psi(s) \cos \psi_0 + \sin \psi(s) \sin \psi_0 \quad (7.62)$$

展开后, 两项分开画的轨迹。



**笔记** 到此为止, 我们做了什么? 我们基于 Floquet 变换最初的通解形式, 通过约定相位方程的积分常数为零、将  $w^2(s)$  写成  $\beta(s)$ , 写成了一个仍然类似于原本形式、但有些许不同的通解  $x(s) = A\sqrt{\beta(s)} \cos[\psi(s) - \psi_0]$ 。虽然看起来没有差太多, 但其实已经大致勾勒了粒子在这些磁铁部件中的动力学过程, 并且是在没有给定  $K(s)$  明确形式的情况下: 粒

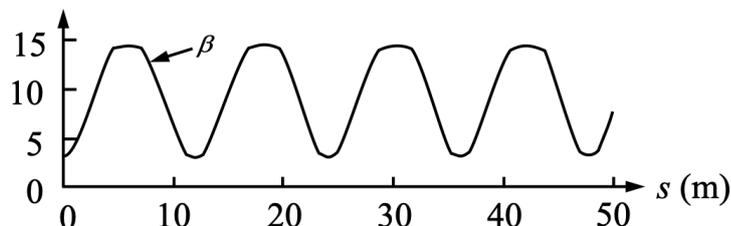
<sup>13</sup>相位的绝对数值意义不大, 所以这里的约定不失一般性。

<sup>14</sup> $\beta$  函数或 betatron 函数的称呼带有历史意义, 体现了早期在电子感应加速器 — 又称贝他加速器 (betatron) — 关于电子横向动力学研究的成果。感兴趣的读者可参考 D.W. Kerst and R. Serber, *Electronic Orbits in the Induction Accelerator*, *Phys. Rev.* **60**, 53 (1941). <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.60.53>。

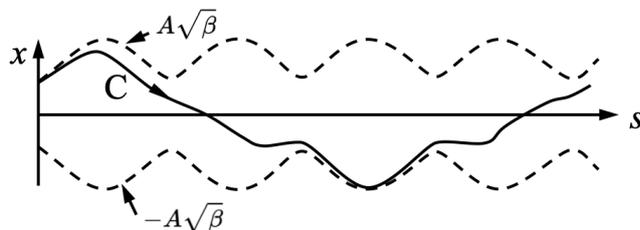
<sup>15</sup>可能差  $2\pi$  或其整数倍, 但是无妨, 理由同前所述。

子在磁铁部件中不断随着  $s$  而振荡着，并且振幅（或称包络）可以通过独立于各别粒子的初始条件、用仅与磁铁聚焦强度  $K(s)$  有关的  $\sqrt{\beta(s)}$  表征。依赖于各别粒子相关的量是初始相位  $\psi_0$ ，如果不针对某一特定粒子，这个量不是太重要。

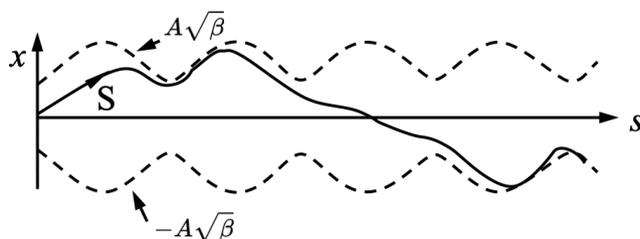
### (a) $\beta$ 函数



### (b) 类余弦函数



### (c) 类正弦函数



### (d) 不同初始条件的粒子轨迹或单粒子的多圈轨迹



图 7.16: (a)  $\beta(s)$  表征振荡振幅; (b,c) 虚线为包络  $\propto \sqrt{\beta(s)}$ , 实线为粒子在包络内的类余弦 (cosine-like, C) 与类正弦 (sine-like, S) 的轨迹; (d) 具有不同初始条件  $\psi_0$  的不同粒子在包络内的轨迹。图例取自 M. Sands, SLAC-121。

这一章开头说到，如没有特别声明，一律假设电子参考能量恒定。一般讨论 Hill 方程都假设在粒子能量固定情况下。结束这一小节前，我们给出当粒子能量在磁聚焦结构传输过程中改变时 Hill 方程的形式。

**定理 7.4. 推广的 Hill 方程**

当粒子能量不再是常数时, 推广的 Hill 方程有

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} \frac{dx}{ds} + K(s)x = 0 \quad (7.63)$$

或

$$\frac{d}{ds} \left[ \gamma(s) \frac{dx}{ds} \right] + K(s)\gamma(s)x = 0 \quad (7.64)$$

其中,  $\gamma(s)$  为洛伦兹因子,  $K$  为周期函数, 即,  $K(s) = K(s+L)$ 。当能量固定时,  $\gamma' = 0$ , 上式退化为前面介绍的 Hill 方程。

**证明** 先将固定能量 Hill 方程 — 二阶常微分方程 — 拆解为两个一阶微分方程组, 有

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = x' \\ \frac{dx'}{ds} = -K_x(s)x \end{cases} \quad (7.65)$$

粒子横向动量可写成  $p_x = \gamma m v_x = \gamma m c \beta_x$ , 则

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{ds} &= \gamma' m c \beta_x + \gamma m c \beta'_x \\ &= \gamma m c \beta_z \left( \frac{\gamma' \beta_x}{\gamma \beta_z} + \frac{\beta'_x}{\beta_z} \right) \\ &\approx \gamma m c \beta_z \left( \frac{\gamma'}{\gamma} x' + x'' \right) \end{aligned} \quad (7.66)$$

其中,  $x' = dx/ds \approx p_x/p_z$ 。于是有

$$\frac{dx'}{ds} \approx \frac{\gamma'}{\gamma} x' + x'' \quad (7.67)$$

回到以上两个一阶微分方程组, 有

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = x' \\ \frac{dx'}{ds} \approx \frac{\gamma'}{\gamma} x' + x'' = -K_x(s)x \end{cases} \quad (7.68)$$

因此, 有

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{\gamma'}{\gamma} \frac{dx}{ds} + K(s)x = 0 \quad (7.69)$$

□

### 7.3 Courant-Snyder 参量、Twiss 参量

上一节给出了 Hill 方程的通解  $x(s) = A\sqrt{\beta(s)} \cos[\psi(s) - \psi_0]$ 。图 7.16 给出了其中  $\beta(s)$  沿着  $s$  的大致样貌，振幅(或称包络)函数独立于各别粒子的初始条件，仅与磁铁聚焦强度  $K(s)$  有关。图 7.16 的样貌为实空间的样貌。

现在，我们换一个视角看此通解。考虑  $(x, x')$  相空间，这里

$$x(s) = A\sqrt{\beta(s)} \cos[\psi(s) - \psi_0] \quad (7.70)$$

$$x'(s) = \frac{A}{\sqrt{\beta(s)}} \frac{\beta'(s)}{2} \cos[\psi(s) - \psi_0] - \frac{A}{\sqrt{\beta(s)}} \sin[\psi(s) - \psi_0] \quad (7.71)$$

不难想像，当粒子沿着  $s$  前进时，伴随着横向 betatron 振荡之外，对应于  $x(s)$  与  $x'(s)$  在相空间  $(x, x')$  中形成一个会动的“点”(即“状态”)。思考一下，如果跟着粒子前进，随着  $s$  跟踪这个点，那么它应该画出什么轨迹？

首先，如果这个粒子沿着  $s$  的轨迹是有界的，如图 7.16，局限在  $\pm A\sqrt{\beta(s)}$  内，那么，在相空间  $(x, x')$  中就应该画出一个封闭的轨迹。继续讨论前，我们先总结一重要结果：

#### 性质 7.1. 有界、封闭、相椭圆

如果粒子在实空间  $(x, s)$  轨迹是 有界 的，在相空间  $(x, x')$  中就应该画出一个 封闭 的轨迹。该粒子在每个  $s$  位置，它的相空间  $(x, x')$  坐标总是能落在一个椭圆上，这个椭圆称相空间椭圆 (phase space ellipse) 或相椭圆。

粒子沿着  $s$  运动时，其相空间  $(x, x')$  坐标会动，相椭圆沿着  $s$  也会动。当粒子的相椭圆与 磁聚焦结构的相椭圆 为同一个相椭圆时，称束团与磁聚焦结构匹配 (matched)，否则称为失配 (mismatched)。

已知  $\beta(s)$  在图 7.16 中表征的是振荡包络，那  $\beta(s)$  在这个相椭圆——准确地说，为磁聚焦结构的相椭圆——中又是如何体现呢？这里略去数学细节，参考图 7.17，要描绘一椭圆需要几个参数才行。其中之一  $\beta(s)$  体现作为描绘相椭圆的一个特征参数，与椭圆落在  $x$  轴上所占的范围有关，即  $\beta(s)$  函数能表征椭圆“有多胖”  $\pm\sqrt{\beta\epsilon}$ 。要完整描绘此相椭圆，明显只有  $\beta(s)$  是不够的，还需要另一个辅助函数，称  $\alpha(s)$ ，定义为  $\alpha(s) \equiv -\frac{\beta'(s)}{2}$ ，在图 7.16 中表征 betatron 函数的变化快慢(斜率)、在图 7.17 中则表示相椭圆的倾斜程度<sup>16</sup>，“有多斜”  $\propto -\alpha/\beta$ 。

<sup>16</sup>这里可能会有读者问，描绘此相椭圆除了用  $\beta(s)$  函数表征“有多胖”，是否用一个函数表征“有多高”也行？可以。事实上，在图 7.17 中，表征“有多高”的量即是  $\gamma$ ，即  $\pm\sqrt{\gamma\epsilon}$ 。

$$\beta \Rightarrow \text{“有多胖”}, \alpha \Rightarrow \text{“有多斜”}, \gamma \Rightarrow \text{“有多高”}。$$

后面会看到， $\gamma$  可以与  $\beta, \alpha$  关联，并不是新的、独立的参量。这里的  $\gamma$  与洛伦兹因子没有关系，不要混淆了。

现在，我们试着勾勒出一个理论，通过引入参量  $\beta(s)$  与  $\alpha(s)$ ，能够很好地描述粒子在实空间沿着  $s$  运动的过程，同时在粒子的相空间  $(x, x')$  中也能有几何图像对应。这套理论称 Courant-Snyder 理论，相关的参数称 Courant-Snyder 参数或 Twiss 参数。下面给出其定义：

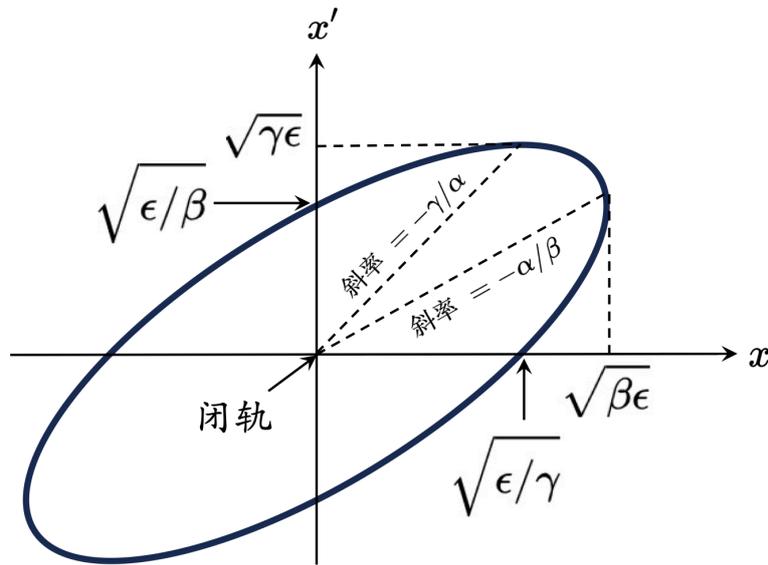


图 7.17: Courant-Snyder 椭圆。图中还标注了椭圆与两轴  $(x, x')$  的截距。这里的  $\epsilon$  为一常数、不变量，称几何发射度。此  $(x, x')$  椭圆包围的面积为  $\pi\epsilon$ 。

现在我们对 Courant-Snyder 理论中的  $\beta(s)$ 、 $\alpha(s)$  等相关参数的定义整理如下：

#### 定义 7.10. Courant-Snyder 参数、Twiss 参数

Courant-Snyder 参数又称 Twiss 参数，分别定义如下：

$$\beta(s) = w^2(s) \quad \text{为上面 Hill 方程的振幅解或表征相椭圆“有多胖”} \quad (7.72)$$

$$\alpha(s) = -\frac{\beta'(s)}{2} \quad \text{表征 betatron 函数的变化快慢(斜率)或表征相椭圆“有多斜”} \quad (7.73)$$

$$\gamma(s) = \frac{1 + \alpha^2(s)}{\beta(s)} \quad \text{表征相椭圆“有多高”} \quad (7.74)$$

$$\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2 = \frac{x^2 + (\beta x' + \alpha x)^2}{\beta} = \epsilon = \text{不变量} \quad (7.75)$$

$$\psi(s) = \int_{s_0}^s \frac{1}{\beta(\tau)} d\tau \propto \sqrt{K} \quad \text{称 betatron 相位或相位超前 (phase advance)} \quad (7.76)$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^C \frac{ds}{\beta(s)} \propto \sqrt{K} \quad \text{称 betatron tune 或简称 tune} \quad (7.77)$$

其中， $C$  为储存环周长或加速器传输段长度。

**注** 不要与洛伦兹相对论因子  $\beta = \frac{v}{c}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$  搞混。

**注** 对电子储存环来说,  $\nu \sim \mathcal{O}(10^1)$ 。根据如上定义, tune 可以  $\nu \approx \frac{1}{2\pi} \frac{C}{\langle \beta_x \rangle}$  估算。

**注** 参考图 7.17, Courant-Snyder 参数既可以用来描述磁聚焦结构 (lattice), 也可以用来描述束团相空间分布的特性。当磁聚焦结构恰好符合束团相空间分布时, 称两者匹配 (matched), 否则存在失配 (mismatched)。一般而言, 磁聚焦结构的设计总是与束团相空间分布匹配。如果失配, 可能在相空间出现成丝 (filamentation) 现象。参考图 7.18。

**注** Courant-Snyder 理论的经典论文可参考 E.D. Courant and H.S. Snyder, Theory of the alternating-gradient synchrotron, Annals of Physics 3, 1-48 (1958). [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(58\)90012-5](https://doi.org/10.1016/0003-4916(58)90012-5)。

**注** 这里的 Courant-Snyder 参数、Twiss 参数仅描述  $x, y, z$  其中一个维度。一般来说, 这类分析大多为横向  $x, y$ 。关于纵向 Courant-Snyder 参数, 可以参考 X.J. Deng et al., Courant-Snyder formalism of longitudinal dynamics, Phys. Rev. Accel. Beams 24, 094001 (2021). <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevAccelBeams.24.094001>

**注** 这里的 Courant-Snyder 参数、Twiss 参数只是一种方便的、直观的粒子横向运动描述, 但不是唯一的方式。参考 A.W. Chao, Lectures on Accelerator Physics, World Scientific (2020) 一书的 §2.5.2。

**注** 此处的 betatron 相位  $\psi$  与 §4.5 介绍的古依相位 (Gouy phase)  $\psi_G$  在数学结构上等价, 分别描述电子束与激光光束的特性。对其物理图像的比较与讨论, 有兴趣的读者可参考 K. Floettmann, Equivalence of Gouy and Courant-Snyder phase, Phys. Rev. A 102, 033507 (2020). <https://journals.aps.org/pra/abstract/10.1103/PhysRevA.102.033507>

**注** 称 Courant-Snyder 参数似乎是美式惯例, 称 Twiss 参数似乎更多是欧式惯例。□

从上一节末尾的图 7.16(a), 我们现在知道  $\beta(s)$  表征粒子束团经过一磁聚焦结构 (lattice) 时, 经历 betatron 振荡时, 振荡包络的样貌。还知道,  $\alpha(s)$  表征  $\beta(s)$  随  $s$  振荡改变的快慢, 或在对应的相椭圆表征“有多斜”。betatron 相位  $\psi(s)$  则是表征 betatron 振荡经历一段距离  $s$  后积累的相位。留意, 这里对  $\beta(s), \alpha(s), \gamma(s), \psi(s)$  的解释被视为是 lattice 参量。换句话说,

即使没有粒子束, 一旦 lattice 造出来了之后, 这些 Courant-Snyder 参量也就决定了。

当一个粒子从入口位置进入 lattice, 根据该粒子的初始相位  $\psi_0$ , 给定之后, 粒子在经历 lattice 过程一直到从出口位置离开 lattice 的轨迹就能给出。当 lattice 造出来了之后, Courant-Snyder 参量将随着  $s$  改变, 意味着 lattice 的相椭圆也将随着  $s$  改变, 即 lattice 的相椭圆随着  $s$ , 其胖瘦、高矮、倾斜程度都会改变。

这一节开头的讨论与图 7.17则揭示了粒子束团经过一磁聚焦结构时, 除了实空间,

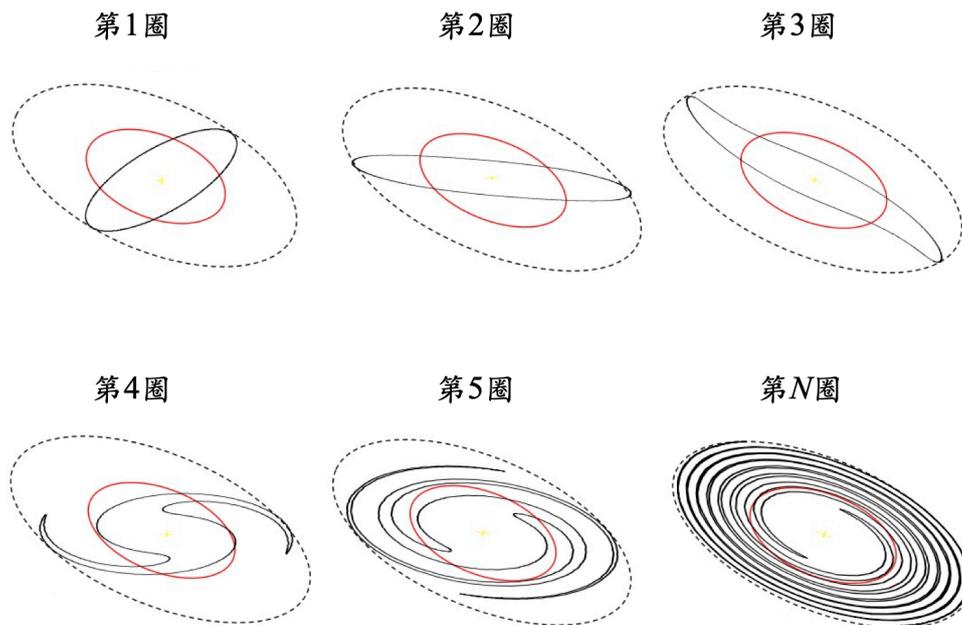


图 7.18: 红色线为 lattice 相空间椭圆, 黑色为束团的相空间分布。在储存环加速器某特定、固定位置  $s$ , 束团从注入 (Turn 0) 开始, 由于相空间椭圆失配, 逐圈经过  $s$  处记录束团的横向相空间分布, 束团由于与 lattice 相空间椭圆失配, 逐渐导致成丝现象。图例取自 F. Tecker, Injection and Extraction, Proceedings of the CERN-Accelerator-School course (2021)。

还可以在相空间看这个过程, 引入了相椭圆的概念。上面提到的 lattice 相椭圆在相空间  $(x, x')$  中呈现一封闭椭圆, 此椭圆方程式其实就是

$$\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2 = \epsilon = \text{不变量} \quad (7.78)$$

可以看到, 多半情况下, 这个椭圆在  $(x, x')$  中是倾斜的, 即存在非零  $\alpha$ 。这里的  $\alpha$  对应于图 7.16, 所表征的是  $\beta(s)$  改变的快慢, 对应图 7.17 则是椭圆的倾斜程度, 或称  $x-x'$  间的关联程度 (correlation function)。当然,  $\epsilon$  对应于/正比于相空间椭圆的面积。

高中数学学过, 通过适当的变量变换, 总是可以将以上椭圆方程式  $\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2 = \epsilon$  改写成圆方程式。考虑如下变换  $(x, x') \rightarrow (X, X')$

$$X = \frac{x}{\sqrt{\beta}}, \quad X' = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} x + \sqrt{\beta} x' \quad (7.79)$$

或写成

$$\begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix}_s = \mathbf{B}^{-1}(s) \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_s \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_s = \mathbf{B}(s) \begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix}_s \quad (7.80)$$

其中,

$$\mathbf{B}(s) = \begin{pmatrix} \sqrt{\beta(s)} & 0 \\ -\frac{\alpha(s)}{\sqrt{\beta(s)}} & \frac{1}{\sqrt{\beta(s)}} \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \mathbf{B}^{-1}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\beta(s)}} & 0 \\ \frac{\alpha(s)}{\sqrt{\beta(s)}} & \sqrt{\beta(s)} \end{pmatrix} \quad (7.81)$$

可以证明

$$\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2 = \frac{x^2 + (\beta x' + \alpha x)^2}{\beta} = \epsilon \stackrel{!}{=} X^2 + X'^2 \quad (7.82)$$

即,通过归一化变量变换后,相空间为圆,半径 $\sqrt{\epsilon}$ ,参考图 7.19。如果只看 $x^2+(\beta x'+\alpha x)^2$ ,也是圆,但半径变成 $\sqrt{\beta\epsilon}$ 。

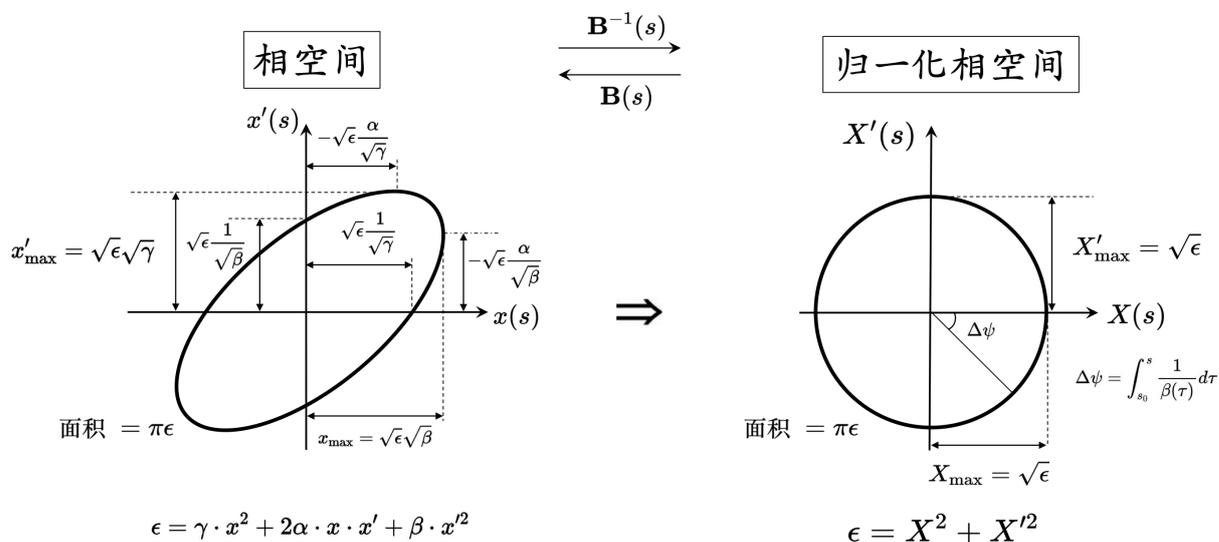


图 7.19: 基于相空间  $(x, x')$  坐标的椭圆与基于归一化相空间  $(X, X')$  坐标的圆。

🔴 **练习 7.12** 根据以上的归一化变量变换,可以证明  $X' = dX/d\psi$ , 其中,  $\psi$  为 betatron 相位。 ■

介绍完归一化相空间概念后,我们继续讨论关于相椭圆所表征的物理图像。图 7.20 给出上述描述的内容的示意图。左图为当 lattice 相椭圆在 lattice 某个特定、固定位置  $s$  的样貌。右图则给出当 lattice 相椭圆沿着传输过程,在不同  $s$  位置的样貌。红色点为某单一粒子沿着  $s$  与 lattice 相椭圆的相对位置。当磁聚焦结构呈周期性时,这些对应的 lattice 的 Courant-Snyder 参数沿着  $s$  也呈周期性, lattice 相椭圆随  $s$  演化的样貌也呈周期性。当粒子从  $s$  至  $s+C$  时(其中,  $C$  为周期长度),当粒子再次回到先前同一周期位置的 lattice 相椭圆时,粒子的相空间  $(x, x')$  坐标还会落在那个 lattice 相椭圆上,但是,未必还落在 lattice 相椭圆上的同一个位置。就是说,可能会、也可能不会还落在 lattice 相椭圆上的同一个位置。

📌 **注** 对包含多个粒子的束团,束团本身在相空间也形成椭圆,称束椭圆 (beam ellipse), §7.5 将介绍。

有些读者看到  $\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2$  时,也许能欣然接受它对应相椭圆的曲线方程。但是,有些读者或许还好奇这个“形式”是怎么通过 Hill 方程的解得到的? 其实,这个不变量形式  $\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2$  不是从 Hill 方程得到的,而是先退一步,从哈密顿量辗转得到的。以下不详细推导,仅简单说明。将上一节哈密顿量<sup>17</sup>

<sup>17</sup>这个哈密顿量不是用  $P_x$ , 而采用  $P_x \approx x'$ , 故有时称伪哈密顿量 (pseudo-Hamiltonian)。这里我们不纠结它们之间的区别。

满足好奇心要付出的代价: 更多耐心。

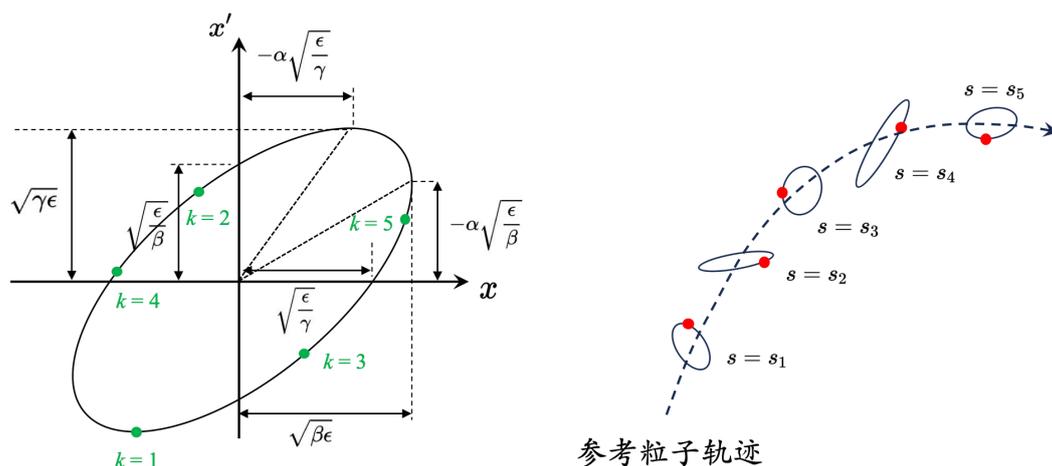


图 7.20: (左) Lattice 相椭圆在 lattice 某个特定位置  $s$  的样貌; (右) Lattice 相椭圆在沿着传输段不同  $s$  位置的样貌。绿色点为某一粒子在 lattice 一位置不同圈的相空间坐标。红色点为某一粒子沿着  $s$  与 lattice 相椭圆的相对位置。图例修改自 S. Di Mitri 一书。

$$\mathcal{H}_0(x, x', s) = \frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{2}K(s)x^2 \quad (7.83)$$

利用 §6.3.1 学过的“作用量-角度”正则变换, 采取<sup>18</sup>

$$F_1(x, \psi) = \int_0^x x'(s)dx = -\frac{x^2}{2\beta} \left( \tan \psi - \frac{\beta'}{2} \right) = -\frac{x^2}{2\beta} (\tan \psi + \alpha) \quad (7.84)$$

则有新的动量“作用量” $I_x$

$$I_x = -\frac{\partial F_1}{\partial \psi} = \frac{x^2}{2\beta} \sec^2 \psi = \frac{x^2}{2\beta} (1 + \tan^2 \psi) = \frac{1}{2\beta} [x^2 + (\beta x' + \alpha x)^2] \quad (7.85)$$

旧的相空间坐标现在可以改写为

$$\begin{cases} x = \sqrt{2\beta J} \cos \psi \\ x' = -\sqrt{\frac{2J}{\beta}} (\sin \psi + \alpha \cos \psi) \end{cases} \quad (7.86)$$

略过细节, 现在可以写下新的哈密顿量  $\tilde{\mathcal{H}}_0$

$$\tilde{\mathcal{H}}_0 = \mathcal{H}_0 + \frac{\partial F_1}{\partial s} = \frac{I_x}{\beta} \quad (7.87)$$

**练习 7.13** 上式最后一个等号不容易直接看出来, 对细节感兴趣的读者, 不妨自行推导。 ■

<sup>18</sup>此节一开始的解, 不妨设  $\psi_0 = 0$ , 其中,

$$\begin{aligned} x'(s) &= \frac{A}{\sqrt{\beta(s)}} \frac{\beta'(s)}{2} \cos \psi(s) - \frac{A}{\sqrt{\beta(s)}} \sin \psi(s) \\ &= x(s) \left[ \frac{\beta'}{2\beta} - \frac{1}{\beta} \frac{\sin \psi(s)}{\cos \psi(s)} \right] = x(s) \left( \frac{\beta'}{2\beta} - \frac{1}{\beta} \tan \psi(s) \right) = -\frac{x}{\beta} (\alpha + \tan \psi) \end{aligned}$$

将此代入生成函数  $F_1$ 。以上两式移项后, 有

$$\tan \psi = -\frac{\beta x'}{x} - \alpha$$

解

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{H}}_0 &= \mathcal{H}_0 + \frac{\partial F_1}{\partial s} \\
&= \frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{2}K(s)x^2 + \frac{x^2}{4} \frac{\beta''\beta - \beta'^2}{\beta^2} + \frac{x^2\beta'}{2\beta^2} \tan \psi \\
&= \frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{2\beta^2}x^2 + \frac{\alpha^2}{2\beta^2}x^2 + \frac{\alpha}{\beta}xx' \\
&= \frac{I_x}{\beta}
\end{aligned}$$

其中，用了上一节介绍的  $\frac{1}{2}\beta\beta'' - \frac{1}{4}\beta'^2 + K(s)\beta^2 = 1$  才把  $K(s)$  顺利消去。 ■

有了新的哈密顿量后，新的坐标“角度”与新的动量“作用量”遵循的运动方程为

$$\begin{cases} \psi' = \frac{d\psi}{ds} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}_0}{\partial I_x} = \frac{1}{\beta(s)} \\ I_x' = \frac{dI_x}{ds} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}_0}{\partial \psi} = 0 \end{cases} \quad (7.88)$$

由此可以看到， $I_x$  为不变量。因此，不变量  $\gamma x^2 + 2\alpha xx' + \beta x'^2 = 2I_x$  其实是将  $(x, x')$  中的哈密顿量经过正则变换后，新的动量坐标“作用量”。

除了  $\beta(s), \alpha(s)$ ，还有相位函数  $\psi(s)$ ，其沿着  $s_0$  至  $s$ ，有

$$\Delta\psi(s) = \int_{s_0}^s \frac{1}{\beta(\tau)} d\tau \quad (7.89)$$

其物理图像在图 7.16 中的体现是：当粒子在  $\beta$  函数包络中振荡，在入口位置与出口位置积累的相位。

🔴 **练习 7.14** 相位函数  $\psi(s)$  在相椭圆中的图像应如何体现？提示：可考虑如下归一化变换

$$X = \frac{x}{\sqrt{\beta}}, \quad X' = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}x + \sqrt{\beta}x'$$

解  $(x, x') \rightarrow (X, X')$  经过归一化变换后，相空间变成圆，半径有  $\sqrt{\epsilon} = \sqrt{2I_x}$ 。此时，相位函数  $\psi(s)$  为粒子在归一化相椭圆中相对于原点（即，参考粒子）绕行旋转的角度。参考图 7.19。 ■

📖 **笔记** 回想一下，从上一节 Hill 方程的通解  $x(s)$ ，知道粒子沿着  $s$  振荡运动的图像，在没有数学推导情况下，怎么通过物理直观过渡到观察该粒子在相空间  $(x, x')$  中绕出封闭椭圆的图像。如果无法说服自己，仍然可以通过数学一步步推导，得到此结论。

**证明** 参考 Mario Conte and William M. MacKay, *An Introduction to the Physics of Particle Accelerators*, 2nd ed., World Scientific (2008) 的 §5.2、§5.3。

由上讨论知道，粒子横向坐标  $x$  沿着磁聚焦结构  $s$  传输过程，对应的是在（归一化）

相空间  $(X, X')$  沿着封闭圆绕行。那么, 粒子在相空间绕出的角度  $\psi$ , 或者一共绕了几圈 (每圈有  $2\pi$  弧度), 也将是一个重要物理量, 称 **tune**。定义如下:

### 定义 7.11. Tune

对单圈、封闭轨迹, 相位超前定义为

$$\psi = \int_0^C \frac{1}{\beta(\tau)} d\tau = \oint \frac{1}{\beta(\tau)} d\tau \quad (7.90)$$

Tune 定义为单圈、封闭轨迹内完整的振荡次数

$$\nu = \frac{\psi}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{d\tau}{\beta(\tau)} \quad (7.91)$$

横向的 tune 称为 betatron tune, 写为  $\nu_{x,y}$ ; 纵向  $s$  的 tune 称为 synchrotron tune, 写为  $\nu_s$ 。

**注** 有些文献将相位函数写成  $\psi$ ; 有些写成  $\mu$ 。将 tune 的符号写为  $\nu$ ; 有些则写为  $Q$ 。此讲义采用  $\nu$ , 留意,  $Q$  在此讲义中代表谐振腔的品质因数,  $\mu$  在一些文献用来代表多束团振荡模式指标。

**注** 思考一下, 根据物理图像, 明显 betatron tune 还可以写成

$$\nu_{x,y} = \omega_{\beta x, \beta y} / \omega_0 \quad (7.92)$$

其中,  $\omega_0$  为粒子绕行储存环的 (角) 频率。类似地, 纵向运动的振荡也有对应的 tune

$$\nu_s = \omega_s / \omega_0 \quad (7.93)$$

其中, 纵向振荡又称同步振荡 (synchrotron oscillation), §8.2 将介绍。一般有  $\nu_{x,y} \gg 1 \gg \nu_s$  或  $\omega_\beta \gg \omega_0 \gg \omega_s$ 。



**笔记** Tune、相位超前的概念与 betatron 振荡频率之间的关系间与物理图像要确实理解, 在后面讨论扮演重要角色。

**练习 7.15** 参考图 7.16, 假设储存环全环由图中六个周期构成, 试估算全环的 tune。 ■

**解** 先估算  $\beta(s)$  函数, 大概可写成

$$\beta(s) \approx 9 - \frac{12}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{12}s\right)$$

根据相位超前的定义计算积分, 即可推知 tune。 ■

为了更好地理解 tune 的物理含义, 以下讨论几个目前介绍的相关物理量之间的联系。首先, 由  $\omega_{\beta x} = \nu_x \omega_0 = \nu_x 2\pi / T_0$ , 于是有

$$\begin{aligned} \nu_x &= \frac{T_0}{2\pi} \omega_{\beta x} = \frac{1}{2\pi} \int_t^{t+T_0} \omega_{\beta x} dt \\ &\approx \frac{T_0 c}{2\pi} k_{\beta x} = \frac{C_0}{2\pi} k_{\beta x} = \frac{1}{2\pi} \int_s^{s+C_0} k_{\beta x} ds \end{aligned} \quad (7.94)$$

或

$$\psi_x = 2\pi\nu_x = \int_t^{t+T_0} \omega_{\beta x} dt = \int_s^{s+C_0} k_{\beta x} ds \quad (7.95)$$

或

$$\frac{1}{\beta_x} = k_{\beta x} = \frac{\omega_{\beta x}}{c} \quad (7.96)$$

以上将 betatron tune、betatron 振荡频率  $\omega_\beta$ 、betatron 振荡波数  $k_\beta$ 、相位超前  $\psi$  三者的关系以类似于“波”的特性联系起来。上一节末尾给出了 betatron 振荡的大致样貌，后面还将看到，尽管 Courant-Snyder 参数沿着磁聚焦结构传输段的样貌不是完美的“波”，但是在平滑近似 (§7.2 介绍) 后，以“波”近似描述 betatron 振荡对有些情况可以大大简化分析。

回顾一下，会发现以上介绍的单粒子在经历加速器磁聚焦结构传输过程中，扫出的相空间有两种：

- 一种是跟着单一粒子行进记录的相空间坐标分布，常见于单次经过加速器（如：直线加速器、能量循环加速器）。参考图 7.20（右）。
- 另一种是在磁聚焦结构固定位置  $s$ ，等待且同一个单一粒子往复经过  $s$  处时记录的相空间坐标分布，常见于储存环加速器。参考图 7.20（左），又称 Poincare section 或 Poincare map 或 first recurrence map。

#### 定义 7.12. Poincare map

在周期轨道、动力学系统中，定义为在磁聚焦结构固定位置  $s$  处，等待且同一个单一粒子往复经过  $s$  处时记录的相空间坐标分布，称 Poincare section 或 Poincare map 或 first recurrence map。此相空间一般是低维度的子相空间。 □

#### 定义 7.13. 单粒子发射度 (single-particle emittance)

上面介绍 Courant-Snyder 参量时，曾提及  $\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2$  为不变量，可写成  $\epsilon$  或  $2I_x$ ，其正比于相空间面积。这里的  $\epsilon$  称几何束团发射度 (geometric beam emittance)， $I_x$  则称为单粒子发射度 (single-particle emittance)。

**注** 束团发射度的概念在后面 §7.5 将着重介绍。此处仅定义  $I_x$  为单粒子发射度，为束团发射度之半。 □

## 7.4 传输矩阵概念初探

回顾一下，目前为止学到了哪些关于粒子在磁聚焦结构传输过程的特性。对线性磁铁元件，纵向向量位函数  $A_s$  最多不超过与  $(x, x', y, y')$  的二次方关系，因此，哈密顿量为二次型。从哈密顿量出发，得到 Hill 方程。通过 Floquet 变换，巧妙地引入 Courant-Snyder 参量，得到 Hill 方程的通解，并给出两种诠释：一种是实空间诠释：即视 Courant-Snyder 参量为沿着  $s$  传输的包络函数、一种是相空间诠释：即视 Courant-Snyder 参量为在相空间围出相椭圆的特征参数。其中，第二种诠释还可细分 lattice 构成的相椭圆或束团构成的相椭圆。

无论是何种诠释，通解都是一个形式<sup>19</sup>

$$x(s) = \sqrt{\epsilon\beta(s)} \cos[\psi(s) - \psi_0] \quad (7.97)$$

写出这个通解有个好处，就是计算  $\beta(s)$  或  $\psi(s)$  时，只需要给定  $K(s)$  就可以求解，初始相位  $\psi_0$  暂时可以先不指定。对一个包含许多粒子的束团，不需要逐个粒子逐个解，只需要解一次。之后，计算每个粒子的  $x(s)$  仅需要指明其相对于参考粒子的初始相位  $\psi_0$  即可。相位超前函数  $\psi(s)$  对每个粒子都一样，表征的是粒子经过传输段前后过程积累的相位改变而已。

这种只需要解一次的特性可以从另一个视角看：映射。

对线性磁铁部件，映射即传输矩阵。

由于 Hill 方程本身为二阶、线性微分方程，完整的解需要两个初始条件  $x_0 = x(s=0)$  与  $x'_0 = x'(s=0)$ ，初始条件进一步可以写成

$$\begin{aligned} x_0 &= x(s=0) = \sqrt{\epsilon\beta_0} \cos \psi_0 \\ x'_0 &= x'(s=0) = -\alpha_0 \sqrt{\frac{\epsilon}{\beta_0}} \cos \psi_0 + \sqrt{\frac{\epsilon}{\beta_0}} \sin \psi_0 \end{aligned} \quad (7.98)$$

其中， $\beta_0 = \beta(s=0)$ ,  $\alpha_0 = \alpha(s=0)$ 。

现在，我们总是可以将  $x(s)$  与  $x'(s)$  写成包含初始条件  $x_0$  与  $x'_0$  的显形式。为什么总是能做到？因为系统是线性的。就是说，通解总是能写成

$$\begin{aligned} x(s) &= m_{11}(s)x_0 + m_{12}(s)x'_0 \\ x'(s) &= m_{21}(s)x_0 + m_{22}(s)x'_0 \end{aligned} \quad (7.99)$$

这里略去细节推导，整理成如下定理：

传输矩阵的概念从这浮现！

<sup>19</sup>这里我们将比例常数  $A$  写成不变量  $\sqrt{\epsilon}$ ，这是后见之明。在不影响理解前提下，接受这个调整应该是没问题的。

**定理 7.5. 传输矩阵的一般表示：传输段 (transport line)**

自  $s_0$  至  $s$  的线性传输矩阵一般表示有：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \end{pmatrix} &= \mathbf{M} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} = \mathbf{M}(s_0 \rightarrow s) \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} = \mathbf{M}(s | s_0) \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}} (\cos \psi + \alpha_0 \sin \psi) & \sqrt{\beta_0 \beta} \sin \psi \\ -\frac{1+\alpha_0 \alpha}{\sqrt{\beta_0 \beta}} \sin \psi + \frac{\alpha_0 - \alpha}{\sqrt{\beta_0 \beta}} \cos \psi & \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta}} (\cos \psi - \alpha \sin \psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.100)$$

其中， $\psi$  为自  $s_0$  至  $s$  的相位超前，有

$$\psi = \tan^{-1} \left( \frac{m_{12}}{\beta_0 m_{11} - \alpha_0 m_{12}} \right) \quad (7.101)$$

利用  $\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2 = \epsilon =$  不变量，写成 Courant-Snyder 函数形式，则有

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \beta(s) \\ \alpha(s) \\ \gamma(s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} m_{11}^2 & -2m_{11}m_{12} & m_{12}^2 \\ -m_{11}m_{21} & m_{11}m_{22} + m_{12}m_{21} & -m_{12}m_{22} \\ m_{21}^2 & -2m_{21}m_{22} & m_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta(s_0) \\ \alpha(s_0) \\ \gamma(s_0) \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{T} \begin{pmatrix} \beta(s_0) \\ \alpha(s_0) \\ \gamma(s_0) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.102)$$

其中， $\mathbf{T}$  有时称为 Twiss 矩阵。

**注** 这里  $2 \times 2$  传输矩阵有些文献以  $\mathbf{M}$  矩阵表示，矩阵元素写成  $m_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ )；有些文献也写成  $\mathbf{R}$  矩阵，矩阵元素写成  $R_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ )。

**注** 一般说的传输矩阵指的是  $2 \times 2$  的  $\mathbf{M}$  矩阵。但是，利用矩阵的概念不仅可以套用在“状态”向量  $[x \ x']^T$  上，也可以用在 Courant-Snyder 参量  $[\beta \ \alpha \ \gamma]^T$  上。

**注** 这里的“状态”向量  $[x \ x']^T$  明显是描述“粒子”的，但是，上面 Eq. (7.100) 的  $2 \times 2$  传输矩阵  $\mathbf{M}$  元素中的 Courant-Snyder 参量则是描述“磁聚焦结构或磁铁部件”的，意义上对应到图 7.16。这与 Eq. (7.102) 的  $3 \times 1$  的“状态”向量的  $[\beta \ \alpha \ \gamma]^T$  不太一样，这里的 Courant-Snyder “状态”向量应对应到图 7.17，应视为是描述“粒子”的参量。

**注** 于是，以  $3 \times 3$  矩阵描述的物理图像可以看成是传输或映射一个相椭圆。

**注** 在动力学系统分析中， $\mathbf{M}$  又称切映射 (tangent map) 或单值性矩阵 (monodromy matrix)。

□

练习 7.16 证明以上定理的结果。 ■

### 定理 7.6. 传输矩阵的一般表示：单圈 (one turn)

对于单圈 (one turn) 或存在周期性的磁聚焦结构，选任意一点  $s_0$  为参考点，起点与终点具有一样的 Courant-Snyder 参数，即  $\beta = \beta_0, \alpha = \alpha_0, \psi \rightarrow \Phi$ ，则上面一般传输段的矩阵表示可以进一步化简写为

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos \Phi + \alpha \sin \Phi & \beta \sin \Phi \\ -\gamma \sin \Phi & \cos \Phi - \alpha \sin \Phi \end{pmatrix} = \mathbb{I} \cos \Phi + \mathbb{J} \sin \Phi \quad (7.103)$$

其中，

- $\alpha, \beta, \gamma$  为 Courant-Snyder 参数， $\Phi$  为单圈相位超前
- $\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbb{J} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\gamma & -\alpha \end{pmatrix}$
- $\text{Trace}(\mathbb{J}) = 0$ ,  $\mathbb{J}^2 = -\mathbb{I}$
- $\beta\gamma = 1 + \alpha^2$ , 即  $\det(\mathbb{J}) = 1$

$\mathbb{J}$  自  $s_0$  至  $s$  的传输满足以下关系：

$$\mathbb{J}(s) = \mathbf{M}(s_0 \rightarrow s)\mathbb{J}(s_0)\mathbf{M}(s_0 \rightarrow s)^{-1} \quad (7.104)$$

### 性质 7.2. 单圈矩阵元素与 Courant-Snyder 参量特性

有

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\Phi}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cos^{-1} \left[ \frac{\text{Trace}(\mathbf{M})}{2} \right] \\ \beta &= \frac{M_{12}}{\sin(2\pi\nu)} \\ \alpha &= \frac{M_{11} - R_{22}}{2 \sin(2\pi\nu)} \\ \gamma &= -\frac{M_{21}}{\sin(2\pi\nu)} \end{aligned} \quad (7.105)$$

练习 7.17 证明以上定理的结果。 ■

练习 7.18 考虑最简单的情况：粒子束在真空漂移段的传输。假设一开始粒子处于束腰处，即  $\alpha(s_0) = 0, \beta(s_0) > 0$ ，证明表征束团横向尺寸的 betatron 函数有

$$\beta(s) = \beta(s_0) + \frac{\ell^2}{\beta(s_0)}$$

此结果可与激光束横向尺寸距离改变比较，有  $w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$ 。 ■

**定义 7.14. Mobius 加速器**

为一种新拓扑结构的环形加速器操作模式。在环形加速器中，假设原本的单圈传输矩阵写成

$$\mathbf{M}_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{x,2 \times 2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{y,2 \times 2} \end{pmatrix} \quad (7.106)$$

则可通过在环形加速器的一位置实现如下“缠绕 (twist)”变换，使单圈传输矩阵将变成

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{4 \times 4} &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{M}_{4 \times 4} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{x,2 \times 2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{y,2 \times 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{M}_{y,2 \times 2} \\ \mathbf{M}_{x,2 \times 2} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.107)$$

其中，实现“缠绕”变换的方式

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (7.108)$$

不只一种，比如可采用斜四极铁 (skew quadrupole)。此类加速器操作模式称 Mobius 加速器 (Mobius accelerator, Mobius operation, Mobius mode)。

**性质 7.3. Mobius 加速器的几个特点**

此种新拓扑结构的 Mobius 加速器操作模式使其具有相对于传统环形加速器的优点：

- 可在保持大振幅 betatron 振荡稳定性的同时，将电子束横向宽高比调整为 1，从而提高束团亮度。
- 在对撞模式下，圆束团 (round beam) 相对更稳定可靠，不易受束-束 (beam-beam) 相互作用影响，对撞亮度提高。
- 避开了  $\nu_x + \nu_y \in \mathbb{N}$  的共振 (§7.9 将介绍)。
- 有效消除部分非线性谐波，增加动力学孔径 (§7.11 将介绍)。
- 只需在一个方向进行色散补偿即可，可降低对六极铁强度的要求。

但也伴随可能的缺点：

- 比起传统环形加速器，将出现新的共振，使得稳定区间缩小。
- 束团寿命减短 (§8.4 将介绍)，可能导致无法长时间维持高对撞亮度。 □

**注** 此方案最早由 Cornell 大学的 Richard Talman 教授在 1995 年提出，原始论文可参考 Richard Talman, A Proposed Mobius Accelerator, Phys. Rev. Lett. **74**, 1590 (1995). <https://journals.aps.org/prl/pdf/10.1103/PhysRevLett.74.1590>. □

结束这一节前，不妨品味一下从 Hill 方程到相空间，再到传输矩阵的论证、推导过程。在没有给定明确形式的  $K(s)$  情况下，也就是说，仅写出 Hill 方程的通解而还不是

完整解的情况下，我们已经能挖掘出这么多物理图像。为了更珍视 Courant-Snyder 理论，也许应该说，我们“竟然”能挖掘出这么多物理图像！

另外，以下给出一个定理，有时候对于处理周期性磁聚焦结构的传输矩阵时可能有帮助。

#### 定理 7.7. 棣莫佛 (de Moivre) 定理

由棣莫佛定理，有

$$\mathbf{M}^k = (\mathbb{I} \cos \Phi + \mathbb{J} \sin \Phi)^k = \mathbb{I} \cos k\Phi + \mathbb{J} \sin k\Phi \quad (7.109)$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbb{I} \cos \Phi - \mathbb{J} \sin \Phi \quad (7.110)$$

其中， $k \in \mathbb{N}$ 。

□

凡是电气专业的读者应该都学过控制理论。对于线性时不变系统，研究系统稳定性常见的方法有传递函数法、根轨迹法、状态空间法等。这里介绍的传输矩阵的概念其实与控制理论中的状态空间法有异曲同工之妙<sup>20</sup>。

兹举一例，以下为单粒子在一般磁聚焦结构传输段的六维相空间坐标的运动方程：

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \\ z \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_x & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_x} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_y & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\rho_x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \\ z \\ \delta \end{pmatrix} \quad (7.111)$$

写成矩阵符号的紧凑形式，有如下标准形式。其通解可以“矩阵指数”(matrix exponential) 表示<sup>21</sup>：

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{X}}{ds} &= \mathbf{A}\mathbf{X} \\ \Rightarrow \mathbf{X}(s) &= e^{\mathbf{A}s}\mathbf{X}(0) \approx (\mathbb{I} + \mathbf{A}s)\mathbf{X}(0) \\ &= \mathbf{M}\mathbf{X}(0) \end{aligned} \quad (7.112)$$

当  $\mathbf{A}$  与  $s$  无关时，在控制理论中称此系统为自治 (autonomous) 系统。

<sup>20</sup> 对非电气专业，但对控制理论感兴趣的读者，不妨可以参考一本浅显易懂的入门书：王天威，控制之美，清华大学出版社 (2022)。

<sup>21</sup> 关于矩阵指数的简短介绍，可参考此讲义附录 §B.11。

传输矩阵的一阶、线性解可写成如下的一般表示式，对  $6 \times 6$  情况：

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \\ z \\ \delta \end{pmatrix}_f = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} & 0 & R_{16} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} & 0 & R_{26} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} & 0 & R_{36} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} & 0 & R_{46} \\ R_{51} & R_{52} & R_{53} & R_{54} & R_{55} & R_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{65} & R_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \\ z \\ \delta \end{pmatrix}_i \quad (7.113)$$

一磁聚焦结构传输段的线性或一阶传输特性可以用传输矩阵描述。虽然未必必须，一般设计传输段时，会倾向设计具有对称性的磁聚焦传输结构，有助于抵消高阶色散项。对称结构还分普通对称 (normal symmetry) 与镜像对称 (mirror symmetry)，定义如下：

#### 定义 7.15. 对称传输

图 7.21(a) 称普通对称 (normal symmetry)，两对称单元有相同的传输矩阵。图 7.21(b) 称镜像对称 (mirror symmetry)，两单元节传输矩阵的主对角线元素交换，其合成后矩阵的主对角线元素相等。

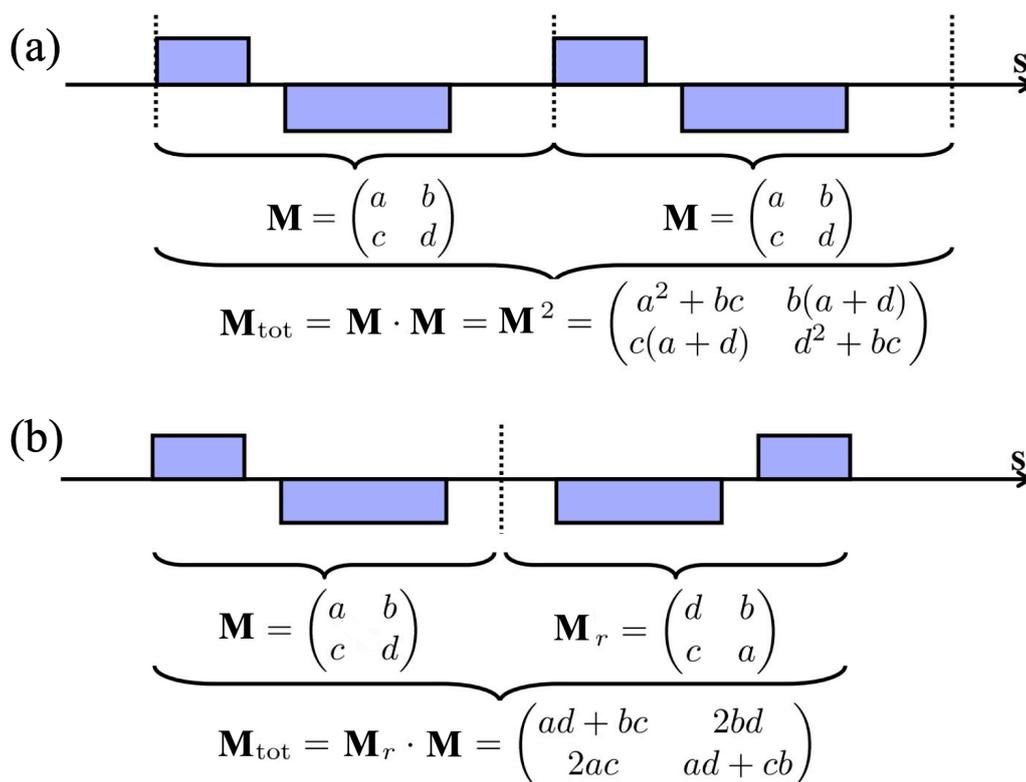


图 7.21: 两种对称磁聚焦结构: (a) 普通对称与 (b) 镜像对称。图例修改自 Y. Papaphilippou (CERN) 课件。

如果称一线性传输段为透明 (transparent)，则其满足如下透明传输的定义：

**定义 7.16. 透明传输**

对一传输段，满足入口处的粒子相空间坐标为  $(x_i, x'_i, y_i, y'_i, z_i, \delta_i)$ ，而出口处的相空间坐标为  $(x_f, x'_f, y_f, y'_f, z_f, \delta_f) = (x_i, x'_i, y_i, y'_i, z_i, \delta_i)$  时，则称此传输段为透明传输。换句话说，透明传输段的传输矩阵为单位矩阵  $\mathbb{I}$ 。

在一些参考文献会出现望远镜传输段，定义如下：

**定义 7.17. 望远镜传输**

一般用在对撞机的对撞点附近，为一种面向放大或缩小横向  $x, y$  方向束团尺寸的磁聚焦结构传输节。望远镜传输同时满足“点对点”(point-to-point) ( $M_{12} = 0, R_{34} = 0$ ) 且平行对平行 (parallel-to-parallel) ( $M_{21} = 0, R_{43} = 0$ ) 传输成像。

图 7.22 为横向单一方向的望远镜传输，对横向另一个方向将不满足望远镜传输。若要满足横向  $x, y$  方向皆为望远镜传输，则需要更多四极铁，可参考图 7.23。

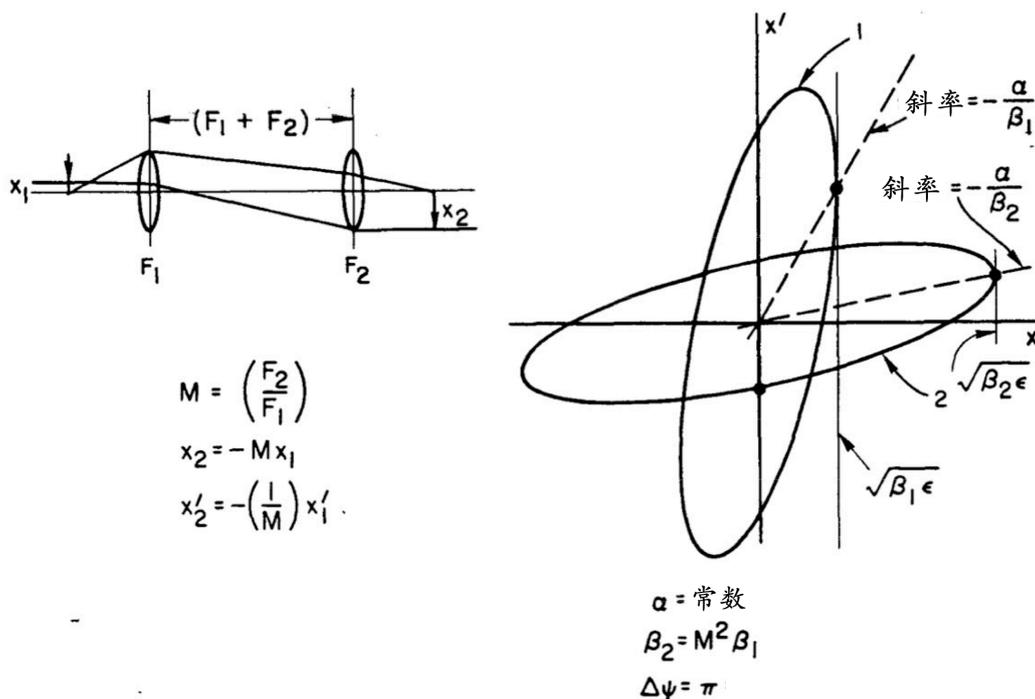


图 7.22: 左图为横向一维望远镜磁聚焦结构传输段，右图为对应的入口 (1) 与出口 (2) 的相空间分布。图例修改自 K.L. Brown and R.V. Servrancks, SLAC-PUB-3381 (1984)。

**练习 7.19** 试着证明图 7.22 的放大系数为  $M = F_2/F_1$ 。当  $M < 0$  时，成像将“颠倒”。 ■

**注** 对带电粒子束纯光学传输感兴趣的读者，可参考 Karl L. Brown and Roger V. Servrancks, First- and Second-Order Charged Particle Optics, SLAC-PUB-3381 (1984). <https://www.slac.stanford.edu/pubs/slapubs/3250/slac-pub-3381.pdf> 或 Karl L. Brown, A First-

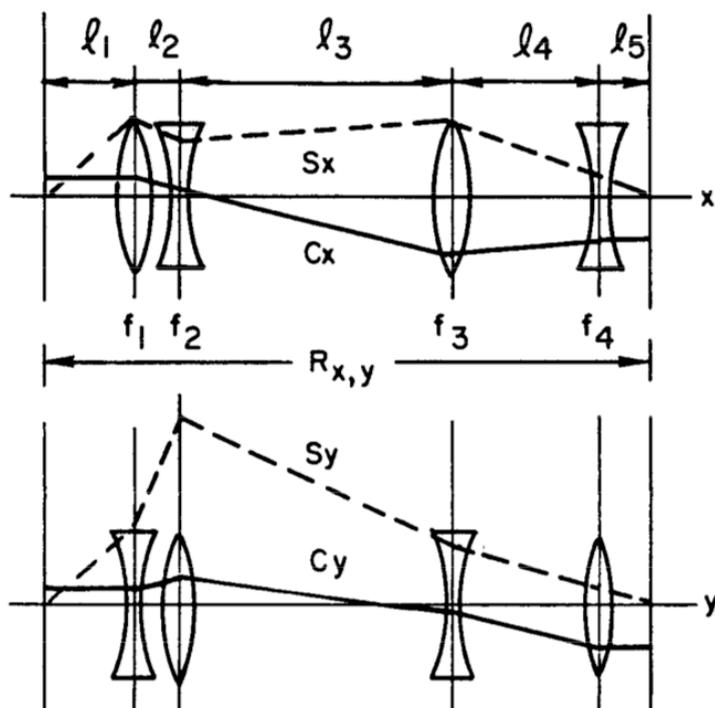


图 7.23: 横向二维望远镜磁聚焦结构传输段。图例取自 K.L. Brown and R.V. Servrancks, SLAC-PUB-3381 (1984)。

and Second-Order Matrix Theory for the Design of Beam Transport Systems and Charged Particle Spectrometers, SLAC-75 (1982). <https://www.slac.stanford.edu/pubs/slacreports/reports01/slac-r-075.pdf>.



**笔记** 到目前为止，我们对 Hill 方程解有更多认识之后，引入了高维相空间（或称状态空间）向量描述粒子线性传输过程。回忆一下，在 §1.22 介绍电磁波高斯束与 §4.5 介绍辐射形成长度时提到，辐射光学中的瑞利长度 (Rayleigh length)  $z_R$  对应电子光学的 betatron 函数  $\beta_x$ 。其实，带电粒子束可以通过相空间方法描述，辐射场光子束也可以按类似方式描述。并且，带电粒子束的线性传输可以通过传输矩阵表示，也可以构建对应的辐射场光子束的传输矩阵。关于辐射场光子束的传输矩阵，有 ABCD 矩阵 ( $2 \times 2$ ) 或 Kostenbauder 矩阵 ( $4 \times 4$  或  $6 \times 6$ )，前者简短介绍如下，后者将在 §8.6.1 介绍。

### 7.4.1 浅谈：光学的 ABCD 传输矩阵

回忆一下，在 §1.22 介绍过定向电磁波的高斯束模型。当时从无源电磁波方程开始，为了求解电场函数  $E_x$ ，引入了缓变包络函数  $\tilde{u} \in \mathbb{C}$ ，其满足傍轴波方程

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} = 0 \quad (7.114)$$

求解  $\tilde{u}$  先从如下猜解形式开始，有

$$\tilde{u} = A(z)e^{Q(z)\rho^2} \quad (7.115)$$

经过求解，得到

$$\tilde{u}(\rho, z) = \frac{E_0}{1 + i\frac{z}{z_R}} e^{-\frac{\rho^2}{w_0^2(1+i\frac{z}{z_R})}} \quad (7.116)$$

其中， $z_R \equiv \frac{kw_0^2}{2} = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$  为瑞利长度， $w_0$  为光束横向尺寸。§1.22 还介绍过在  $z$  处波前的局域曲率半径，有  $R(z) = z \left(1 + \frac{z^2}{z_R^2}\right)$ 。

现在，令

$$1 + i\frac{z}{z_R} \equiv i\frac{q(z)}{z_R} \quad (7.117)$$

其中， $q(z) \equiv z - iz_R$  称为“复光束参量”(complex beam parameter)。则  $\tilde{u}$  可改写成如下形式

$$\tilde{u}(\rho, z) \stackrel{!}{=} \frac{1}{q(z)} e^{ik\frac{\rho^2}{2} \cdot \frac{1}{q(z)}} \quad (7.118)$$

其中，对常数项  $E_0 \times (-iz_R)$  简写成  $E_0$ ，我们总是可以通过适当调整得到以上形式。这里定义的复光束参量  $q(z)$  具有如下特性：

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{q(z)} \right\} &= \frac{z}{z^2 + z_R^2} = \frac{1}{R(z)} \\ \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{q(z)} \right\} &= -\frac{z_R}{z^2 + z_R^2} = \frac{\lambda}{\pi w^2(z)} \end{aligned} \quad (7.119)$$

即， $q^{-1}(z)$  的实部表征曲率(或曲率半径倒数)， $q^{-1}(z)$  的虚部表征光束横向尺寸(横截面积)的倒数。

#### 定义 7.18. 复光束参量 $q(z)$

定义为

$$q(z) = z - iz_R \quad (7.120)$$

取倒数，有

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{z - iz_R} = \frac{z + iz_R}{z^2 + z_R^2} = \frac{1}{R(z)} + i\frac{\lambda}{\pi w^2(z)} \quad (7.121)$$

其中， $R(z)$  为在  $z$  处光束波前的局域曲率半径与  $w(z)$  为在  $z$  处的光束横向尺寸(横截面积)

$$R(z) = z \left(1 + \frac{z_R^2}{z^2}\right), \quad w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \quad (7.122)$$

光场的瑞利长度定义为

$$z_R = \frac{kw_0^2}{2} = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (7.123)$$

**注**  $z$  轴上光场强度  $I(0, z) \propto |\tilde{u}(\rho=0, z)|^2 \propto |q^{-1}(z)|^2$ 。 □

好，上面特意引入复光束参量  $q(z)$  之后，我们就能介绍 ABCD 传输矩阵是怎么出现的了。由上讨论知，复光束参量  $q(z)$  能够很好地体现光场在不同  $z$  位置波前曲率半径、横向尺寸等，可以说  $q(z)$  携带了光场的许多重要信息。于是，我们希望随着光场沿  $z$  传

输时, 进入、离开不同光学部件时, 其对光场特性的影响能够通过复光束参量  $q(z)$  体现。一个很聪明的方式即是 将  $q(z)$  参量化。一种 (不是唯一的) 参量化方式可采用 **Mobius** 变换<sup>22</sup>, 即  $q_{\text{in}} \rightarrow q_{\text{out}}$  有<sup>23</sup>

$$q_{\text{out}} = \frac{Aq_{\text{in}} + B}{Cq_{\text{in}} + D} \quad \text{或} \quad \frac{1}{q_{\text{out}}} = \frac{C + \frac{D}{q_{\text{in}}}}{A + \frac{B}{q_{\text{in}}}} \quad (7.124)$$

其中,  $q_{\text{in}}$  为光束进入光学部件前的参量,  $q_{\text{out}}$  为光束进入光学部件后的参量。而光学部件的传输矩阵可写为

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (7.125)$$

光束线自  $s = s_i$  至  $s = s_f$ , 其横向坐标有

$$\begin{pmatrix} x \\ \Theta \end{pmatrix}_f = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \Theta \end{pmatrix}_i \quad (7.126)$$

其中,  $x$  为光束线相对于参考轨迹的横向偏移,  $\Theta$  为光束线相对于参考轨迹的夹角。有时  $[x \ \Theta]^T$  又写成  $[r \ r']^T$ 。对不同的光学部件,  $A, B, C, D$  取值不同。原则上,  $A, B, C, D$  仅与光学部件本身参数有关, 与光束参数无关。



**笔记** ABCD 传输矩阵的基本思路: 光学部件用矩阵元素  $A, B, C, D$  描述, 光束线 (ray) 的行为用状态变量  $[x \ \Theta]^T$  描述, 随  $s$  的演化按传输矩阵描述, 光场的特性则通过复光束参量  $q$  与电场、磁场关联。

作为  $2 \times 2$  方阵, 以下整理几种常见的拆解。

#### 定理 7.8. ABCD 方阵的几种常见拆解

包括:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ D/B & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1/B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A/B & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C/A & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & B/A \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & A/C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -C^{-1} & 0 \\ 0 & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & D/C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & B/D \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C/D & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

<sup>22</sup>此处的 **Mobius** 变换与前面介绍的 **Mobius** 加速器不是一回事, 宜留意。

<sup>23</sup>**Mobius** 变换、**Pade** 近似、双线性 (**bilinear**) 变换之间一定程度上能互相关联。感兴趣的读者可自行查阅相关文献。

光学部件的传输矩阵与带电粒子束的传输矩阵有诸多相似之处。对光学部件的传输矩阵感兴趣的读者，请自行参考相关书籍。

## 7.5 发射度：一个加速器中重要的物理量

回顾一下，§7.2节给出了 Hill 方程的通解  $x(s)$  的大致样貌，§7.3节给出 Hill 方程解在相空间的物理图像，§7.4节进一步在 Hill 方程为二阶线性微分方程的基础上，将粒子随  $s$  的动力学过程以传输矩阵描述。这三种诠释、面向都是在单一粒子的前提下讨论的——虽然我们偷偷在 §7.3 节末尾，针对通过“作用量-角度”变换导出的不变量  $\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2$  定义了单粒子发射度  $I_x$ ，然后含糊其辞、偷天换日说了它也可写成  $\epsilon$ ，然后说  $\epsilon$  是束团发射度。

现在，试着想像一个束团，其包含了许多粒子，定义其中一个为参考粒子，其相空间状态变量为  $[x \ x']^T \equiv [0 \ 0]^T$ 。束团中其余粒子的相空间变量  $[x \ x']^T$  就围绕在参考粒子附近的一个小范围内。还记得，§7.3 节介绍的相椭圆的概念，为基于单一粒子沿着  $s$  前进时，在相空间勾勒出的属于该单一粒子的一封闭轨迹。现在假设束团中的每个粒子都是独立的、按一特定随机分布产生的（比如，高斯/正态分布），那么，按照遍历性假设 (ergodicity)，每个独立的、不互相影响的粒子在同一相空间中绕行但画出各自的封闭轨迹<sup>24</sup>。在某一特定位置  $s$ ，这些各自独立的、不互相影响的粒子，它们的相空间  $(x_i, x'_i)$  坐标就成了“点集”，收集在一起之后，可以视为一个“分布”(distribution)。可以想像，这个分布看起来可能是椭圆分布<sup>25</sup>，这个椭圆分布就可以视为束团的相空间分布。注意我们的用词，从“绕行、画出封闭轨迹”转变成“相空间分布”。区别是，绕行、画出的封闭轨迹是中空的，每个粒子体现的是一封闭曲线，而相空间分布是许多粒子相空间坐标的“点集”，是填充在封闭区域内的。

这里我们通过把遍历性假设、把单一粒子随  $s$  前进、把在相空间绕行画出的封闭轨迹等概念揉合在一起，过渡到在一束团内彼此独立、不互相影响的粒子在同一相空间中、在某一特定传输位置  $s$ ，每个粒子代表相空间一个状态点，这些点形成的集合用相椭圆表示<sup>26</sup>。单一粒子在相空间绕行所满足的不变量  $\epsilon = \gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2$ ，表征绕行时围出的封闭轨迹曲线或相椭圆面积，是个数学上严格、准确的面积。现在，这个概念随着上面论述，也可以过渡到束团在某一特定传输位置  $s$  时，在相空间中形成椭圆分布时所占据<sup>27</sup>的面积。

<sup>24</sup>这些封闭轨迹大小、形状不尽相同，且每个粒子的  $I_x$  各异。

<sup>25</sup>看起来是不是椭圆分布不是那么重要，因为肉眼看到的只是模模糊糊的边界。至于是什么分布，根据特定情况而异。对电子束来说，考虑同步辐射等效效应后，平衡时，在相空间呈高斯分布，看起来确实就像椭圆分布。

<sup>26</sup>点的集合洒落一地，如何用椭圆表示？这个描述显然是模糊的。用一个相椭圆表征一个分布，势必要划定一个范围，比如点集合的方均根 (rms) 范围、关联程度等。因此，这个描述如果要更准确量化的话，就要引入统计的概念。

<sup>27</sup>注意，对单一粒子来说，沿着  $s$  传输，对应于在相空间绕行而画出封闭曲线或椭圆，其中， $I_x$  表征椭圆面积。对束团来说，许多粒子在某一特定传输位置  $s$ ，因为彼此间状态稍微不同，在相空间中用“点”表示。这些点的集合可以量化为一个统计学上的面积  $\pi\epsilon$ 。

**定义 7.19. 遍历性假设 (ergodic hypothesis)**

最初由玻尔兹曼 (Ludwig Boltzmann) 提出，可表述为

系统的“时间”平均特性 = 系统的“系综”平均特性。

即假设系统在演化过程中会遍历所有可能的运动状态，使得系统的时间平均特性等于在一瞬间观察到的系综平均。在这里讨论的加速器粒子动力学中，“时间”可视为纵向全域坐标  $s$ ，“系综”可视为束团。

**注** 关于“系综”的定义，可参考 §6.2。 □

束团作为整体，在相空间中占据的面积可以用发射度 (emittance) 量化，符号写作  $\epsilon$ 。前述的单一粒子在相空间绕出的相空间面积则写成  $I_x$ ，更像是第6章介绍的作用量 (action)。



**笔记** 有些教科书或文献用同样的符号  $\epsilon$  表征单粒子发射度与束团发射度，是否徒增混淆，还是用心良苦？

**定义 7.20. 几何发射度 (geometric emittance)**

定性而言，束团发射度指的是在某一时刻或某一位置  $s$ ，束团横向相空间所占区域的面积。对于严格满足 Liouville 定理的束团，随时间演化过程，束团形状可能改变，但束团发射度保持不变。

束团发射度的定量定义在不同文献、不同社群，其定义方式不尽相同。对 直线加速器 或 质子同步加速器 社群，束团发射度定义为 90% 的电子占据的相空间  $(x, x')$  或  $(y, y')$  面积。

$$\text{面积} = \pi\epsilon \quad (7.127)$$

有些乘上  $\pi$  (即，把面积当作发射度)，有些则忽略  $\pi$  (即， $\epsilon = \frac{\text{面积}}{\pi}$ )。

对 电子储存环 社群，忽略集体效应等，平衡时的束团分布可视为高斯分布。束团发射度定义为一个标准差 ( $\sigma$ ) 以内 — 约 39% 的电子 — 电子所占据的相空间  $(x, x')$  或  $(y, y')$  面积，且忽略  $\pi$ ，即， $\epsilon_{\text{rms}} = \frac{1 \text{ 个 } \sigma \text{ 所占面积}}{\pi}$ ，又称方均根 (rms) 发射度。

**注** 对一维，如： $(x, x')$ ，高斯分布而言，当考虑  $\kappa$  个  $\sigma$  时，包含的粒子数占比为

$$P(\epsilon < \kappa\epsilon_{\text{rms}}) = 1 - e^{-\kappa/2} \quad (7.128)$$

当  $\kappa = 1$ ， $P = 39\%$ ；当  $\kappa = 4$ ， $P = 87\%$ ；当  $\kappa = 6$ ， $P = 95\%$ 。如果同时考虑  $\kappa$  个  $\sigma$  的二维高斯分布，则有

$$P(\epsilon_x < \kappa\epsilon_{x,\text{rms}}, \epsilon_y < \kappa\epsilon_{y,\text{rms}}) = \left(1 - e^{-\kappa/2}\right)^2 \quad (7.129)$$

当  $\kappa = 1$ ,  $P = 15\%$ ; 当  $\kappa = 4$ ,  $P = 74\%$ ; 当  $\kappa = 6$ ,  $P = 90\%$ 。

**注** 关于发射度的更多讨论, 参考 Klaus Floettmann, Some basic features of the beam emittance, Phys. Rev. ST Accel. Beams **6**, 034202 (2003). <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.6.034202>

**注** 有时又称自然发射度 (natural emittance), 特别是当考虑同步辐射阻尼效应与量子激发效应达平衡时。

**注** 此讲义主要关心电子, 对电子直线加速器, 发射度视为束团中包含 90% 粒子在相空间所占面积; 对电子同步加速器储存环, 假设束团为高斯分布, 发射度为一个 rms 尺寸内在相空间所占面积。



**笔记** 当设计电子束从直线加速器注入储存环时, 务必留意不同发射度惯例间的统合。有时候, 为确保与储存环惯例一致, 在直线加速器中采用 rms 发射度。采用 rms 发射度的一个可能缺点是: 当注入在相空间边缘时, 如果非线性效应可能造成影响的话, 只在 rms 范围附近的分析未必能体现。此外, 基于工程实际, 针对许多束团注入方案 (比如: 离轴注入、在轴注入、束团置换等), 当束团注入不在轴上时, 即对应图 7.17 中的椭圆圆心不在圆心处, 此时发射度如何计量应小心。

#### 定义 7.21. 归一化发射度 (normalized emittance) $\epsilon_N$

定义为

$$\epsilon_N = \beta\gamma\epsilon \quad (7.130)$$

其中,  $\beta, \gamma$  为洛伦兹因子。

**注** 对高能粒子, 一般如果  $\beta \rightarrow 1$ , 则  $\epsilon_N = \gamma\epsilon$ 。

**注** 如果担心两种发射度符号可能产生歧义, 有时写成  $\epsilon_N = \gamma\epsilon_G$ 。

**注** 这里的  $\beta = v/c, \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$  为洛伦兹因子, 不要与 Courant-Snyder 参量  $\beta, \gamma = \frac{1+\alpha^2}{\beta}$  搞混。

#### 定理 7.9. 绝热阻尼 (adiabatic damping)

无论是直线加速或环形同步加速, 粒子加速过程中, 归一化发射度  $\epsilon_N$  为守恒量, 其值不变。由此, 几何发射度  $\epsilon_G = \epsilon_N/\beta\gamma$  将在加速过程减小, 称粒子加速的绝热阻尼效应。物理上来看, 这是因为粒子加速过程, 粒子的横向动量几乎不变, 但是纵向动量增加较多, 即  $x' = p_x/p_s$  变小。数学上来看, 这是因为 Courant-Snyder 参量是基于相空间坐标  $(x, x')$  定义的, 而不是正则坐标  $(x, p_x)$ 。

既然对 Courant-Snyder 参量的诠释可以针对磁聚焦结构 (图 7.16)，也可以针对粒子束团 (现在可以把图 7.17 想像成一个填满了粒子的椭圆分布)，那么，敏锐的读者应该会进一步琢磨“发射度”的概念：按上面定义，发射度是针对粒子束团而定义的，这个概念能不能过渡到针对磁聚焦结构？可以！



**笔记** Courant-Snyder 参数  $\beta, \alpha, \gamma$  与发射度  $\epsilon$  既可以用来描述磁聚焦结构 (lattice)，也可以用来描述束团相空间分布的特性。当磁聚焦结构恰好符合束团相空间分布时，称两者匹配 (matched)，否则存在失配 (mismatched)。一般而言，磁聚焦结构的设计总是与束团相空间分布匹配。如果失配，可能在相空间出现成丝 (filamentation) 现象。

随着我们对六维相空间的理解更多，可以接受其容纳不止单一粒子，而是多个粒子形成的束团 (beam 或 bunch)。如果束团内粒子间的相互作用可忽略，或相互作用是长程的 (long-range interaction)<sup>28</sup>，那么这种多粒子构成的束团在同一相空间中的图像就还能进一步分析。为了更好地描述束团在相空间的“分布”<sup>29</sup>，以下借用统计学方法，定义束矩阵。

#### 定义 7.22. 束矩阵 (beam matrix) $\Sigma$

束矩阵常用来描述束团二阶矩 (second moment)，定义为

$$\Sigma = \langle \mathbf{X}\mathbf{X}^T \rangle \quad (7.131)$$

其中， $\mathbf{X} = (x, x', y, y', z, z')^T$ ， $T$  表 (非共轭) 转置， $\langle \dots \rangle$  表对所有被考虑的粒子取平均，对离散情况， $\langle \dots \rangle$  表

$$\langle \dots \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\dots)_i \quad (7.132)$$

或对连续分布情况，已知分布函数  $f(\mathbf{X})$ ，则  $\langle \dots \rangle$  表

$$\langle \dots \rangle = \int (\dots) f(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \quad (7.133)$$

其中，假设归一化条件  $\int f(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = 1$ 。

更常用的形式为减去质心坐标  $\langle \mathbf{X} \rangle$ ，有

$$\Sigma = \langle (\mathbf{X} - \langle \mathbf{X} \rangle)(\mathbf{X} - \langle \mathbf{X} \rangle)^T \rangle \quad (7.134)$$

<sup>28</sup>怎么区分长程作用或短程作用？一种衡量方式可以按等离子体理论的德拜长度 (Debye length)，将在 §11.2 介绍。

<sup>29</sup>注意，是分布，不是封闭的椭圆曲线。

写成矩阵明显形式有如下实对称矩阵 (real symmetric matrix)

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xx'} & \sigma_{xy} & \sigma_{xy'} & \sigma_{xz} & \sigma_{xz'} \\ & \sigma_{x'}^2 & \sigma_{x'y} & \sigma_{x'y'} & \sigma_{x'z} & \sigma_{x'z'} \\ & & \sigma_y^2 & \sigma_{yy'} & \sigma_{yz} & \sigma_{yz'} \\ & & & \sigma_{y'}^2 & \sigma_{y'z} & \sigma_{y'z'} \\ & & & & \sigma_z^2 & \sigma_{zz'} \\ & & & & & \sigma_{z'}^2 \end{pmatrix} \quad (7.135)$$

**注** 上面相空间坐标可以换成其它形式，如： $\mathbf{X} = (x, x', y, y', z, \delta)^T$ ，其中， $z' = \frac{\delta}{\beta^2 \gamma^2}$ ， $\delta = \frac{\Delta\gamma}{\gamma}$  或是  $\mathbf{X} = (x, p_x, y, p_y, z, p_z)^T$  等。

**注** 实对称矩阵有许多良好的性质，感兴趣的读者请自行查找线性代数教科书。

**注** 束矩阵除了描述束团整体的二阶矩，也可以扩展为描述束团切片，称切片束矩阵 (slice beam matrix)。参考 C.-Y. Tsai *et al.*, Low-energy high-brightness electron beam dynamics based on slice beam matrix method, Nuclear Instrum. and Methods in Physics Research, A **937** (2019) pp.1-20. <https://doi.org/10.1016/j.nima.2019.05.035> □

用二阶矩描述的束团分布是基于统计学上的定义。想像现在有  $N$  个粒子形成一束团，以连续函数  $f(x, x')$  表征其分布，则一阶矩有

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, x') dx dx' \\ \langle x' \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x' f(x, x') dx dx' \end{aligned} \quad (7.136)$$

二阶矩有

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \langle x^2 \rangle = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 f(x, x') dx dx'} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - \langle x \rangle^2) f(x, x') dx dx'} \\ \sigma_{x'}^2 &= \langle x'^2 \rangle = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x' - \langle x' \rangle)^2 f(x, x') dx dx'} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x'^2 - \langle x' \rangle^2) f(x, x') dx dx'} \\ \sigma_{xx'} &= \langle xx' \rangle = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (xx') f(x, x') dx dx'} \end{aligned} \quad (7.137)$$

其中，归一化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, x') dx dx' = 1 \quad (7.138) \quad \text{注意, } \sigma_x^2 \neq \sigma_{x'}^2.$$

根据统计学意义所定义的束团几何发射度可写成

$$\epsilon \equiv \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle - \langle xx' \rangle^2} = \sqrt{\det \Sigma_{xx'}} \quad (7.139)$$

恰好是子束矩阵的行列式开根号取值。如果现在呈现束团分布的方式为离散的数值相空

间坐标，则一阶矩与二阶矩根据定义，有

$$\begin{aligned}\langle x \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, & \langle x' \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x'_i \\ \langle x^2 \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i^2 - \langle x \rangle^2), & \langle x'^2 \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i'^2 - \langle x' \rangle^2), & \langle xx' \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i x'_i\end{aligned}\quad (7.140)$$

同样，根据统计学意义所定义的束团发射度写成

$$\epsilon^2 = \left( \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle - \langle xx' \rangle^2} \right)^2 = \det \Sigma_{xx'} \quad (7.141)$$

恰好是子束矩阵的行列式值。这里的束矩阵描述的是束团整体，行列式值应视为投影发射度 (projected emittance)。如果束矩阵描述的只是束团一部分 (比如，切片)，则行列式值应视为切片发射度 (slice emittance)。关于投影发射度或切片发射度的更多讨论，可参考 §14.6。

#### 定理 7.10. 高斯束团分布的束矩阵形式

多维、高斯束团分布可以写成如下形式：

$$f(\mathbf{X}) = \frac{N}{(2\pi)^3 \sqrt{\det \Sigma}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{X}^T \Sigma^{-1} \mathbf{X} \right\} \quad (7.142)$$

其中， $N$  为束团粒子个数。

**注** 对于一维情况，有  $\det \Sigma_{2D} = \epsilon^2$ ，其中， $\epsilon$  为束团几何发射度。

**证明** 参考统计学相关教科书。高斯分布有时又称正态分布或常态分布。 □

**练习 7.20** 考虑二维情况，有  $\mathbf{X} = (x, x')^T$ ，代入上面  $f(\mathbf{X})$ ，展开、写成显形式。当  $\sigma_{xx'} = 0$  时，检验是否退化为两个非耦合的高斯分布函数的乘积。 ■

既然有单个粒子的传输过程遵循如下矩阵方程

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \quad (7.143)$$

那么，束矩阵如果视为相空间坐标的一种函数

$$\Sigma = \Sigma(\mathbf{X}) = \langle \mathbf{X} \mathbf{X}^T \rangle \quad (7.144)$$

也能构造束矩阵应遵循的矩阵方程。结果总结为如下定理：

#### 定理 7.11. 束矩阵的传输方程

已知单个粒子矩阵传输方程

$$\mathbf{X}(s_f) = \mathbf{M}(s_i \rightarrow s_f) \mathbf{X}(s_i) \quad (7.145)$$

则有束矩阵的传输方程

$$\Sigma(s_f) = \mathbf{M}(s_i \rightarrow s_f) \Sigma(s_i) \mathbf{M}^T(s_i \rightarrow s_f) \quad (7.146)$$

对横向  $(x, x')$  高斯分布的束团，已知束团的 Courant-Snyder 参数，则有

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \langle x^2 \rangle & \langle xx' \rangle \\ \langle xx' \rangle & \langle x'^2 \rangle \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ -\alpha & \gamma \end{pmatrix} \quad (7.147)$$

其中， $\epsilon = \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle - \langle xx' \rangle^2}$  为束团几何发射度。

**证明** 参考图 7.17，椭圆分布的尺寸  $\langle x^2 \rangle, \langle x'^2 \rangle$ 、倾斜程度  $\langle xx' \rangle$  可以与 Courant-Snyder 参量  $\alpha$  关联。 □

除了 Courant-Snyder 参量，现在有了束矩阵后，我们多了一个能够描述束团相空间分布的工具。图 7.24 给出以 Courant-Snyder 参量与束矩阵参数标注椭圆与两轴  $(x, x')$  的截距，其中

$$\begin{aligned} \sqrt{\Sigma_{11}} &= x_{\max}, & \sqrt{\Sigma_{22}} &= x'_{\max} \\ r_{21} &= \frac{\Sigma_{21}}{\sqrt{\Sigma_{11}\Sigma_{22}}}, & -1 \leq r_{21} &\leq 1 \end{aligned} \quad (7.148)$$

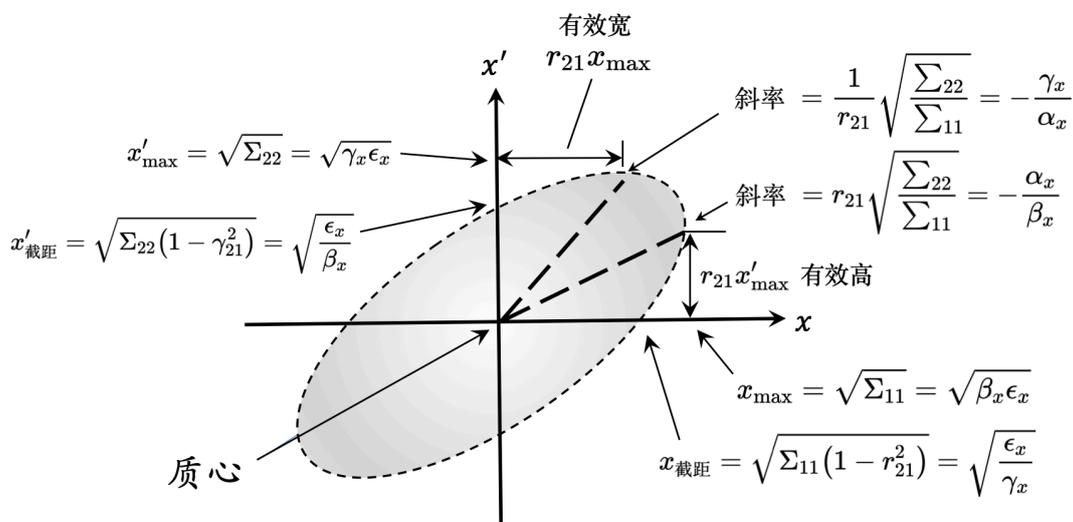


图 7.24: Courant-Snyder 椭圆。图中分别以 Courant-Snyder 参量与束矩阵参数标注椭圆与两轴  $(x, x')$  的截距。

#### 性质 7.4. 束矩阵的一些数学性质

按如上定义的束矩阵  $\Sigma$ ，有

- 对高斯分布束团，束矩阵  $\Sigma$  可 Courant-Snyder 参数化，写成

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \langle x^2 \rangle & \langle xx' \rangle \\ \langle xx' \rangle & \langle x'^2 \rangle \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ -\alpha & \gamma \end{pmatrix} = \epsilon \mathbf{T} \quad (7.149)$$

其中， $\epsilon = \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle - \langle xx' \rangle^2}$  为束团几何发射度， $\mathbf{T}$  称 Twiss 矩阵 (Twiss

matrix)。

- 线性传输方程

$$\Sigma(s_f) = \mathbf{M}(s_i \rightarrow s_f) \Sigma(s_i) \mathbf{M}^T(s_i \rightarrow s_f) \quad (7.150)$$

或

$$\mathbf{T}(s_f) = \mathbf{M}(s_i \rightarrow s_f) \mathbf{T}(s_i) \mathbf{M}^T(s_i \rightarrow s_f) \quad (7.151)$$

- 令基底向量或相空间状态变量为  $\mathbf{u} = [x \ x']^T$ ，则有

$$\mathbf{u}^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mathbf{u} = 1, \quad \text{或} \quad \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{u} = \epsilon \quad (7.152)$$

此式对  $N$  维相空间皆成立。对二维情况，则  $\Sigma, \mathbf{T}$  为  $4 \times 4$  束矩阵， $\mathbf{u}$  为  $4 \times 1$  状态向量。

- 考虑横向  $\mathbf{u} = [x \ x']^T$  情况，有

$$\Sigma_{11}x^2 + 2\Sigma_{22}xx' + \Sigma_{22}x'^2 = \det \Sigma = 1 \quad (7.153)$$

与  $\gamma_x x^2 + 2\alpha_x x x' + \beta_x x'^2 = \epsilon_x$  比较，即 Courant-Snyder 参数化结果。

- 相空间椭圆面积为  $\pi\sqrt{\det \Sigma} = \pi\epsilon_x$

□

**练习 7.21** 考虑最简单的情况：粒子束在真空漂移段的传输。假设一开始粒子处于束腰处，即  $\alpha_x(s_0) = 0, \beta_x(s_0) > 0$ ，证明在下游  $s$  处的束团横向尺寸为

$$\sigma_x(s) = \sigma_x(0) \sqrt{1 + \left(\frac{s}{\beta_x(s_0)}\right)^2}$$

**解** 同时思考一下，为什么在束腰处的横向束团尺寸不是缩到零？是什么原因导致，难道是空间电荷效应？注意，这是似是而非的问题，问题本身就有问题，不要落入陷阱。换成激光束，想想是什么原因导致激光束在束腰处的横向尺寸不为零？

与高斯激光束相比，非常类似，参考图 7.25。

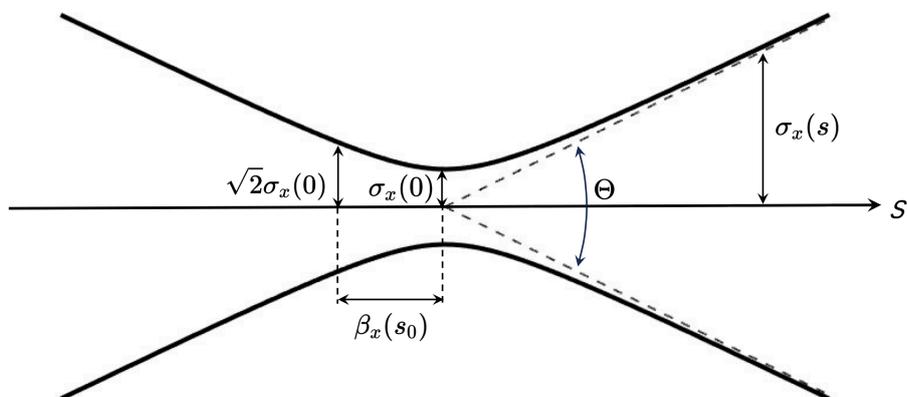


图 7.25: 在束腰附近的电子束。

这一节我们介绍了束团发射度的概念，有几何发射度、归一化发射度，有根据遍历假设，将单粒子发射度 (single-particle emittance) 推广到束团发射度 (beam emittance)，也有从统计学上的定义。这些不同的发射度定义都假设一维，且与其它维度没有耦合的前提下成立。当存在不同维度间的耦合时，应该回到  $4 \times 4$  或  $6 \times 6$  束矩阵，然后束团在子维度的发射度以取对应的行列式值为准。

练习 7.22 试估算电子束的终极发射度。 ■

解 当电荷量越少时，束团发射度越小。因此，极限情况为单电子(束)。根据海森堡测不准原理

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi}$$

于是，有

$$\epsilon_x = \Delta x \Delta x' = \frac{\Delta x \Delta p_x}{\beta_z \gamma m_e c} \geq \frac{1}{4\pi \beta_z \gamma} \frac{h}{m_e c} = \frac{1}{\beta_z \gamma} \frac{\lambda_C}{4\pi} \Rightarrow \epsilon_{nx} \geq \frac{\lambda_{\text{Comp}}}{4\pi} \approx 2.426 \times 10^{-6} \mu\text{m}$$

目前 keV 电子显微镜、fC 电荷量的束团发射度约  $10^{-3} \mu\text{m}$ 。大约还差三个数量级。对电子源的极限发射度感兴趣的读者，可参考 M.B. Callaham, Quantum-mechanical constraints on electron-beam brightness, IEEE J. Quantum Electronics **24**, 10, 1958 (1988). <https://doi.org/10.1109/3.8525> ■

这一节我们介绍了相空间中的一个重要物理量：发射度。虽然我们的讨论局限在带电粒子，但是同样的概念 — 包含相空间的概念与发射度的概念 — 对于不带电的光子也适用。光子的相空间分布又称维格纳分布 (Wigner distribution)，也适合用于分析物质波 (matter wave) 的相空间动力学演化过程。细节此处不论，感兴趣的读者可参考 Amalia Torre, Linear Ray and Wave Optics in Phase Space – Bridging Ray and Wave Optics via the Wigner Phase-Space Picture, Elsevier (2005) 一书。

## 7.6 几种常见的磁聚焦结构单元

类似于光学传输，电子束传输也需要设计磁聚焦结构。电子束在不同磁聚焦结构中的横向  $x, y$  行为不太一样。最简单的磁聚焦结构单元为 FODO 结构，为聚焦 (focusing, F)、漂移 (drift, O)、散焦 (defocusing, D)、漂移 (drift, O) 段组合，如图 7.26 所示。

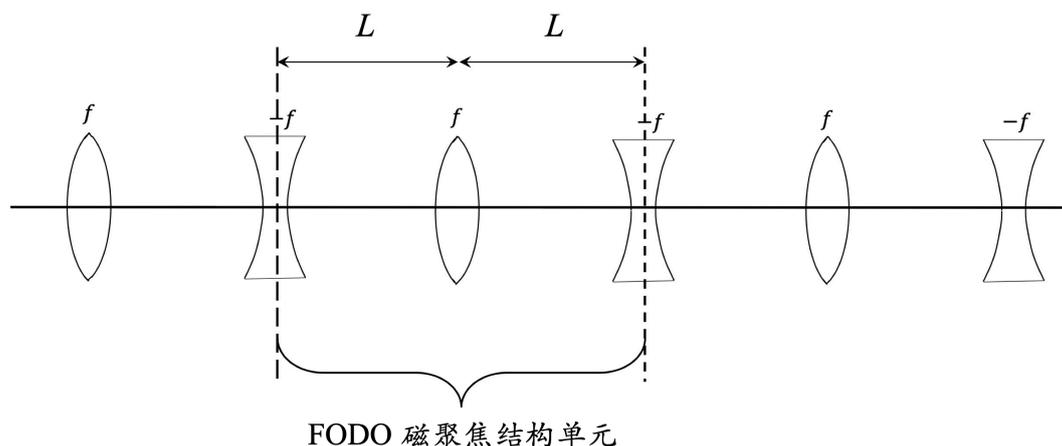


图 7.26: FODO 磁聚焦结构单元 (FODO cell)。

**笔记** 对带电粒子束，图 7.26 只能表征横向一个方向的聚焦/散焦 (如： $x$  方向)，另一个方向 ( $y$  方向) 的聚焦/散焦形态刚好相反，这是由于提供聚焦/散焦的四极铁磁场受制于磁场高斯定律  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  的结果。对激光束，则图 7.26 可以同时表征横向两个方向的聚焦/散焦。这不是说光场不满足磁场高斯定律  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ，而是用来使光场聚焦/散焦的光学部件采用的聚焦/散焦原理与四极铁完全不同。换句话说，图 7.26 显示的凸透镜、凹透镜只是个抽象的符号，并没有体现实际部件的工作原理。

此处不做定量讨论，定性行为可以参考如下动画：

- 单纯漂移段  $\Rightarrow$  <https://toddsatogata.net/2015-USPAS/movies/drift.gif>。参考图 7.27。
- FODO 匹配段，四极铁采用薄透镜模型  $\Rightarrow$  <https://toddsatogata.net/2015-USPAS/movies/fodo1.gif>。参考图 7.28。
- FODO 匹配段，四极铁采用厚透镜模型，且 O 为弯转段 (无薄透镜近似)  $\Rightarrow$  <https://toddsatogata.net/2015-USPAS/movies/fodo1Bend.gif>。参考图 7.29。
- FODO 与束团不匹配，四极铁采用薄透镜模型，O 为真空漂移段 (薄透镜近似)  $\Rightarrow$  <https://toddsatogata.net/2015-USPAS/movies/fodo3.gif>。参考图 7.30。

关于 FODO 结构的讨论，我们将在下面 §7.8 等介绍完具体磁铁部件的传输矩阵之后再回头讨论。除了 FODO 之外，目前较常见的几种磁聚焦结构还有 DBA (double bend

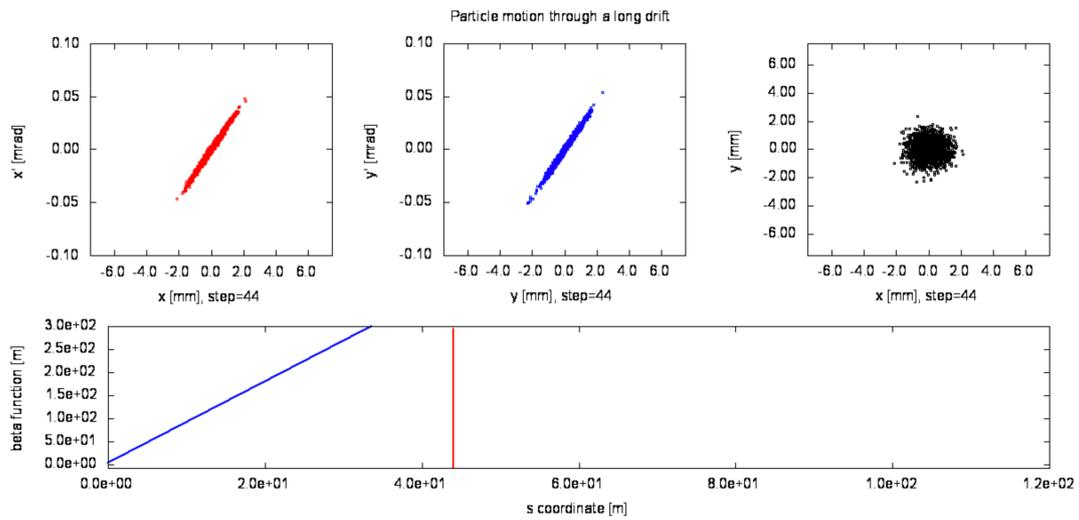


图 7.27: 单纯真空漂移段。假设粒子一开始处于束腰处, 随  $s$  在相空间往  $\pm x$  或  $\pm y$  方向“切应”(shear), 在实空间的  $x, y$  方向均慢慢膨胀。图例取自 Todd Satogata 上课讲义。

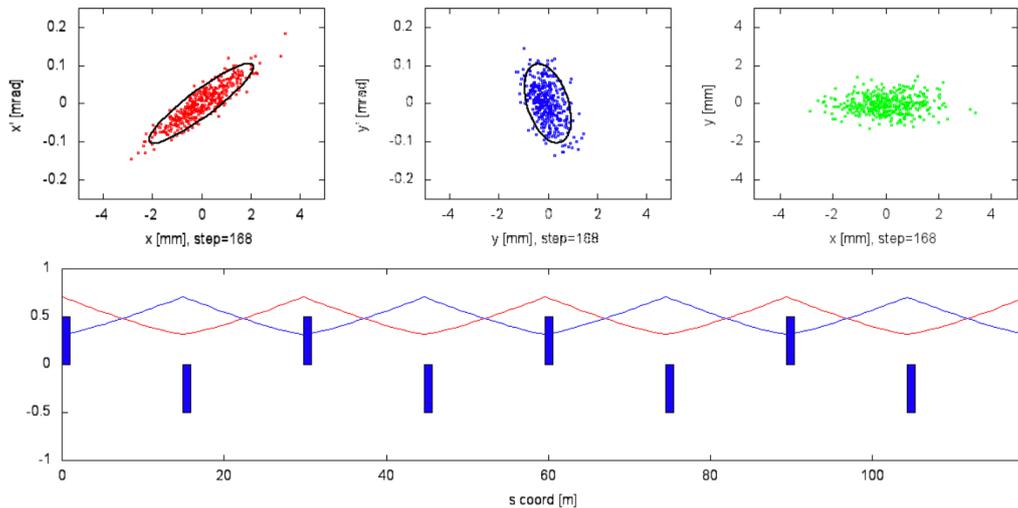


图 7.28: FODO 匹配段, 四极铁采用薄透镜模型, O 为真空漂移段 (薄透镜近似)。上排三幅图由左至右分别为  $x$  相空间、 $y$  相空间、 $x-y$  实空间分布图, 在磁聚焦结构出口处。下排为束团横向  $x$  方向尺寸  $\sigma_x$  与横向  $y$  方向尺寸  $\sigma_y$  沿着  $s$  的演化趋势。下排图中蓝色棒状表示横向聚焦与散焦四极铁。可以看到, 在薄透镜近似的弯转段 O 内, 相空间分布呈现“切应”(shear)。图例取自 Todd Satogata 上课讲义。

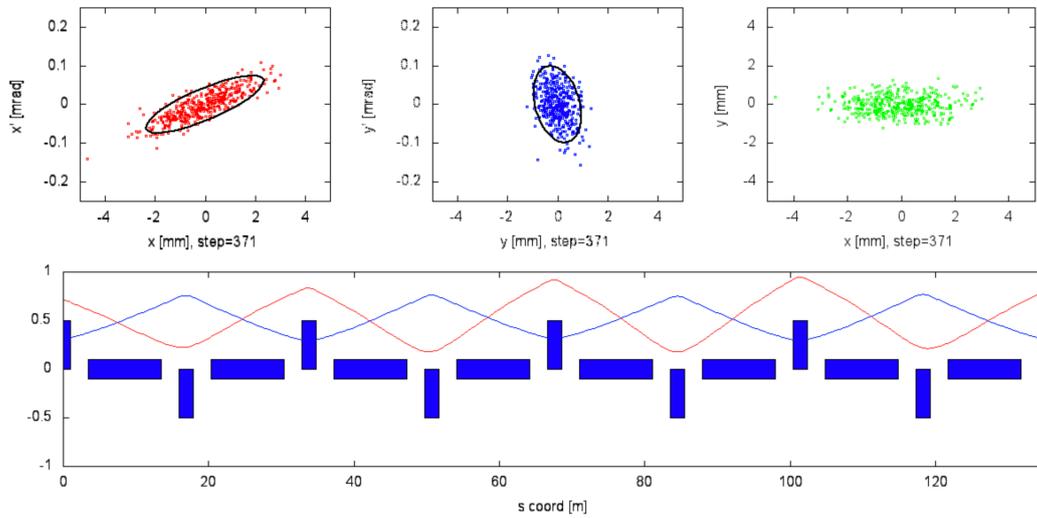


图 7.29: FODO 匹配段, 四极铁采用厚透镜模型, O 为弯转段 (无薄透镜近似)。可以看到, 在弯转段 O 内, 相空间分布呈现“旋转”(rotate)。图例取自 Todd Satogata 上课讲义。

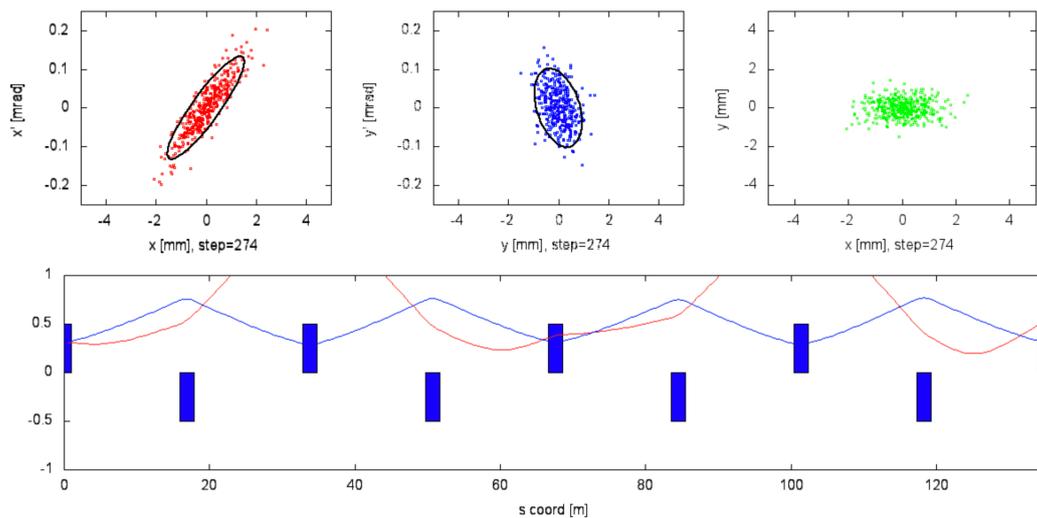


图 7.30: FODO 与束团不匹配, 四极铁采用薄透镜模型, O 为真空漂移段 (薄透镜近似)。图例取自 Todd Satogata 上课讲义。

achromat)、TBA (triple bend achromat)、MBA (multi-bend achromat) 等, 参考图 7.31, 此处细节不论。

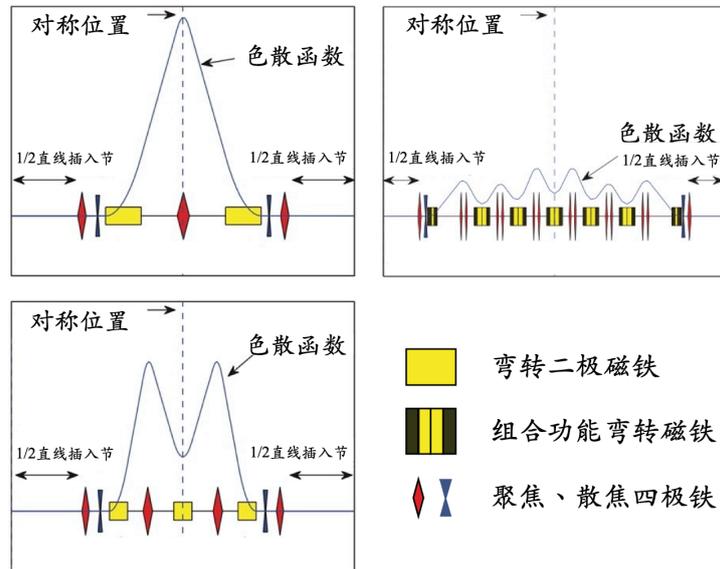


图 7.31: 多弯铁消色散单元节。(左上) 双弯铁消色散 (DBA)、(左下) 三弯铁消色散 (TBA)、(右上) 多弯铁消色散 (MBA)。对右上图, 有  $M = 7$ , 又称七弯铁消色散 (7BA)。黄色为弯转磁铁、红色为聚焦四极铁、蓝色为散焦四极铁。图例修改自 Handbook。

为什么有各种磁聚焦结构? 对电子同步辐射储存环而言, 电子绕行弯转段时发出的同步辐射会回头影响电子束 (第8章将介绍), 有同步辐射阻尼效应与量子激发效应。达到平衡时, 由于不同形态的磁聚焦结构产生的 betatron 振荡各异, 这些同步辐射效应在不同形态的磁聚焦结构也就不同。在电子束匹配情况下, 有些磁聚焦结构能够给出更小的平衡发射度, 也有相应的设计要求。此外, 不同的磁聚焦结构留给储存环的余下的直线段空间不尽相同, 这些直线段可以用来安装插件磁铁以产生“定制”的波荡器或扭摆器辐射。

关于几种常见磁聚焦结构单元节的纵览, 包含许多实用公式, 可参考 J.B. Murphy, Synchrotron light source data book, AIP Conf. Proc. **249**, 1939 (1992). <https://doi.org/10.1063/1.41969>。

## 7.7 非参考粒子的几种效应的分类

尽管前面已经讨论了 Hill 方程的解，提出并利用传输矩阵描述粒子沿着磁场部件或磁聚焦结构时，其相空间坐标 (或称状态变量) 的演变。回忆一下，这些分析都是基于  $\delta = 0$  的哈密顿量

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_x + \mathcal{H}_y = \frac{1}{2}P_x^2 + \frac{x^2}{2\rho_x^2} + \frac{1}{2}\frac{q}{p_0}G(s)x^2 + \frac{1}{2}P_y^2 - \frac{1}{2}\frac{q}{p_0}G(s)y^2 \quad (7.154)$$

为了更有系统地分析非参考粒子的几种效应，我们先定义一个理想、完美的、行为良好的粒子，称参考粒子 (reference particle)。参考粒子走出来的轨迹称参考轨道 (reference orbit)。在此基础上，我们就能量化非参考粒子，并研究与之有关的几种效应。

### 定义 7.23. 参考粒子

定义为

$$x = 0, x' = 0, y = 0, y' = 0, z = 0, \delta = 0 \quad (7.155)$$

其中， $z > 0$  表征位于参考粒子前方的粒子， $z < 0$  表征位于参考粒子后方的粒子。

**注** 由此定义可知，参考粒子经过弯转磁铁会转弯，但是经过四极铁、六极铁等，如同经过漂移段，感受不到这些磁铁部件的影响。事实上，如果不考虑弯转磁铁“转弯”的影响，那么也同漂移段，感受不到这些磁铁部件的影响。参考粒子一般是理想化的设置，在束团中未必存在参考粒子。

**注** 相对于参考粒子的其它粒子则称非参考粒子，或简称粒子。 □

现在，考虑非参考粒子，有如下哈密顿量，

$$\mathcal{H} = -1 - \delta - \delta \frac{x}{\rho_x} + \frac{1}{2}P_x^2 + \frac{x^2}{2\rho_x^2} + \frac{1}{2}\frac{q}{p_0}G(s)x^2 + \frac{1}{2}P_y^2 - \frac{1}{2}\frac{q}{p_0}G(s)y^2 \quad (7.156)$$

其中， $P_x = p_x/p_0$ ,  $P_y = p_y/p_0$ ,  $\delta = \frac{v-p_0}{p_0} \approx \frac{E-E_0}{E_0}$ 。

根据哈密顿运动方程，在  $x$  方向的运动方程可以写为如下二阶微分方程

$$x'' + K_x(s)x = \frac{\delta}{\rho_x(s)} \quad (7.157)$$

其中， $K_x(s) = \frac{e}{p_0}G(s) + \frac{1}{\rho_x^2}$ 。其一般形式 (二阶微分方程) 称为非齐次 Hill 方程 (inhomogeneous Hill equation)。  $y$  方向仍为齐次 Hill 方程。

上面定义的加速器粒子相空间运动方程一般被广泛用在粒子跟踪 (particle tracking) 模拟程序中<sup>30</sup>。在粒子跟踪模拟程序中还可以在运动方程等式右边加上更多复杂的物理效应，此处不论。讨论纯光学以外的效应，如：同步辐射效应、集体效应时，有时也会在运动方程等式右边加上驱动项，将在第8章、第 11 至 13 章介绍。这里想说的是，这些

<sup>30</sup>一般数值计算会将二阶微分方程拆解为等价的两个一阶方程，方便处理。

运动方程虽然在数值模拟程序中应用广泛，但直接求解有时对于束团特性探讨仍包含了过于复杂的效应，需要针对以上方程再化简、分类一下。

为此，以下的讨论将逐步拆解。对参考粒子而言，在加速器磁聚焦结构中走出一完美的、封闭的参考轨迹<sup>31</sup>。但这不是我们感兴趣的，因为实际情况远非如此。以下分别讨论几种情况：

- Case 1** 对  $x \neq 0, x' \neq 0, y = 0, y' = 0, z = 0, \delta = 0$  的非参考粒子。不考虑  $x$ - $y$  耦合情况下，此时，非参考粒子有 Hill 方程  $x'' + K_x(s)x = 0$ 。这个讨论涉及线性 betatron 运动 (linear betatron motion)。前面 §7.2 至 §7.4 节讨论的内容属于此分类。从此类讨论，以下我们将得到几个常见磁聚焦结构部件的线性传输矩阵、磁聚焦结构稳定性条件、描述束团经过磁聚焦结构的参数化表示、不变量、描述束团整体特性的束矩阵等。
- Case 2** 对参考粒子而言， $x = 0, x' = 0, y = 0, y' = 0, z = 0, \delta = 0$ ，即使初始粒子“完美地”落在相空间的中心原点，当磁聚焦结构存在系统误差时，是否仍然能够在加速器磁聚焦结构中走出一虽不完美的、但仍封闭的参考轨迹？或者，在什么情况下，参考轨迹将不再稳定/有界？这个讨论涉及闭轨畸变 (closed orbit distortion, COD)、共振 (resonance) 等。
- Case 3** 对  $x \neq 0, x' \neq 0, y = 0, y' = 0, z = 0, \delta \neq 0$  的非参考粒子相对于上述 Case 2 “参考粒子”在不完美的磁聚焦结构的情况。此处相对于参考粒子的轨道可以是叠加在完美的、封闭的参考轨迹，也可以是虽不完美的、但仍封闭的参考轨迹。这个讨论涉及色散 (dispersion)、色品 (chromaticity) 等概念。

根据上面三个分类涉及的许多概念，以下分而治之，各个击破。

传输矩阵、闭轨、共振、色散、色品... ⇒ 分而治之



**笔记** 有些工程背景的读者可能纳闷，为什么大费周章拆解看似寻常的二阶微分方程 Hill 方程，而不直接按照实际情况，将参数代入方程后直接求解不就得了？于是，有些工程背景的人们就感到不解，觉得下面啰嗦那么多，只是在搞理论。其实正好相反，下面拆解问题的思路正是基于工程思维的结果。如果 case by case 求解，那么每次遇到一组参数就要解一次方程，对方程本身无法获得一般的、普适的物理图像。虽然以下拆解看似繁琐，但其实是基于希望考虑一般情况为前提做的分类，希望从 Hill 方程中萃取图像，为工程设计提供指导，而不只是 case by case 求解。

<sup>31</sup>对参考粒子而言，哪怕  $x = x' = y = y' = z = \delta = 0$ ，由磁刚度决定弯转，对储存环要求必须满足封闭性绕行  $360^\circ$  或  $2\pi$  弧度外，原则上感受不到弯转磁铁以外的场。但是，还是要避免可能产生的共振，以下 Case 2 会介绍。敏锐的读者可能能想像，满足封闭性未必要求  $360^\circ$  或  $2\pi$  弧度，其整数倍也成立。

## 7.8 传输矩阵 — Case 1

这一节主要考虑  $x \neq 0, x' \neq 0, y = 0, y' = 0, z = 0, \delta = 0$  的非参考粒子。

线性传输矩阵 (transfer matrix) 的可行性在 §7.4 节讨论过了, 当时我们讨论的是一般情况, 即没有讨论  $K(s)$  的具体形式。以下我们将就 §7.1 节介绍的几种常见的线性传输部件, 构造专属于那些磁场部件的传输矩阵。

传输矩阵在分析粒子的线性动力学行为时很方便、有用, 因为传输矩阵与电子束状态参数无关, 仅由部件本身参数决定。利用这个事实, 我们可以对束团分布参数沿着  $s$  的演化通过线性传输矩阵表征。如此一来就不需要对逐个粒子跟踪模拟, 可以大大减少计算时间。能够这么做的前提是传输过程必须是“线性”的。此处“线性”包含两个层面:

1. 传输部件  $\mathbf{M}$  是线性元件, 如: 真空漂移段、二极铁、四极铁、螺线管等;
2. 粒子束团的相空间分布可用二阶矩  $\Sigma$  描述。



**笔记** 将在第 14 章介绍束矩阵 (beam matrix) 概念与切片束矩阵 (slice beam matrix)。

### 定理 7.12. 几种常见部件的传输矩阵

以下以  $[x \ x']^T$  为横向相空间基底向量。对于真空漂移段 (free-space drift space), 横向  $2 \times 2$  线性传输矩阵有

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.158)$$

其中,  $\ell$  为漂移段长度。

对于扇形二极铁 (sector dipole)<sup>a</sup>, 横向  $2 \times 2$  线性传输矩阵有

$$\mathbf{M}_x = \begin{pmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta \\ -\frac{1}{\rho} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (7.159)$$

其中,  $\rho > 0$  为弯转半径,  $\theta$  为弯转角度。磁铁弧形长度为  $\rho\theta$ 。由此矩阵的 (2,1) 元素可以看出, 扇形二极铁贡献微弱的横向聚焦。

对于  $x$  方向聚焦 (则  $y$  方向散焦) 四极铁 (focusing quadrupole), 有  $K > 0$ , 则  $x$  方向  $2 \times 2$  线性传输矩阵有

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \frac{1}{\sqrt{|K|}} \sin \phi \\ -\sqrt{|K|} \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (7.160)$$

其中,  $\phi = \sqrt{|K|}\ell$ ,  $\ell$  为磁铁长度。

对于  $x$  方向散焦 (则  $y$  方向聚焦) 四极铁 (defocusing quadrupole), 有  $K < 0$ , 则  $x$  方向  $2 \times 2$  线性传输矩阵有

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cosh \phi & \frac{1}{\sqrt{|K|}} \sinh \phi \\ \sqrt{|K|} \sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix} \quad (7.161)$$

对于矩形二极铁 (rectangular dipole), 边缘场有类似四极铁的聚焦/散焦效果。  $x$  方向  $2 \times 2$  线性传输矩阵有

$$\tilde{\mathbf{M}}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\rho} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta \\ -\frac{1}{\rho} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\rho} & 1 \end{pmatrix} \quad (7.162)$$

其中,  $\rho > 0$  为弯转半径,  $\theta$  为矩形二极铁的弯转角度。边缘场的等效传输矩阵的推导参考下面图 7.32。

类似地,  $y$  方向  $2 \times 2$  线性传输矩阵有

$$\tilde{\mathbf{M}}_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\rho} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\rho} & 1 \end{pmatrix} \quad (7.163)$$

#### 性质 7.5.

上面给出的传输矩阵, 其行列式值皆为 1, 即  $\det \mathbf{M} = 1$ 。表征利用这些矩阵描述传输过程时, 相空间面积不变。此结果与上列传输矩阵为 辛矩阵 有关。后面将说明。 □

**注** 以上给出几种常见磁铁部件的横向  $2 \times 2$  线性传输矩阵。下一章介绍粒子的纵向动力学后, 将结合横向与纵向维度, 给出常见磁铁部件的  $6 \times 6$  线性传输矩阵, 参考 §8.6。

“粒子进入与离开扇形二极铁时, 假设参考粒子的轨迹与磁铁横向极面垂直。” □

**练习 7.23** 试证明上面几种部件的传输矩阵。 ■

**笔记** 对矩形二极铁, 可以看成是  $\theta$  扇形二极铁与  $\frac{\theta}{2}$  楔形 (wedge) 磁铁的组合, 如图 7.32。相对于参考粒子弯转轨迹, 在矩形二极铁中, 相比扇形二极铁, 外侧粒子感受到一些相对“缺失”的磁场, 因此, 在完整的弯转过程中比起参考粒子少了些弯转 (“转不够”); 内侧粒子则感受到一些相对“多余”的磁场, 因此, 在弯转过程中比起参考粒子多了些弯转 (“转过头”)。因此, 净效应是横向  $x$  方向的净效应为散焦四极铁,  $y$  方向为聚焦四极铁。参考

图 7.32, 量化描述如下:

令  $\delta = \frac{\theta}{2}$  为边缘场覆盖的角度范围

则边缘场导致粒子偏转  $\alpha = \Delta x' \approx (Kx)\Delta\ell = \frac{Gx}{B\rho}\Delta\ell = \frac{\frac{\partial B_y}{\partial x}x}{B\rho}\Delta\ell \approx \frac{B_y\Delta\ell}{B\rho} = \frac{x}{f}$

其中  $\Delta\ell = x \tan \delta$

因此, 有  $\frac{1}{f} = \frac{\tan \delta}{\rho}$

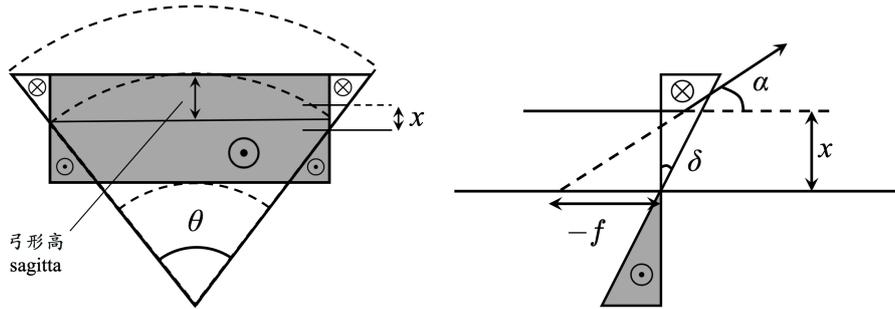


图 7.32: 矩形二极铁的边缘场效应。

**注** 这里顺道介绍, 参考图 7.32, 弧弦间的最大距离称弓形高 (sagitta)。

**练习 7.24** 验证一下, 仅有  $\mathbf{B} = \mathbf{e}_y B_0$  无法满足 Maxwell 方程组。 ■

**解** 要求存在非零纵向磁场  $B_s$ 。以上讨论矩形二极铁的边缘场效应采用的思路是分析“缺失”与“多余”磁场的效应。也可以采用类似于螺线管端部磁场的分析思路, 先假设二极铁内部磁场为均匀磁场  $\mathbf{B} = \mathbf{e}_y B_0$ , 再设法得到满足 Maxwell 方程组的前提下, 在端部的非零纵向磁场  $B_s \propto y\delta(s)$ 。因此, 在入口处  $s = 0$  附近有完整磁场  $\mathbf{B}(s) \approx \mathbf{e}_y B_0 H(s) + \mathbf{e}_s y B_0 \delta(s)$ 。留意, 因为仅考虑在端部附近的效应, 可近似使用直角坐标系, 省去 Frenet-Serret 坐标系较复杂的向量运算。这里的近似符号与前面 §7.1.5 介绍时一样, 数学上严格满足 Maxwell 方程组的解需要继续往下迭代添加修正项才行。 ■

有时候, 这些磁铁部件可以视为薄透镜近似 (thin lens approximation), 则各个部件的传输矩阵可以进一步简化, 整理如下:

#### 定理 7.13. 几种常见部件的传输矩阵 — 薄透镜近似

以下以  $[x \ x']^T$  为横向相空间基底向量。对于真空漂移段 (free-space drift space), 横向  $2 \times 2$  线性传输矩阵有

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.164)$$

其中,  $\ell$  为漂移段长度。

对于扇形二极铁 (sector dipole), 当磁铁弧形长度为  $\rho\theta \ll 1$  时, 横向  $2 \times 2$  线性传输矩阵有

$$\mathbf{M}_x = \begin{pmatrix} 1 & \rho\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.165)$$

对于  $x$  方向聚焦 (则  $y$  方向散焦) 四极铁 (focusing quadrupole), 有  $K > 0$ , 则  $x$  方向薄透镜近似的  $2 \times 2$  线性传输矩阵有

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -|K|\ell & 1 \end{pmatrix} \quad (7.166)$$

其中,  $K = \frac{qc}{E} \frac{\partial B_y}{\partial x}$ ,  $\ell$  为磁铁长度。这里的  $-|K|\ell = -1/f_F$  可用焦距  $f_F$  表示, 负号表示在该方向聚焦。

对于  $x$  方向散焦 (则  $y$  方向聚焦) 四极铁 (defocusing quadrupole), 有  $K < 0$ , 则  $x$  方向薄透镜近似的  $2 \times 2$  线性传输矩阵有

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ |K|\ell & 1 \end{pmatrix} \quad (7.167)$$

这里的  $|K|\ell = +1/f_D$  可用焦距  $f_D$  表示, 正号表示在该方向散焦。

对于矩形二极铁 (rectangular dipole), 边缘场有类似四极铁的聚焦/散焦效果。  $x$  方向薄透镜近似的  $2 \times 2$  线性传输矩阵有

$$\tilde{\mathbf{M}}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\rho} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\rho} & 1 \end{pmatrix} \quad (7.168)$$

类似地,  $y$  方向薄透镜近似的  $2 \times 2$  线性传输矩阵有

$$\tilde{\mathbf{M}}_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\rho} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\rho} & 1 \end{pmatrix} \quad (7.169)$$

#### 性质 7.6.

上面给出传输矩阵, 其行列式值皆为 1,  $\det \mathbf{M} = 1$ 。表征利用这些矩阵描述传输过程时, 相空间面积不变。此结果与上列传输矩阵仍为辛矩阵有关。后面将说明。



**笔记** 在薄透镜近似下, 忽略边缘场, 则二极铁可视为长度  $\ell = \rho\theta$  的真空漂移段。



**笔记** 四极铁尽管薄, 但是仍有厚度, 为什么不写成以下形式?

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ -|K|\ell & 1 \end{pmatrix} \quad (7.170)$$

其中,  $\ell$  为磁铁长度 (厚度)。这么写的好处是, 计算在四极铁出口的  $x, x'$  时可以把厚度

导致的贡献考虑进去，同时  $x'$  的效应也在。看似一举两得？ $\Rightarrow$  如果这么写，那么它的特征值就不再是 1，即  $\det \mathbf{M} \neq 1$ 。这就表示粒子束团经过这个部件后，其一维相空间面积不再为守恒量。换句话说，这个结果不满足作为哈密顿系统的“保辛”特性（下面将介绍）。因此，虽然看起来符合直觉，也包含了厚度效应，但其实因小失大，失去宝贵的“辛”特性。不值！

上面两个定理给出了常见部件的线性传输矩阵，通过将粒子的横向相空间坐标乘上传输矩阵，得到新的横向相空间坐标即表征粒子经过该电磁部件后，在出口处的相空间坐标。上面给出的是不同部件的矩阵形式，下面图 7.33 给出粒子横向相空间坐标经过各个部件前与后的改变。其中，真空漂移段或在  $xs$  面上弯转的薄透镜二极铁对粒子横向相空间坐标的改变为  $x$  的切应 (shear) 效应；薄透镜四极铁对粒子横向相空间坐标的改变为  $x'$  的切应 (shear) 效应。如果考虑有限厚度的二极铁或四极铁，则其同时存在  $x, x'$  方向的影响，从相空间看来就像旋转 (rotate)。读者可自行验证相空间坐标改变图像与传输矩阵的描述一致。

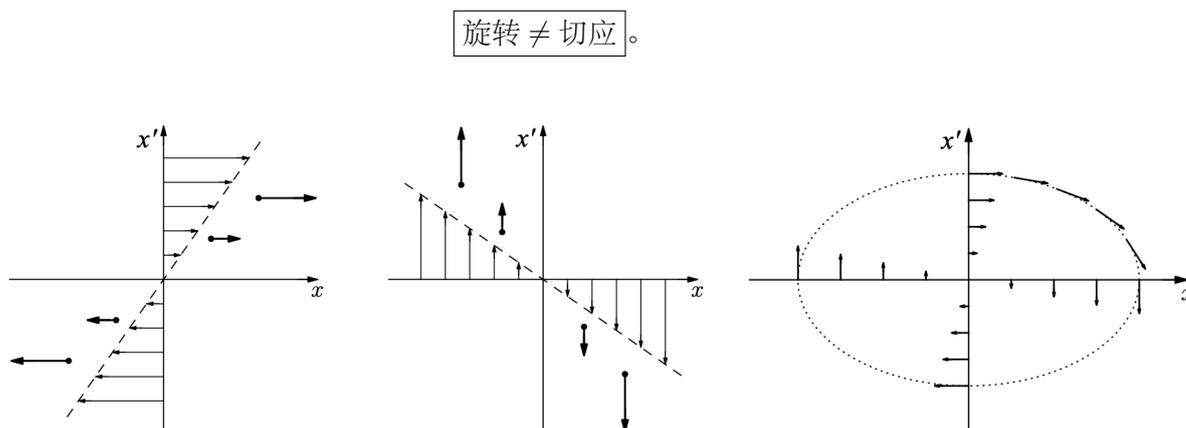


图 7.33: 不同部件对粒子横向相空间坐标的改变，箭头方向表示相空间坐标从部件入口至出口的演化过程。左图：真空漂移段或薄透镜二极铁；中图：薄透镜四极铁；右图：有限厚度的二极铁或四极铁。

回顾一下，这一节到目前为止我们讨论了  $x \neq 0, x' \neq 0, y = 0, y' = 0, z = 0, \delta = 0$  的非参考粒子的横向运动，得到几种常见部件的一维  $(x, x')$  传输矩阵。对  $x = 0, x' = 0, y \neq 0, y' \neq 0, z = 0, \delta = 0$  的非参考粒子，同样可以用二维传输矩阵描述。对真空漂移段，粒子在  $x, y$  方向都是漂移段；对二极铁，粒子不在弯转平面的话，可以视为漂移段；对四极铁，只需要将  $(x, x')$  改为  $(y, y')$ ， $\cos \rightarrow \cosh, \sin \rightarrow \sinh$ ，留意四极铁的聚焦散焦要颠倒，且边缘场应小心处理。包含横向二维  $(x, x', y, y')$  与纵向一维  $(z, \delta)$  的常见磁铁部件六维线性传输矩阵将在下一章介绍完纵向动力学后在 §8.6 给出。

#### 定律 7.1. 磁聚焦结构设计的基本概念

按线性传输矩阵理论，磁聚焦结构基本上为依序组成的磁铁元件。每个磁铁元件

有各自的传输矩阵，整体传输行为可以通过依序将各自的传输矩阵相乘得到

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \mathbf{M}_n \dots \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \quad (7.171)$$

其中，矩阵相乘的次序与粒子经过传输部件的次序一致。 □

#### 定理 7.14. 线性 $2 \times 2$ 矩阵稳定性条件

考虑单圈或周期情况下的线性  $2 \times 2$  传输矩阵  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \quad (7.172)$$

则经历  $N$  圈或  $N$  个周期后，如果一系统稳定，则充分且必要条件为

$$\mathbf{M}^N \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \quad (7.173)$$

仍保持有限(有界)。

可以证明，当

$$|\text{Trace}(\mathbf{M})| \leq 2 \quad (7.174)$$

成立时，则系统稳定；反正亦然。

**证明** 思路：先找到矩阵  $\mathbf{M}$  的特征基底与特征值。当任何初始向量以特征基底展开时，则  $\mathbf{M}^N$  操作在初始向量的结果转变成对  $\mathbf{M}$  的特征值的对应操作。

已知  $\mathbf{M}$  的行列式值为 1，假设其特征基底向量为  $V_{1,2}$ ，则

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\text{in}} = aV_1 + bV_2$$

经过  $N$  周期之后，为

$$\mathbf{M}^N \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\text{in}} = a\lambda_1^N V_1 + b\lambda_2^N V_2$$

其中， $\lambda_{1,2}$  为特征值。现在，考虑一特征基底向量  $A = V_1$  或  $V_2$ ，

$$\mathbf{M}A = \lambda A \Rightarrow \det(\mathbf{M} - \lambda I) = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda \cdot \text{Trace}(\mathbf{M}) + \det(\mathbf{M}) = 0$$

$$\text{Trace}(\mathbf{M}) = \sum_i \lambda_i, \quad \det(\mathbf{M}) = \prod_i \lambda_i$$

由上可知， $\lambda_1 \lambda_2 = 1, |\lambda| = 1$ ，不失一般性，可以将特征值写为

$$\lambda_1 = e^{i\mu}, \quad \lambda_2 = e^{-i\mu}$$

代回 Trace, 有

$$\text{Trace}(\mathbf{M}) = \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \cos \mu \quad \Rightarrow \quad -1 \leq \frac{1}{2} \text{Trace}(\mathbf{M}) \leq 1$$

**注** 以上结果对二维 ( $4 \times 4$  矩阵)、三维 ( $6 \times 6$  矩阵) 未必成立<sup>a</sup>。

“未必成立”的意思是, 如果对二维、三维传输矩阵满足  $|\text{Trace}(\mathbf{M})| \leq 2$  并不能说明它是稳定的。反过来说, 如果二维、三维传输矩阵稳定, 也不能保证有  $|\text{Trace}(\mathbf{M})| \leq 2$  结论。 □

上面证明中, 有一句“已知  $\mathbf{M}$  的行列式值为 1”, 此条件涉及到哈密顿力学系统的一个 **基本 (fundamental)** 关系。一动力学系统如果可以用哈密顿量描述, 则此系统保辛 (symplectic)。对上面介绍的传输矩阵, 保辛条件的数学形式由如下定义给出。

#### 定义 7.24. 传输矩阵保辛条件 (symplectic condition)

对一  $2n \times 2n$  传输矩阵  $\mathbf{M}$ , 如果此矩阵为保辛 (symplectic), 则满足以下条件 (反之亦然)

$$\mathbf{M}^T \mathbf{S} \mathbf{M} = \mathbf{S} \quad (7.175)$$

其中,  $\mathbf{S}$  称辛矩阵<sup>a</sup>, 对一维 ( $n = 1$ ) 情况,  $2 \times 2$  辛矩阵为

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.176)$$

其行列式值为 1。对高维 ( $n > 1$ ) 情况, 以上  $\mathbf{S}$  将作为分块矩阵填充在主对角线上。如: 对三维 ( $n = 3$ ) 情况,  $6 \times 6$  辛矩阵为

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.177)$$

**注** 对一维 ( $n = 1$ ) 情况, 辛条件等价于  $\det \mathbf{M} = 1$ 。

**证明** 参考 Gennady Stupakov and Gregory Penn, Classical Mechanics and Electromagnetism in Accelerator Physics, Springer (2018) 的 §3.3 与 §3.4。

**注** 对加速器束动力学的辛特性的更多讨论, 可参考 J.R. Rees, Symplecticity in Beam Dynamics: An Introduction, SLAC-PUB-9939 (2003). <https://www.slac.stanford.edu/pubs/slacpubs/9750/slac-pub-9939.pdf>

<sup>a</sup>不要与坡印廷向量符号搞混。 □

由上可知, 对一维  $2 \times 2$  传输矩阵  $\mathbf{M}$ , 证明稳定性满足  $|\text{Trace}(\mathbf{M})| \leq 2$  结果的过程

中, 用了  $\det(\mathbf{M}) = \prod_i \lambda_i = \lambda_1 \lambda_2 = 1$ , 隐含着限定了辛矩阵在一维 ( $n = 1$  或  $2 \times 2$ ) 情况。这也是为什么说  $|\text{Trace}(\mathbf{M})| \leq 2$  的结论对二维 ( $n = 2$  或  $4 \times 4$ ) 或三维 ( $n = 3$  或  $6 \times 6$ ) 未必成立。

**注** 一个特例值得注意: 螺线管。螺线管传输矩阵可以拆解为本体场 (body field) 与边缘场 (end field), 其中, 单单本体部分的传输矩阵非保辛, 尽管它的行列式值为 1。

上面讨论了一维  $2 \times 2$  线性传输矩阵  $\mathbf{M}$  的稳定性条件。对二维、三维或更高维, 知道  $|\text{Trace}(\mathbf{M})| \leq 2$  的结论不再成立, 那怎么判断高维情况稳定性? 按定义, 对高维 ( $2n \times 2n, n > 1$ ) 情况, 系统稳定即表示  $\mathbf{M}_{2n \times 2n}$  不发散, 即要求所有高维矩阵的特征值  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, 2n$  的绝对值均为 1。明显地, 此条件不再像一维情况, 能够在不求矩阵特征值情况下, 直接根据矩阵的迹 (trace)  $|\text{Trace}(\mathbf{M})| \leq 2$  就能判断。

**注** 对二维 ( $n = 2$  或  $4 \times 4$ ) 情况, 包含横向  $xy$  耦合线性传输, 传输矩阵的稳定性条件, 可参考 Mario Conte and William M. MacKay, *An Introduction to the Physics of Particle Accelerators*, 2nd ed., World Scientific (2008) 的 §6.8、§6.9。



**笔记** 这里提到了几次辛矩阵与保辛条件。“辛”(symplecticity) 的概念是什么? 感觉好抽象? 确实不是三言两语能说干净。忽略细节与术语, 一动力系统演化过程保辛意味着保持动力学系统在演化过程其哈密顿量的内秉特性。因此, 如果属于人为的分析部分能够确保不破坏其辛条件, 即保辛, 则属于系统该固有的、本质的特性就能保持着, 不会因为人为分析过程意外丢失或添加。这里的人为分析既包含理论模型的构建/变换, 也包含数值计算。传输矩阵为辛矩阵的一个特性是, 该传输矩阵的稳定性条件可与其特征值直接关联。

### 性质 7.7. FODO 插件单元

FODO 插件单元由聚焦四极铁 (F)、真空漂移段 (O, 或二极铁)、散焦四极铁 (D)、真空漂移段 (O, 或二极铁) 组成。考虑如图 7.34, 假设

- 单元节长度为  $\ell$
- 薄透镜近似, 因此, 两段真空漂移段各为  $\ell/2$ , 两个四极铁无厚度
- 四极铁的聚焦与散焦强度相等, 写为  $f$ , 这里  $f$  只考虑强度, 聚焦与散焦的符号分别由负号与正号表示

则单元传输矩阵可以写成

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\text{FODO}} &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{\ell}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\ell}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{\ell}{2f} - \frac{\ell^2}{4f^2} & \ell + \frac{\ell^2}{4f} \\ -\frac{\ell}{2f^2} & 1 + \frac{\ell}{2f} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.178)$$

磁聚焦结构单元节 (FODO cell) 的特性可以通过将上面矩阵与 Courant-Snyder 矩阵的一般形式对比得到, 即

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{\ell}{2f} - \frac{\ell^2}{4f^2} & \ell + \frac{\ell^2}{4f} \\ -\frac{\ell}{2f^2} & 1 + \frac{\ell}{2f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi + \alpha \sin \psi & \beta \sin \psi \\ -\gamma \sin \psi & \cos \psi - \alpha \sin \psi \end{pmatrix} \quad (7.179)$$

则由 trace 可以反推得相位超前

$$1 - \frac{\ell^2}{8f^2} = \cos \psi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\psi}{2} \Rightarrow \sin \frac{\psi}{2} = \pm \frac{\ell}{4f} \quad (7.180)$$

知道一个单元节的相位超前, 如果一储存环或直线加速器由  $N_c$  个单元节构成, 则整个环或直线加速器的 betatron tune 有

$$\nu_{x,y} = N_c \frac{\psi_{x,y}}{2\pi} \quad (7.181)$$

注 以上分析适用于  $x$  或  $y$  方向。

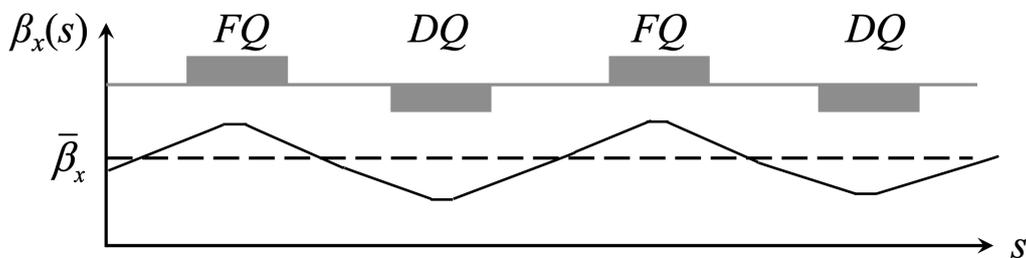


图 7.34: FODO 磁聚焦结构, 依序由聚焦四极铁 (focusing quad, FQ)、真空漂移段 (或二极铁)、散焦四极铁 (defocusing quad, DQ)、真空漂移段 (或二极铁) 组成。这里的  $\bar{\beta}_x = \frac{\beta_{\max} + \beta_{\min}}{2}$ 。

练习 7.25 FODO 磁聚焦结构的  $\beta_x(s)$  如图 7.34 所示, 从比较传输矩阵与 Courant-Snyder 矩阵, 可以得到  $\beta_x(s)$  的最大值与最小值。 ■

解

$$\begin{aligned} \beta_{\max} &= \frac{\ell}{\sin \psi} \left( 1 + \sin \frac{\psi}{2} \right) = 2f \sqrt{\frac{1 + \sin \frac{\psi}{2}}{1 - \sin \frac{\psi}{2}}} \\ \beta_{\min} &= \frac{\ell}{\sin \psi} \left( 1 - \sin \frac{\psi}{2} \right) = 2f \sqrt{\frac{1 - \sin \frac{\psi}{2}}{1 + \sin \frac{\psi}{2}}} \end{aligned} \quad (7.182)$$

其中,  $\psi = \pm 2 \sin^{-1}(\ell/4f)$ 。 ■

FODO 单元节的光学稳定性可以通过分析其 trace 得到, 即 betatron 相位超前  $\psi$ , 对于不同的四极铁强度, 单元节可能稳定或者不稳定。这里我们允许聚焦与散焦四极铁的

强度可以不同，令  $-\frac{\ell}{2f_F} = -F$ ,  $\frac{\ell}{2f_D} = D$ , FODO 的整体传输矩阵可以改写成

$$\mathbf{M}_{\text{FODO}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\ell}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2D}{\ell} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\ell}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2F}{\ell} & 1 \end{pmatrix} \quad (7.183)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + D - 2F - DF & \frac{\ell}{2}(2 + D) \\ -\frac{2[D(-1+F)+F]}{\ell} & 1 + D \end{pmatrix} \quad (7.184)$$

稳定性条件要求  $|\text{Trace}(\mathbf{M})| = 2|\cos \Phi| \leq 2$ , 有

$$\cos \Phi = 1 + D - F - \frac{FD}{2} \quad (7.185)$$

或利用半角公式  $\cos \Phi = 1 - 2\sin^2 \frac{\Phi}{2}$

$$\sin^2 \frac{\Phi}{2} = \frac{FD}{4} + \frac{F - D}{2} \quad (7.186)$$

稳定边界发生在  $\sin^2 \frac{\Phi}{2} = 0$  或 1 之间，因此有如下图 7.35 的“领结”状稳定区域。

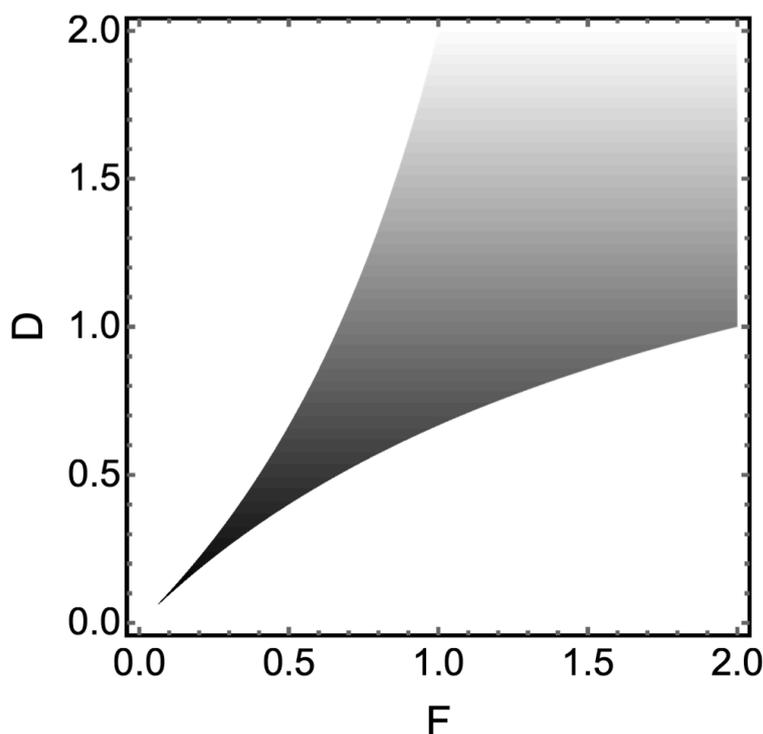


图 7.35: FODO 磁聚焦结构的“领结”(necktie) 图，阴影部分为稳定区域。

回到图 7.34，图中画的是  $\beta_x(s)$ ，为包络函数。单粒子在 FODO 磁聚焦结构中的样貌大致如图 7.36 所示。

🔴 **练习 7.26** 作为练习，对上面介绍的 FODO 插件单元，按类似分析，考虑双弯铁消色散 (double bend achromat, DBA) 单元，求解相关物理量。 ■

🔴 **练习 7.27** 作为练习，对上面介绍的 FODO 插件单元，按类似分析，考虑三弯铁消色散 (triple bend achromat, TBA) 单元，求解相关物理量。 ■

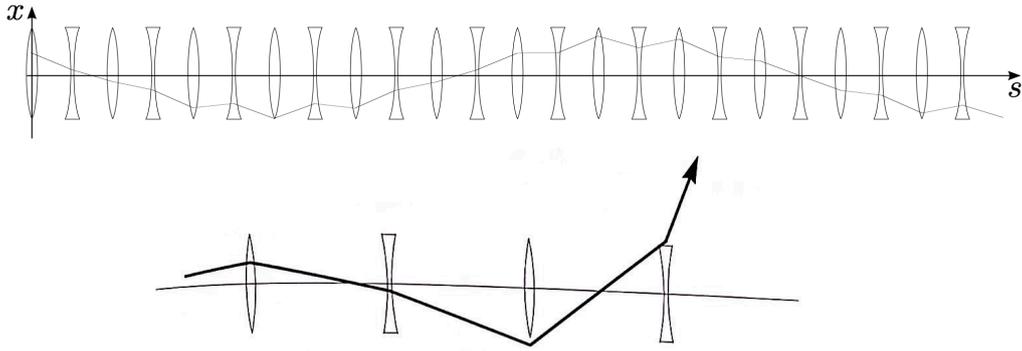


图 7.36: 上排为满足光学稳定性的单粒子轨迹，下排为不稳定区域的轨迹  $\Rightarrow$  欲速则不达。

 **笔记** 在描述四极铁聚焦、散焦时，有时候用焦距  $f$ ，有时候用强度  $K$ ，有时候则另外定义强度系数  $F, D$ ，下面讨论涉及聚焦强度误差  $k$  等。此处一并整理其间的关系：

$$K_x \ell = \frac{1}{f_x} = \frac{1}{f_F} \quad (K_x > 0) \quad \text{假设 } x \text{ 方向聚焦}$$

$$|K_y| \ell = |-K_x| \ell = \frac{1}{f_y} = \frac{1}{f_D}$$

$$K_x(s) = \frac{G(s)}{B\rho}, \quad G(s) = \frac{\partial B_y(s)}{\partial x}$$

$$-\frac{\ell}{2f_F} = -F, \quad \frac{\ell}{2f_D} = D$$

## 7.9 闭轨畸变、共振 — Case 2

这一节主要考虑  $x = 0, x' = 0, y = 0, y' = 0, z = 0, \delta = 0$  参考粒子，但磁聚焦结构存在系统误差的情况。

即使初始为参考粒子，“完美地”落在了相空间的原点中心，当磁聚焦结构存在系统误差时，此参考粒子变得不再完美，横向运动也会出现 betatron 振荡。这个不完美的参考粒子是否能在加速器磁聚焦结构中走出一虽不完美的、但仍封闭的参考轨迹？或者，在什么情况下，参考轨迹将不再稳定/有界？

分析仍然采用 Courant-Snyder 理论，当参考粒子沿着磁聚焦结构周期绕行，如果轨迹封闭，则将回到相空间原处（未必是相空间中心，但是会回到初始相空间位置）。与此相关的概念有闭轨畸变 (closed orbit distortion, COD)、共振 (resonance)。

### 定义 7.25. 闭轨畸变 (closed orbit distortion, COD)

对参考粒子而言， $x = 0, x' = 0, y = 0, y' = 0, z = 0, \delta = 0$ ，当磁聚焦结构存在系统误差时，如果仍然能够在加速器磁聚焦结构中走出一虽不完美的、但仍封闭的参考轨迹，则称此轨迹为封闭轨迹 (closed orbit)，又称黄金轨迹 (golden orbit)。此时的参考粒子称同步粒子 (synchronous particle)。

**注** 闭轨畸变几乎不可避免，且将使加速器中的真空管道横向有效截面积变小。 □

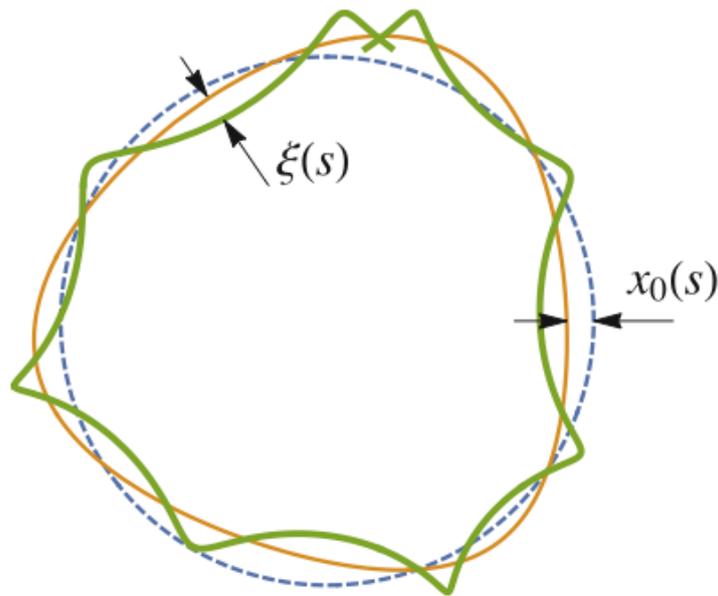


图 7.37: 虚线是参考粒子，金黄色线是参考粒子的闭轨畸变，绿色线是非参考粒子在闭轨基础上叠加 betatron 振荡。图例取自 Stupakov and Penn 一书。

参考图 7.37，非参考粒子在加速器中的轨迹 (绿色线) 可以视为在参考粒子的闭轨基

基础上，再叠加非参考粒子相对于理想情况下的参考粒子的 betatron 振荡而组成，即

$$x(s) = x_0(s) + \xi(s) \quad (7.187)$$

这里的  $x_0(s)$  有时也写成  $x_{\text{COD}}(s)$ 。

其中， $\xi$  满足的就是前面 §7.2 介绍的齐次 Hill 方程

$$\xi'' + K(s)\xi = 0 \quad (7.188)$$

由于磁聚焦结构存在的误差为系统误差，我们可以将此误差归因于参考粒子上，就是上面定义的闭轨误差或闭轨畸变。对不同形态的磁铁误差， $x_0$  的形式不太一样。现在，我们试着分析二极场强度  $B_y(s') = B_0 + \Delta B(s')$  在  $s'$  处的误差  $\Delta B(s')$  导致的在  $s$  处参考粒子的封闭轨迹解。分析方法一般有两种：积分法与传输矩阵法。两种分析方法具有借鉴价值，因此这里分别介绍。

**积分法** 闭轨畸变的轨迹可以通过 Courant-Snyder 理论推导出来，满足非齐次、具有驱动项的 Hill 方程

$$x_0'' + K(s)x_0 = -\frac{q\Delta B(s)}{p_0} = -\frac{\Delta B(s)}{B\rho} \quad (7.189)$$

等式右边的  $\Delta B(s)$  表示二极误差场沿传输路径  $s$  的分布函数。以下先考虑单个位置  $s'$  误差，再考虑分布在多处位置的分布误差 (distributed errors)。对在  $s'$  处的单个误差，不妨将  $\Delta B(s)$  写成  $\Delta B(s) = \Delta B_0(s')\delta(s - s')$ 。求解驱动项为  $\delta$  函数形式的二阶微分方程可采用标准的格林函数法，即这里的积分法。已知齐次解有

$$x_0(s) = A\sqrt{\beta(s)}\cos[\psi(s) - \psi_0] \quad (7.190)$$

现在先论证一下粒子经过  $s'$  前后，其 betatron 相位改变量  $\psi(s'_+) - \psi(s'_-)$  应如何取值，考虑两点：

1. 在没有二极场误差情况下，粒子经历从  $s'$  至下一圈回到同一位置时，有  $\psi(s' + C) - \psi(s') = 2\pi\nu$  (忽略  $2\pi$  整数倍的变化)。
2. 在存在二极场误差情况下，粒子的  $x_0(s')$  连续，但  $x'_0(s')$  可不连续。此外，Courant-Snyder 函数在  $s'$  都要连续。

由以上论证，齐次解可写成如下形式

$$x_0(s) = A\sqrt{\beta(s)}\cos[\psi(s) - \psi(s') - \pi\nu] \quad (7.191)$$

此式表明：

1. 在某一圈  $s'$  位置有  $x_0(s') = A\sqrt{\beta(s')}\cos(-\pi\nu)$  时，下一圈在  $s'$  位置将有  $x_0(s' + C) = A\sqrt{\beta(s')}\cos(2\pi\nu - \pi\nu) = A\sqrt{\beta(s')}\cos(+\pi\nu) = x_0(s')$ 。符合  $x_0(s')$  连续的要求。
2. 二极场误差导致的 betatron 相位改变有  $\psi(s'_+) - \psi(s'_-)$ ，不限于  $\pi\nu$ 。

接着决定齐次解中的待定系数  $A$ 。由于存在二极场误差，允许  $x'_0(s')$  不连续，考虑

相邻两圈的  $x'_0(s')$  与  $x'_0(s'+C)$

$$\begin{aligned} x'_0(s'+C) &= -\frac{A\alpha(s'+C)}{\sqrt{\beta(s'+C)}} \cos(+\pi\nu) - A\sqrt{\beta(s'+C)}\psi'(s'+C) \sin(+\pi\nu) \\ x'_0(s') &= -\frac{A\alpha(s')}{\sqrt{\beta(s')}} \cos(-\pi\nu) - A\sqrt{\beta(s')}\psi'(s') \sin(-\pi\nu) \end{aligned} \quad (7.192)$$

相减后, 有

$$x'_0(s'+C) - x'_0(s') = 0 - 2A\sqrt{\beta(s')} \frac{1}{\beta(s')} \sin(\pi\nu) \stackrel{!}{=} -\frac{q\Delta\mathcal{B}_0(s')}{p_0} \quad (7.193)$$

这里用了  $\psi'(s') = 1/\beta(s')$ 。由此决定系数  $A$

$$A = \frac{\sqrt{\beta(s')}}{2 \sin(\pi\nu)} \frac{q\Delta\mathcal{B}_0(s')}{p_0} \quad (7.194)$$

当两极场误差分布在储存环中的各处时, 利用叠加原理

$$\Delta B(s) = \int_s^{s+C} ds' \Delta B(s') \delta(s-s') \quad (7.195)$$

则非齐次、具有驱动项的 Hill 方程解可写成沿  $s'$  的积分形式, 有

$$x_0(s) = \frac{q}{2p_0 \sin(\pi\nu)} \int_s^{s+C} ds' \Delta B(s') \sqrt{\beta(s)\beta(s')} \cos[\psi(s) - \psi(s') - \pi\nu] \quad (7.196)$$

$$\Rightarrow |x_0| \sim \frac{q}{p_0 \sin(\pi\nu)} \Delta B \bar{\beta} C \sim \frac{1}{\sin(\pi\nu)} \frac{\Delta B}{B} \bar{\beta} \frac{C}{\rho} \quad (7.197)$$

这里用了磁刚度定义。

从这个解可以看出, 当  $\nu$  接近整数时, 分母趋近于 0, 此解将发散。体现的物理图像称为“共振”。

**注** 对以积分法分析的推导细节感兴趣的读者可以参考 Gennady Stupakov and Gregory Penn, *Classical Mechanics and Electromagnetism in Accelerator Physics*, Springer (2018) 的 §8.1。

**传输矩阵法** 另一种方法基于传输矩阵法, 即考虑在储存环中  $s'$  处的两极场误差视为一很薄的二极铁 (比如, 长度  $\delta s'$ ), 以传输矩阵描述。令  $\theta = \Delta B(\delta s')/B\rho$  为两极场误差导致的  $\Delta x'_0(s')$ , 则在  $s'$  前后, 粒子的相空间坐标分别有

$$\mathbf{X}(s'_-) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 - \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}(s'_+) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \quad (7.198)$$

思考一下,  $\mathbf{X}(s'_\pm)$ , 何者为前, 何者为后?

闭轨条件要求

$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 - \theta \end{pmatrix} \quad (7.199)$$

其中,  $\mathbf{M}$  为单圈的传输矩阵 (参考定理 7.5)。求解以上矩阵方程, 得

$$x_0 = \frac{\beta_0 \theta}{2 \sin \pi\nu} \cos \pi\nu, \quad x'_0 = \frac{\theta}{2 \sin \pi\nu} (\sin \pi\nu - \alpha_0 \cos \pi\nu) \quad (7.200)$$

其中,  $\beta_0, \alpha_0$  为二极场误差位置的 Courant-Snyder 参数。

细心的读者或许会问: 为什么闭轨条件不是写成如下形式?

$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 - \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \quad (7.201)$$

或甚至问, 是否写成两种形式都可以? 答案是, 只能写成 Eq. (7.199) 才合理。如果误写成上式, 其实就把误差场随  $s$  传递所造成的影响也纳入了——这就涵盖了比原先预期要多的效应。但是这个回答还没有完全解惑, 读者可能进一步认为“仅关心误差场, 而不关心误差场经过一圈传输后的影响”是不合理的。确实不合理, 因此分析还没结束。如果考虑误差场的传输, 则可继续通过传输矩阵, 二极场误差的影响从  $s'$  至下游  $s$  处的传输有

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \end{pmatrix}_{\text{COD}} = \mathbf{M}(s' \rightarrow s) \begin{pmatrix} x_0(\theta) \\ x'_0(\theta) \end{pmatrix}_{s'} \quad (7.202)$$

其中,  $\mathbf{M}$  不再是单圈的传输矩阵, 而是一般传输段的传输矩阵 (参考定理 7.4)。于是, 在下游  $s$  处的  $x(s)$  有

$$x_{\text{COD}}(s) = G(s, s') \theta(s') \quad (7.203)$$

其中,

$$G(s, s') = \frac{\sqrt{\beta(s)\beta(s')}}{2 \sin \pi\nu} \cos(\pi\nu - |\psi(s) - \psi(s')|) \quad (7.204)$$

这里用到了

$$\cos \Delta\psi \cos \pi\nu + \sin \Delta\psi \sin \pi\nu = \cos(\pi\nu - \Delta\psi) \quad (7.205)$$

当二极场误差分布在储存环各处时, 可以通过叠加原理得到。可以看到, 利用传输矩阵法也得到了与积分法一样的结果, 殊途同归。

 **练习 7.28** 试着自行推导以上传输矩阵法结果。 ■

 **笔记** 这里的传输矩阵法看似少了积分法的  $\pm\pi\nu$  的论证过程, 但  $\pm\pi\nu$  项在矩阵求解过程也出现了, 想想关键藏在哪儿?

**注** 很多时候需要对参考粒子的闭轨进行修正, 此时闭轨畸变修正 (COD correction) 是一个实际问题, 一般会在 lattice 中安置许多小磁铁, 称矫正子 (corrector)。矫正磁铁与反馈系统紧密相关, 很多时候应在设计阶段放在一起考虑。

#### 定义 7.26. 单粒子共振 (resonance)

单粒子在磁聚焦结构中, 由于磁聚焦结构场或位置形成系统误差, 导致粒子逐圈感受到误差造成的结果而振荡振幅增加, 称共振。 □

上面介绍的是在共振条件下, 当  $\nu$  接近整数时, 体现在二极铁强度误差会导致束流

轨道发散，又称整数阶共振。不同的磁铁误差形态可能导致不同阶共振。忽略分析细节，以下总结几种常见的单粒子共振：

### 性质 7.8. 几种常见的单粒子共振

常见的误差有

- 二极场误差  $\Rightarrow$  整数阶共振  $\Rightarrow$  导致闭轨畸变等。
- 四极场误差  $\Rightarrow$  半整数阶共振  $\Rightarrow$  导致粒子频移 (tune shift)、拍频 (beta beat) 等。
- 六极场误差  $\Rightarrow \frac{1}{3}$  阶分数共振等。

图 7.38 为整数阶共振与半整数阶共振示意图。

**注** 有时候，反而利用这些共振特性，经过特殊设计的磁聚焦结构来测量束团性质。参考 S.Y. Lee, *Accelerator Physics*, 4th ed., World Scientific (2019) 一书 Chapter 2, Section III。

**注** 对四极场误差的闭轨分析，感兴趣的读者可以参考 Gennady Stupakov and Gregory Penn, *Classical Mechanics and Electromagnetism in Accelerator Physics*, Springer (2018) 的 §8.3，此处不论。

### 定理 7.15. Tune shift (频移)

单粒子在磁聚焦结构中，由于(四极铁或以上)磁铁聚焦强度偏离设计值而导致的 betatron 振荡频率偏移，称 tune shift，记做  $\Delta\nu$ ，有

$$\Delta\nu = \frac{1}{4\pi} \int_0^C \beta(s) k(s) ds = \frac{1}{4\pi} \int_0^C \beta(s) \frac{\Delta G(s)}{B\rho} ds \quad (7.206)$$

其中， $\Delta G(s) = \frac{\partial \Delta B_y(s)}{\partial x}$ 。

**注** 如果加速器为封闭环形加速器，则

$$\int_0^C \rightarrow \oint \quad (7.207)$$

**证明** 推导可以通过 Hill 方程，也可以利用线性传输矩阵。



**笔记** 回忆一下，betatron tune 的定义为

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^C \frac{ds}{\beta(s)} \quad (7.208)$$

下面利用线性矩阵演示四极场误差导致的 tune shift。由于四极场决定了粒子的 betatron tune，因此，包含四极场误差的(齐次)Hill 方程可写成

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + [K_0(s) + k(s)] x = 0 \quad (7.209)$$

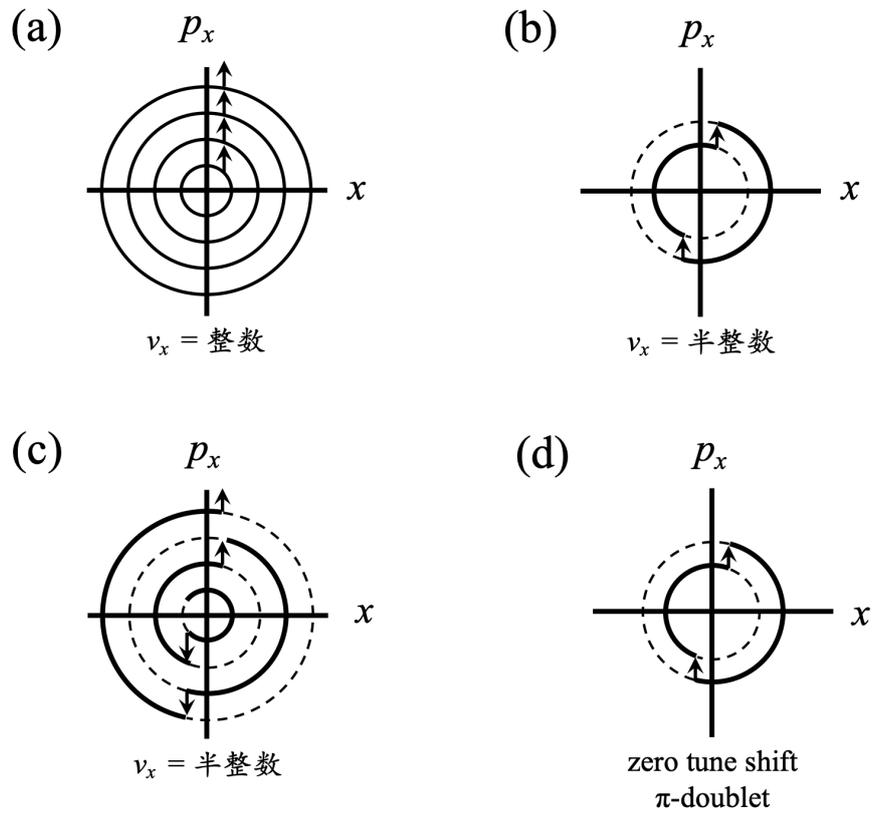


图 7.38: (a) 二极铁误差引起粒子 betatron tune 经历整数阶时的共振; (b) 通过调整 betatron tune 为半整数以避免二极铁误差导致的共振, 但是可能遭遇四极铁误差导致的共振; (c) 四极铁误差导致的半整数阶共振; (d) 通过引入 zero tune shift  $\pi$ -doublet 以避免四极铁误差导致的共振。图例修改自 S.Y. Lee 一书。

其中，假设  $k(s)$  为误差贡献。(齐次) Hill 方程的解前面介绍过了。

假设在单个周期传输单元中，四极铁误差造成的效应可以表示成

$$\mathbf{M}(s_1) = \mathbf{M}_0(s_1) \mathbf{m}(s_1) \quad (7.210)$$

如果写成  
 $\mathbf{m}(s_1) \mathbf{M}_0(s_1)$   
结果会如何?

其中，

$$\mathbf{m}(s_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k(s_1) ds_1 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.211)$$

乘开得

$$\mathbf{M}(s_1) = \begin{pmatrix} \cos \Phi_0 + \alpha_1 \sin \Phi_0 - \beta_1 k(s_1) ds_1 \sin \Phi_0 & \beta_1 \sin \Phi_0 \\ -\gamma_1 \sin \Phi_0 - [\cos \Phi_0 - \alpha_1 \sin \Phi_0] k(s_1) ds_1 & \cos \Phi_0 - \alpha_1 \sin \Phi_0 \end{pmatrix} \quad (7.212)$$

则利用对角线之和  $\text{trace}$  为  $2 \cos \Phi$ ，有

$$\cos \Phi - \cos \Phi_0 = -\frac{1}{2} \beta(s_1) k(s_1) ds_1 \sin \Phi_0 \Rightarrow \Delta \Phi \approx \frac{1}{2} \beta(s_1) k(s_1) ds_1 \quad (7.213)$$

在 **betatron** 函数大的地方 (比如: 聚焦四极铁) 更容易导致 **tune shift**, 合理。因此, 在 **betatron** 函数较大的位置的四极铁, 要特别小心设计磁铁的电源供应 (**power supply**), 才能更好地控制束流稳定性。

上面分析表示在  $s_1$  处会看到 **tune shift**; 此外, 在  $s_2 \neq s_1$  处, 还会看到 **beta beat**, 此处不论。大致思路如下: 从  $s_2$  回头到  $s_1$ , 给一个 **kick**, 然后传递一圈, **beta beat** 效应体现在矩阵 (1,2) 元素的差异。

**注** 通过 Hill 方程较严格的分析可以参考 Gennady Stupakov and Gregory Penn, *Classical Mechanics and Electromagnetism in Accelerator Physics*, Springer (2018) 的 §8.2-§8.3。

图 7.39 与 7.40 比较理想情况与存在四极场误差情况下, 磁聚焦结构的 Courant-Snyder 函数变化。



**笔记** 上面分析共振时是在参考粒子为前提下进行的, 那当共振发生时, 非参考也会发生共振吗? 是, 也不是  $\Rightarrow$  当共振是线性共振时, 那么非参考粒子也共振; 当共振是非线性共振时, 非参考粒子则未必跟着共振。因此, 要看情况, 视逐个粒子的初始条件而定。共振现象是单粒子效应。

**注** 频移不是单粒子共振现象的特有结果, 集体效应也有频移。第 12 章将介绍, 集体效应通常会体现在“频移”与“增长率”(instability growth rate)。有时候, 可以把集体作用的频移效应视为一种线性化的误差场。

**注** 共振  $\neq$  **beta beat**  $\neq$  集体效应。体现在  $t$  时间尺度下, 共振  $\Rightarrow |x, y, z| \propto t$ ; 集体效应  $\Rightarrow |x, y, z| \propto e^t$ ; 扩散效应  $\Rightarrow |x, y, z| \propto \sqrt{t}$ 。

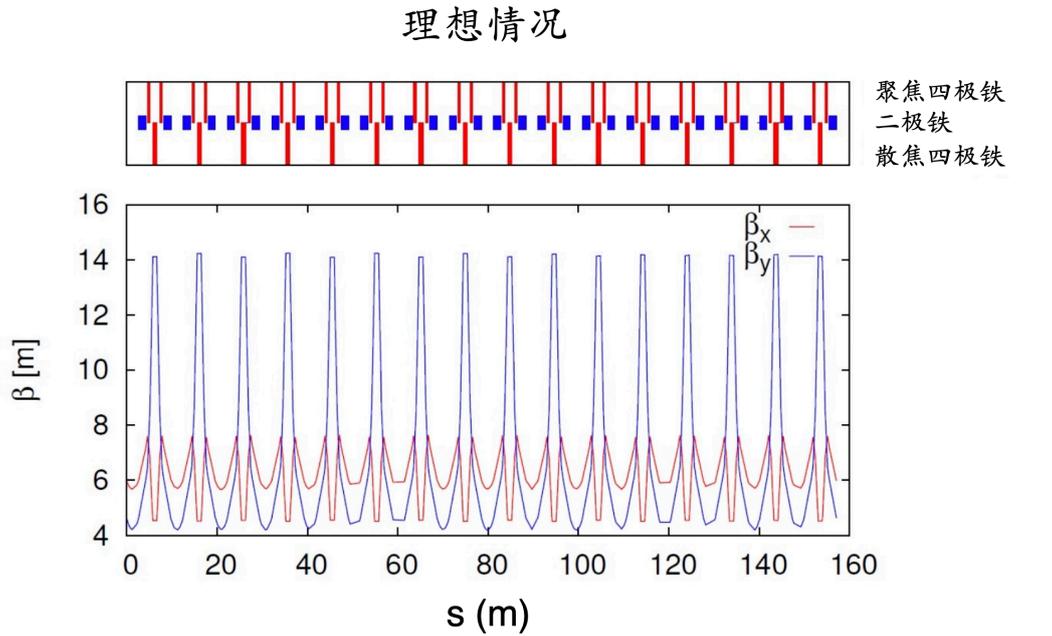


图 7.39: 理想磁聚焦结构的 Courant-Snyder 函数。图例修改自 W. Hillert 的 CERN-CAS 讲义。

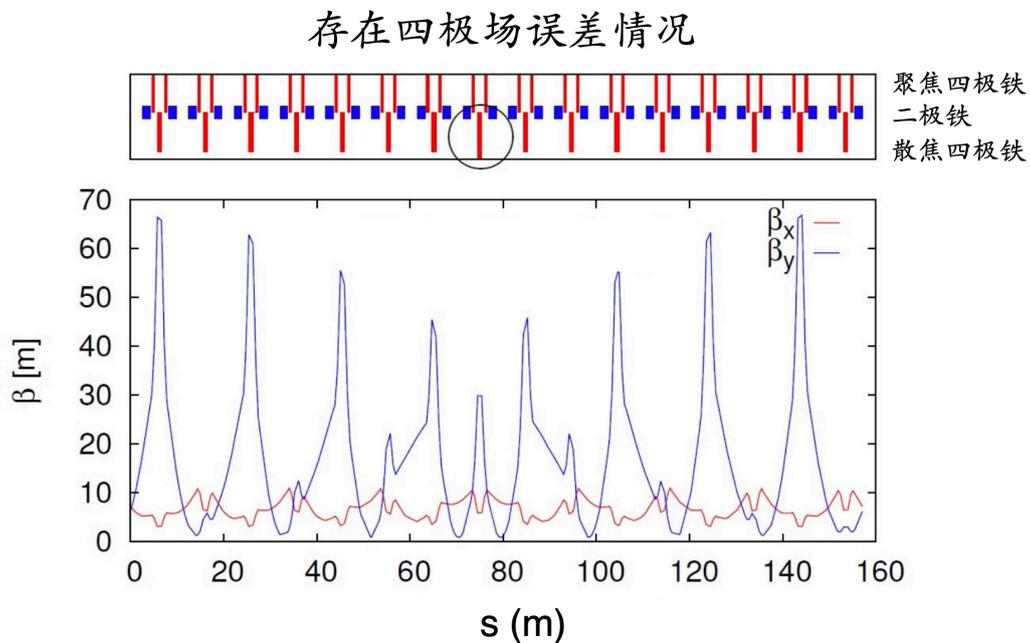


图 7.40: 存在四极场误差时磁聚焦结构的 Courant-Snyder 函数。上排图中圈出来的区域表示  $x$  方向散焦四极铁过度散焦，即  $y$  方向过度聚焦。此四极场误差导致  $\beta_x(s)$  与  $\beta_y(s)$  出现明显拍频 (beta beat) 现象。图例修改自 W. Hillert 的 CERN-CAS 讲义。

以上介绍的共振都是假设在一个维度发生的共振，如  $x$  方向。如果考虑多个维度之间的可能共振，则分析会复杂些，一般利用多维度“作用量-角度”变换。对横向  $x, y$  维度而言，共振条件恒有

$$m_x \nu_x + m_y \nu_y = \ell, \quad (m_x, m_y, \ell) \in \mathbb{Z} \quad (7.214)$$

其中， $\nu_{x,y}$  分别为  $x, y$  方向的 betatron tune。

#### 定理 7.16. 单粒子共振条件的一般形式

以上仅考虑横向  $x, y$  维度，如果把纵向运动也考虑进来，那么有单粒子共振条件的一般形式

$$m_x \nu_x + m_y \nu_y + m_z \nu_s = \ell, \quad (m_x, m_y, m_z, \ell) \in \mathbb{Z} \quad (7.215)$$

由于一般  $\nu_s \ll \nu_{x,y}$ ，因此较少讨论横纵向耦合的共振，但是这种共振有时候仍然存在。

**证明** 要用到作用量-角度变换。对此感兴趣的读者，可参考 S.Y. Lee 一书的 Chapter 2 §VI 与 §VII。

#### 性质 7.9. 合共振比差共振严重

当  $m_x m_y > 0$  时，共振称合共振 (sum resonance)；当  $m_x m_y < 0$  时，共振称差共振 (difference resonance)。略去证明细节，一般来说，如果不考虑纵向维度，则差共振情况的粒子轨迹仍有界 (bounded)，合共振的粒子轨迹一般为无界 (unbounded)。合共振比差共振严重。如果考虑纵向维度，则合共振、差共振何者有界、无界，由滑相因子决定。

**证明** 作用量-角度变换，可参考 S.Y. Lee 一书 Chapter 2 §VI.2。

**注** 留意，这里我们用词严谨些，“有界”≠“稳定”，“无界”≠“不稳定”。比如，当分析的粒子轨迹为有界，但振幅太大，超出 §7.11 动力学孔径时，粒子也许不会因为共振效应丢失，而由于其它效应丢失。

#### 定义 7.27. 共振阶数 (resonance order)

$N$  阶共振定义为  $N \equiv |m_x| + |m_y| + |m_z|$ 。

**注** 定义成加号 (+) 的原因与“作用量-角度”变换采用的惯例有关。

略去推导细节，下图 7.41 展示同时考虑横向  $xy$  方向运动的 betatron 共振图谱 (tune diagram)。

一般来说，在粒子加速器中，对一个光学稳定的磁聚焦结构，在设计阶段就要考虑其“工作点”(working point)，即  $(\nu_{x0}, \nu_{y0})$ ，表征粒子在加速器中的运动状态。设计时应该

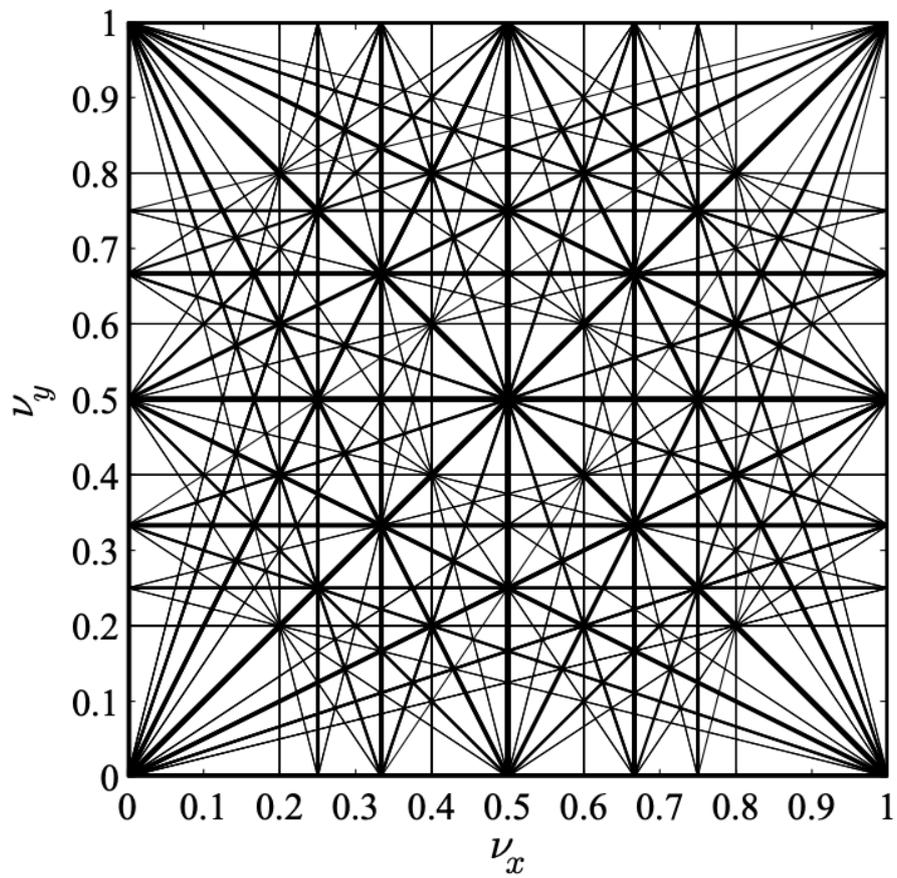


图 7.41: 包含五阶共振内  $|m_x| + |m_y| \leq 5$  的所有共振线。设计时应该尽量避开这些共振线。注意, 这里的  $\nu_{x,y}$  仅取小数部分, 整数部分已舍去。较粗的线为主共振线, 较细的线为次共振线。

尽量避开可能存在的共振线。如果工作点不幸落在共振线上，那么很可能导致粒子由于共振而丢失，造成加速器性能下降。



**笔记** 事实上，工作点是有可能在加速器运行过程逐渐漂移的而非固定不动的。工作点漂移的说法是怎么来的？考虑在束团中心附近的电荷力  $\frac{F_y}{\gamma mc^2} \approx Ky$ ，则有

$$y'' + \left(\frac{\nu_{y0}}{R}\right)^2 y = Ky \quad (7.216)$$

其中，等效的 betatron tune 为  $\nu_y^2 = \nu_{y0}^2 - KR^2$ 。假设  $|KR^2| \ll \nu_{y0}^2$ ，则 tune shift 有  $\Delta\nu_y = \nu_y - \nu_{y0} = -\frac{KR^2}{2\nu_{y0}}$ 。空间电荷力会使束团中不同粒子的工作点有不同程度的漂移。关于空间电荷效应的讨论，参考第 11 章。除了空间电荷力外，其它能够以上面方程形式描述的效应也都会产生工作点漂移。对一般情况， $K$  可能为复数，包含实部与虚部。实部对应 tune shift，虚部对应可能的增长率或衰减率。

**注** 当考虑更高阶共振时，共振线会更多条。当考虑到无穷多阶时，这些共振线会填满整个空间吗？如果会，那意味着什么？注意，一般来说，越高阶的共振线，其共振强度将越弱<sup>32</sup>。

### 7.9.1 非线性动力学问题基本思想

此讲义以上所介绍的整数阶、半整数阶共振都是线性共振 (linear resonance)，为接近相空间中心附近的粒子的小振幅运动导致的共振。与之相对的为非线性共振 (nonlinear resonance)，与偏离相空间中心较远的粒子有关。此时的粒子不再是小振幅运动，或者说，距相空间中心不同距离 (即不同振幅) 的粒子，其振荡频率不再相同，对外部扰动的响应 (resonance driving term, RDT) 也不再相同。或者，当外部扰动对距离相空间中心不同位置的粒子有不同程度 (非线性关系) 的扰动所造成的共振也称非线性共振。

单粒子横向运动存在共振，纵向运动亦同。对纵向运动，外部扰动源可能来自无意或者有意，比如：射频振幅或相位调制 (RF amplitude/phase modulation)，此时，系统哈密顿量的时变成分可能导致粒子纵向运动出现参数振荡 (parametric resonance)。类似于横向 betatron 振荡，束团内不同粒子的不同纵向同步振荡 (synchrotron oscillation) 频率成分可能相互影响，驱动形成参数共振。一般来说，参数振荡可表示成“ $m : n$  共振”，其中，整数  $m, n$  分别表示驱动频率与受振频率阶数。



**笔记** 非线性运动的分析一般采用角度-作用量变换 (action-angle transform)。单粒子共振分析的内容非常丰富。对加速器非线性动力学的评论介绍，可参考 A.W. Chao, Comments on nonlinear dynamics studies in storage rings, AIP Conf. Proc. 184, 946-960 (1989). <https://doi.org/10.1063/1.38053>。对横向非线性共振分析感兴趣的读者，可参考 S.Y. Lee 一书的 Chapter 2 §VII。对纵向参数共振的分析感兴趣的读者，可参考 S.Y. Lee 一

<sup>32</sup>一般情况下，越高阶的共振线，其共振强度将越弱。除非人为刻意地“激发”某几阶的共振。

的 Chapter 3 §III。

从更一般的视角看待非线性动力学问题：在非线性区间中，基本上会出现新的现象，而这些现象在同一个物理系统中相应的线性区间中是不存在的。因此，对非线性问题的研究，主要并不是引入提高与线性现象相关的结果的更精确度的分析，而是将注意力集中在与非线性相关的那些特征上，正是这些特征将导致新的现象。可能的新现象包括：

- 周期性振荡不再只用一 (组) 特征值就能处理  $\Rightarrow$  比如：§7.3介绍的 betatron tune  $\nu_\beta$  可视作 Hill 方程的特征值，能用来描述束团中所有小振幅周期振荡的粒子的振荡频率。但当粒子不再是线性 betatron 振荡时，就不再只能用一个  $\nu_\beta$  值描述。
- 承上，振荡频率与振荡振幅存在函数依存关系。
- 出现跳跃 (jump) 现象  $\Rightarrow$  这是线性区间不会出现的情况。跳跃现象泛指在系统某些参数变化时，系统状态会发生间断性、离散 (而不是连续) 的变化。此与非线性系统存在不只有一个稳态条件 (即，多稳态)、临界点 (critical point)、分岔 (bifurcation)、迟滞 (hysteresis) 等效应有关。
- 对参数变化高度敏感  $\Rightarrow$  将伴随出现随机性 (stochasticity)、噪声放大、分叉、混沌运动 (chaotic motion) 等。

比起线性动力学，与非线性动力学有关的数学问题非常复杂，不太可能有一个关于非线性现象的单一且普适适用的理论。因此，人们放弃对非线性问题解的全局行为的研究，而是在已知线性解的邻域内 — 或视为在已知线性解附近的扰动 — 寻找非线性解。这是分析非线性动力学问题的基本思想。



**笔记** 对非线性动力学一般问题分析感兴趣的读者，可参考 Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 3rd ed., CRC Press (2024)。对求解非线性问题的扰动理论 (perturbation theory)，请自行参考相关专著。留意，perturbation 一词在偏物理或工程的教科书中，一般称为扰动；在偏数学的教科书中，则称摄动。



**笔记** 如果是完美的、零误差的加速器，并且忽略辐射等非保守效应，则单粒子动力学在此系统称可积 (integrable) 哈密顿系统。对可积系统来说，哈密顿量为不变环 (invariant tori)，不同的初始条件扫出的相空间轨迹为准周期轨迹，彼此不相交。当考虑不完美的、非零误差的加速器，如果误差足够小，此时系统称近可积 (quasi-integrable) 哈密顿系统。一个著名的定理，称 KAM 定理，即给出此近可积哈密顿系统的动力学描述。

#### 定理 7.17. KAM 定理的定性描述

如果一哈密顿系统存在微扰 (线性或非线性)，假设此微扰不在共振线上或附近，则在相空间中，有些不变环会稍微变形，但轨迹仍封闭 (即仍为不变环)，有些不

变环则被毁坏将不再存在。以粒子加速器语言说，即当 betatron tune 能够避开低阶共振后，粒子在加速器中的运动可以维持稳定且大致为准周期性。

**注** KAM 定理由 Kolmogorov 在 1954 年提出，在 1962-1963 年由 Moser 与 Arnold 完善并给出严谨证明。 □

## 7.10 色散、色品 — Case 3

这一节主要考虑  $x \neq 0, x' \neq 0, y = 0, y' = 0, z = 0, \delta \neq 0$  的非参考粒子。

粒子束具有中心参考能量/动量  $p_0$ ，但并不是所有束团里的粒子能量都是  $p_0$ ，而是围绕  $p_0$  存在能散 (energy spread)  $\delta = (p - p_0)/p_0$ 。因此，研究相对于参考能量稍微不同的粒子在加速器磁聚焦结构中的行为是有必要的。

相对于上述 Case 2 的“参考粒子”在不完美的磁聚焦结构的情况，此处相对于参考粒子，非参考粒子存在 betatron 振荡的轨道可以是叠加在完美的、封闭的参考轨迹，也可以是虽不完美的、但仍封闭的参考轨迹。与此相关的概念有色散 (dispersion)、色品 (chromaticity)。

$$\text{较强的粒子动量} \Rightarrow \text{磁场相对较弱} \Rightarrow \begin{cases} \text{二极场} \Rightarrow \text{色散相关效应} \\ \text{四极场} \Rightarrow \text{色品相关效应} \end{cases}$$

利用叠加原理，将具有能量偏差  $\delta \neq 0$  的效应与横向坐标偏差  $x \neq 0, x' \neq 0$  的效应分开考虑。后者其实就是 betatron 振荡，现考虑前者，定义色散如下。

### 定义 7.28. 色散函数 (dispersion function) $D$

非参考粒子的横向  $x$  闭轨偏差 — 记作  $x_0(\delta)$  — 与参考粒子的闭轨 — 记作  $x_0(\delta = 0)$ ，它们的差  $x_0(\delta) - x_0(\delta = 0) \equiv \Delta x(s)$  与非参考粒子的能量偏差一阶微扰项  $\delta = \Delta p/p_0$  成正比，可写成

$$\Delta x(s) \equiv x_0(\delta) - x_0(\delta = 0) = D(s) \frac{\Delta p}{p_0} \quad (7.217)$$

其中，比例系数  $D$  定义为色散函数，有时又写做  $D_x$ 、 $\eta_x$  或  $R_{16}$ ，量纲为米 (m)。类似地，横向  $y$  方向有  $D_y$ 、 $\eta_y$  或  $R_{36}$ 。第 8 章将介绍，纵向  $z$  方向的色散写成  $\alpha_c$  (无量纲) 或  $R_{56}$  (量纲为米)，又称动量紧缩因子 (momentum compaction factor)。

**注** 纵向动量紧缩因子将在 §8.1 介绍。

**注** 有些教科书给出更细致的色散定义，区别两种参考能量： $p_0$  为粒子束团中心/平均能量或参考粒子能量， $p_s$  为满足磁刚度对应于弯转半径  $\rho$  的能量  $p_s$ 。为简化起见，此处假设  $p_0 = p_s$ 。

**注** 根据 Conte and MacKay 一书 §5.5，色散函数  $D_x \equiv \partial x / \partial \delta$  (即在一固定位置取值，比如：起点  $s = 0$ )， $\eta_x \equiv dx / d\delta$  (即在  $s$  位置取值)。对周期结构采用闭轨条件求色散函数的话，所求的 (周期) 色散函数为  $dx / d\delta$ 。对单次经过磁聚焦结构传输

段，所求的(未必为周期)色散函数为  $\partial x/\partial \delta$  (即以起点  $s = 0$  为参考位置)。

色散效应的示意图可参考图 7.42。

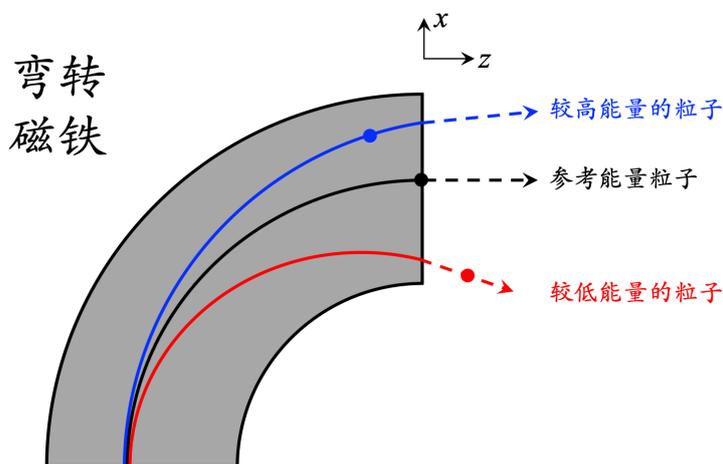


图 7.42: 二极铁本身为色散元件。图中黑色线为参考能量粒子轨迹, 蓝色线为比参考能量稍高的粒子轨迹, 红色线为比参考能量稍低的粒子轨迹。黑色点表示在出口处的参考能量粒子, 同一时刻的蓝色粒子稍微滞后, 红色粒子则超前。这三个粒子在弯转段出口除了横向位置存在偏差, 纵向位置也存在偏差。

利用叠加原理, 非参考能量粒子的横向  $x$  坐标可以写为

$$x = x_{\text{COD}}(s) + x_{\beta}(s) + D(s)\delta \quad (7.218)$$

其中,

- $x_{\text{COD}}(s)$  为参考粒子在外部磁铁部件误差下的闭轨
- $x_{\beta}(s)$  为满足 Hill 方程的非参考粒子 ( $x, x' \neq 0$ ) 的 betatron 振荡

$$x_{\beta}'' + K_x(s)x_{\beta} = 0 \quad (7.219)$$

- $D(s)\delta$  为色散导致的横向偏差, 由 Eq. (7.157), 满足非齐次 Hill 方程<sup>33</sup>

$$D'' + K_x(s)D = \frac{1}{\rho} \quad (7.220)$$

对周期性磁聚焦结构, 如果要求色散导致的横向偏差  $x_D = D(s)\delta$  形成闭轨, 即, 要求以下条件成立

$$D(s+L) = D(s), \quad D'(s+L) = D'(s) \quad (7.221)$$

此条件称“闭轨条件”。

其中,  $L$  为磁聚焦结构周期或储存环周长。同时, 一周期段磁聚焦结构的色散函数必须满足上面的  $D$  的非齐次 Hill 方程

$$D'' + K_x(s)D = \frac{1}{\rho} \quad (7.222)$$

简单说, 现在打算求解 Eq. (7.222), 并满足周期性条件 Eq. (7.221)。Hill 方程的齐次解在前面已经介绍过。将二阶微分方程降阶写为两个一阶微分方程, 利用传输矩阵概念,

<sup>33</sup>此式可由哈密顿量结合哈密顿运动方程得到。

解包含齐次解与特解，有

$$\begin{pmatrix} D(s_2) \\ D'(s_2) \end{pmatrix} = \mathbf{M}(s_1 \rightarrow s_2) \begin{pmatrix} D(s_1) \\ D'(s_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ d' \end{pmatrix} \quad (7.223)$$

其中， $d, d'$  为待解函数。实际  $d, d'$  的求解可通过高等数学学过的常数变易法 (variation of constants) 求解。

现在我们对此式动个手脚，令  $\mathbf{d} = [d \ d']^T$ ，上式的非齐次矩阵方程可扩写为  $3 \times 3$  “齐次”矩阵形式<sup>34</sup>，有

$$\begin{pmatrix} D(s_2) \\ D'(s_2) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}(s_1 \rightarrow s_2) & \mathbf{d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D(s_1) \\ D'(s_1) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.224)$$

有两种观点看待上式：

- 对单次经过磁聚焦结构，已知  $\mathbf{M}$  与  $\mathbf{d}$ ，给定在入口处的  $D(s_1), D'(s_1)$ ，则可以得到出口处的  $D(s_2), D'(s_2)$ 。
- 将个别不同部件的传输矩阵相乘后，有储存环或一个完整周期的磁聚焦结构  $\mathbf{M}$  与  $\mathbf{d}$ ，可解得对应满足闭轨条件的色散函数  $D, D'$ 。以上  $[D \ D' \ 1]^T$  可看成  $3 \times 3$  “齐次”矩阵的特征值为 1 的特征解。

对一般线性传输段， $\mathbf{d}$  的求解可通过常数变易法，其结果整理为如下定理：

#### 定理 7.18. 一般线性传输段的色散函数解 — 常数变易法

已知齐次 Hill 方程

$$x''_{\beta} + K_x(s)x_{\beta} = 0 \quad (7.225)$$

其解可写为类余弦函数  $C(s)$  与类正弦函数  $S(s)$ ，则色散函数  $D(s)$  满足非齐次 Hill 方程

$$D'' + K_x(s)D = \frac{1}{\rho(s)} \quad (7.226)$$

根据常微分方程理论的常数变易法 (variation of constants)，其解可写为

$$D(s) = S(s) \int_0^s d\tau \frac{C(\tau)}{\rho(\tau)} - C(s) \int_0^s d\tau \frac{S(\tau)}{\rho(\tau)} \quad (7.227)$$

**证明** 对如下一般形式的二阶常微分方程

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y(x) = F(x)$$

如果齐次解已知，写成  $\phi_1, \phi_2$ ，满足

$$\begin{aligned} \phi_1'' + P(x)\phi_1' + Q(x)\phi_1 &= 0 \\ \phi_2'' + P(x)\phi_2' + Q(x)\phi_2 &= 0 \end{aligned}$$

<sup>34</sup>这种数学处理方法有时候能够很好地简化问题，值得琢磨。

则特解 (或称非齐次解) 可写成

$$y_p(x) = -\phi_1(x) \int_{x_0}^x \frac{F(t)\phi_2(t)}{W[\phi_1(t), \phi_2(t)]} dt + \phi_2(x) \int_{x_0}^x \frac{F(t)\phi_1(t)}{W[\phi_1(t), \phi_2(t)]} dt$$

$$y_p'(x) = -\phi_1'(x) \int_{x_0}^x \frac{F(t)\phi_2(t)}{W[\phi_1(t), \phi_2(t)]} dt + \phi_2'(x) \int_{x_0}^x \frac{F(t)\phi_1(t)}{W[\phi_1(t), \phi_2(t)]} dt$$

其中, 被积分函数分母项

$$W(\phi_1, \phi_2) = \begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_1' & \phi_2' \end{vmatrix}$$

称 Wronskian 因子。

**注** 此即高等数学学过的, 微分方程的完整解可视为“通解 (齐次解)”与“特解 (非齐次解)”之和, 即

$$x(s) = x_\beta(s) + D(s)\delta \quad (7.228) \quad \square$$

由上定理 (常数变易法),  $3 \times 3$  “齐次”矩阵形式可展开写成

$$\begin{pmatrix} D(s_2) \\ D'(s_2) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(s_1 \rightarrow s_2) & S(s_1 \rightarrow s_2) & S(s_2) \int_{s_1}^{s_2} \frac{C(t)}{\rho(t)} dt - C(s_2) \int_{s_1}^{s_2} \frac{S(t)}{\rho(t)} dt \\ C'(s_1 \rightarrow s_2) & S'(s_1 \rightarrow s_2) & S'(s_2) \int_{s_1}^{s_2} \frac{C(t)}{\rho(t)} dt - C'(s_2) \int_{s_1}^{s_2} \frac{S(t)}{\rho(t)} dt \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D(s_1) \\ D'(s_1) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.229)$$

以扇形二极铁为例, 当弯转角度为  $\theta = s/\rho$  时,  $3 \times 3$  传输矩阵有

$$\begin{pmatrix} D(s) \\ D'(s) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) & \rho \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) & \rho \left(1 - \cos\left(\frac{s}{\rho}\right)\right) \\ -\frac{1}{\rho} \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) & \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) & \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D(0) \\ D'(0) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.230)$$

**练习 7.29** 推导如上结果。 ■

对  $x$  方向聚焦四极铁,  $3 \times 3$  传输矩阵有

$$\begin{pmatrix} D(s) \\ D'(s) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{K}\ell) & \frac{\sin(\sqrt{K}\ell)}{\sqrt{K}} & \frac{1 - \cos(\sqrt{K}\ell)}{\rho_0 K} \\ -\sqrt{K} \sin(\sqrt{K}\ell) & \cos(\sqrt{K}\ell) & \frac{\sin(\sqrt{K}\ell)}{\rho_0 \sqrt{K}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D(0) \\ D'(0) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.231)$$

其中,  $K = \frac{q}{p_0} G(s) + \frac{1}{\rho_0^2} > 0, G(s) = \frac{\partial B_y(s)}{\partial x}$ 。

**练习 7.30** 推导如上结果。此为组合功能极铁, 包含了带有色散的弯转磁场与四极场。 ■

对  $x$  方向散焦四极铁,  $3 \times 3$  传输矩阵有

$$\begin{pmatrix} D(s) \\ D'(s) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{|K|}\ell) & \frac{\sinh(\sqrt{|K|}\ell)}{\sqrt{|K|}} & \frac{\cosh(\sqrt{|K|}\ell)-1}{\rho_0|K|} \\ -\sqrt{|K|}\sinh(\sqrt{|K|}\ell) & \cosh(\sqrt{|K|}\ell) & \frac{\sinh(\sqrt{|K|}\ell)}{\rho_0\sqrt{|K|}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D(0) \\ D'(0) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.232)$$

其中,  $K = \frac{q}{p_0}G(s) + \frac{1}{\rho_0^2} < 0, G(s) = \frac{\partial B_y(s)}{\partial x}$ 。

 **练习 7.31** 推导如上结果。此为组合功能极铁, 包含了带有色散的弯转磁场与四极场。■

对存在周期性的线性传输段, 有如下定理:

**定理 7.19. 单圈或周期线性传输段的色散函数特性**

如果单圈或周期线性传输段的  $3 \times 3$  矩阵已知, 对应  $[x \ x' \ \delta]^T$ , 即给定在  $s$  位置的传输矩阵

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.233)$$

根据闭轨条件  $D_f = D_i, D'_f = D'_i$ , 在  $s$  位置的色散函数可以  $m_{ij}$  表示, 有

$$\begin{aligned} D &= \frac{m_{13}(1-m_{22}) + m_{12}m_{23}}{2 - m_{11} - m_{22}} \\ &= \frac{m_{13}(1-m_{22}) + m_{12}m_{23}}{2 - \text{Trace}(\mathbf{M}_{2 \times 2})} = \frac{m_{13}(1-m_{22}) + m_{12}m_{23}}{2 - 2\cos\Phi} \\ &= \frac{1}{2} \left[ m_{13} + (\alpha m_{13} + \beta m_{23}) \cot \frac{\Phi}{2} \right] \\ D' &= \frac{m_{21}m_{13} + m_{23}(1-m_{11})}{2 - m_{11} - m_{22}} \\ &= \frac{m_{21}m_{13} + m_{23}(1-m_{11})}{2 - \text{Trace}(\mathbf{M}_{2 \times 2})} = \frac{m_{21}m_{13} + m_{23}(1-m_{11})}{2 - 2\cos\Phi} \\ &= \frac{1}{2} \left[ m_{23} - (\gamma m_{13} + \alpha m_{23}) \cot \frac{\Phi}{2} \right] \end{aligned} \quad (7.234)$$

其中,

$$\mathbf{M}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \quad (7.235)$$

**注** 对单圈或周期性传输段, 传输矩阵右上角元素  $m_{13}, m_{23}$  只是表征色散项的部分贡献, 不是完整的色散函数。对单次经过、非周期性传输段, 则  $m_{13}, m_{23}$  可视为完整的色散函数。

如果把  $D, D'$  当作已知量, 则反过来求解  $m_{13}, m_{23}$ , 有

$$\begin{pmatrix} \cos \Phi + \alpha \sin \Phi & \beta \sin \Phi & (1 - \cos \Phi - \alpha \sin \Phi)D - \beta D' \sin \Phi \\ -\gamma \sin \Phi & \cos \Phi - \alpha \sin \Phi & \gamma D \sin \Phi + (1 - \cos \Phi + \alpha \sin \Phi)D' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.236)$$

 **练习 7.32** 推导如上结果。 ■

 **笔记** 由上面介绍的齐次 Hill 方程通解与 Courant-Snyder 参量知, 束团尺寸可以写成  $\sigma_x(s) = \sqrt{\epsilon\beta(s)}$ , 其中,  $\epsilon$  为束团的几何发射度,  $\beta(s)$  为在  $s$  处的 Courant-Snyder betatron 函数。这个式子是齐次 Hill 方程的通解, 不考虑色散, 即不考虑粒子能量偏差的影响。如果考虑粒子能量偏差, 在色散段束团尺寸将因色散效应展宽, 则束团尺寸应写成

$$\sigma_x(s) = \sqrt{\epsilon\beta(s) + D^2(s)\sigma_\delta^2} \quad (7.237)$$

类似地, 束团角散 (angular divergence) 应写成

$$\sigma_{x'}(s) = \sqrt{\epsilon_x \gamma_x(s) + D'^2(s)\sigma_\delta^2} \quad (7.238)$$

其中, 束团几何发射度取值为

$$\epsilon_x = \frac{1}{1 + \kappa} \epsilon_{x0} \quad \epsilon_y = \frac{\kappa}{1 + \kappa} \epsilon_{x0} \quad (7.239)$$

其中, 耦合系数  $\kappa$  表征  $xy$  方向耦合。理想情况下,  $\kappa = 0$ 。更多讨论在第 8 章将介绍, 可参考 §8.4。

进一步考虑四极铁磁场误差与色散的综合效应, 则有

$$\begin{aligned} x''_\beta + (K_x(s) + \Delta K_x) x_\beta &= 0 \\ D'' + (K_x(s) + \Delta K_x) D &= \frac{1}{\rho} \end{aligned} \quad (7.240)$$

其中, 第二式的  $\Delta K_x$  对色散函数  $D$  引起的效应称一阶色品 (chromatic) 效应。色品即指不同能量偏差导致的横向 betatron 振荡频率的差异。不经过严格推导, 这里先给出  $\Delta K_x$  大致形式。由磁刚度定义知, 能量越高的粒子刚性越大, 经过磁聚焦结构时的聚焦效果比起参考粒子相对较差, 因此, 合理预期有  $\Delta K_x \approx -K_x \delta$ 、 $\Delta K_y \approx -K_y \delta$ 。

接着进一步讨论之前, 下面先给色品一量化定义。

#### 定义 7.29. 色品 (chromaticity) $\xi$

定义自然色品 (natural chromaticity) 如下, 不同能量的粒子的 betatron tune 有所不同, betatron tune 的一阶偏差量可以写成

$$\Delta\nu = \xi \frac{\Delta p}{p_s} = \xi \delta \quad (7.241)$$

其中,  $\xi$  称为自然色品, 无量纲。对四极铁磁聚焦结构, 自然色品可写成积分表示

式

$$\begin{aligned}\xi_{x,\text{nat}} &\equiv \frac{d\Delta\nu_x}{d\delta} = \frac{d}{d\delta} \left[ \frac{1}{4\pi} \oint \beta_x(s) k_x(s) ds \right], \quad k_x(s) \approx -K_x(s)\delta \\ &= -\frac{1}{4\pi} \oint \beta_x(s) \left[ \frac{2}{\rho^2(s)} + \frac{G(s)}{B\rho} \right] ds \approx -\frac{1}{4\pi} \oint \beta_x(s) K_x(s) ds\end{aligned}\quad (7.242)$$

$$\xi_{y,\text{nat}} \equiv \frac{d\Delta\nu_y}{d\delta} = \frac{1}{4\pi} \oint \beta_y(s) \frac{G(s)}{B\rho} ds = \frac{1}{4\pi} \oint \beta_y(s) K_x(s) ds = -\frac{1}{4\pi} \oint \beta_y(s) K_y(s) ds\quad (7.243)$$

其中,  $K_x(s) = \frac{1}{\rho^2(s)} + \frac{G(s)}{B\rho} \approx \frac{G(s)}{B\rho} = -K_y(s)$ ,  $G(s) = \partial B_y(s)/\partial x$ 。

**注** 比较四极铁偏差导致的 betatron tune shift, 有

$$\Delta\nu = \frac{1}{4\pi} \oint \beta(s) k(s) ds\quad (7.244)$$

其中,  $k(s)$  为误差强度。等效来看, 将  $k_x(s) = -K_x\delta$ ,  $k_y(s) = -K_y\delta = K_x\delta$  代入上式, 根据色品定义, 即色品的积分表示式。

**注** 上面的定义方式主要为美式惯例 (US convention), 欧式惯例 (European convention) 有  $\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \xi\delta$  或  $\nu(\delta) = \nu_0(1 + \xi\delta)$ , 其中,  $\nu_0 = \nu(\delta = 0) = \frac{\omega_\beta}{\omega_0}$ 。注意两种定义的差别。

**注** 上面的分析忽略粒子加速或减速过程, 即, 粒子能量固定,  $\delta' = 0$ 。

**注** 在 S.Y. Lee 书中, 自然色品用符号  $C \equiv \frac{d\Delta\nu}{d\delta}$  表示 (类似美式惯例), 而“specific chromaticity”用符号  $\xi \equiv \frac{C}{\nu}$  (类似欧式惯例)。

**注** 这里介绍的色品又称线性色品 (linear chromaticity), 指的是  $\xi$  为  $\Delta\nu$  与  $\delta$  的线性比例关系。一般情况下, 当  $\Delta\nu = \Delta\nu(\delta)$  不再是线性关系时, 量化其比例关系就不能只用线性色品, 此时的变化率  $d\Delta\nu/d\delta$  称非线性色品 (nonlinear chromaticity)。

Betatron tune 对能量偏差的泰勒展开可写成

$$\nu(\delta) = \nu_0 + \frac{d\nu}{d\delta}\delta + \frac{1}{2!} \frac{d^2\nu}{d\delta^2}\delta^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3\nu}{d\delta^3}\delta^3 \dots\quad (7.245)$$

由上讨论知, 单个  $x$ -聚焦 (或  $y$ -散焦) 四极铁对色品的影响是单向 (单调) 的, 即在  $x$  方向,  $\xi_x < 0$ ; 在  $y$  方向,  $\xi_y > 0$ 。对单个  $y$ -聚焦 (或  $x$ -散焦) 四极铁, 结果相反, 即在  $x$  方向,  $\xi_x > 0$ ; 在  $y$  方向,  $\xi_y < 0$ 。粒子束对四极铁的色品与光束对光学透镜的色差 (又称像差) 类似, 参考图 7.43。但是, 对整个储存环而言, 无论在  $x$  或  $y$  方向, 色品都为负, 即对全环而言,  $\xi_{x,y} < 0$ 。这是因为在  $x$ -聚焦 (或  $y$ -散焦) 的位置,  $\beta_x \gg \beta_y$ ,  $K_x = -K_y > 0$ , 在  $y$ -聚焦 (或  $x$ -散焦) 的位置,  $\beta_x \ll \beta_y$ ,  $K_y = -K_x > 0$ 。

### 性质 7.10. 自然色品的一般特性

对储存环整体而言, 自然色品具有如下特性:

1. 未修正前, 横向水平与垂直方向的自然色品皆为负, 即  $\xi_{x,y} < 0$ 。
2. 横向越是强聚焦 (强散焦), 色品绝对值越大。

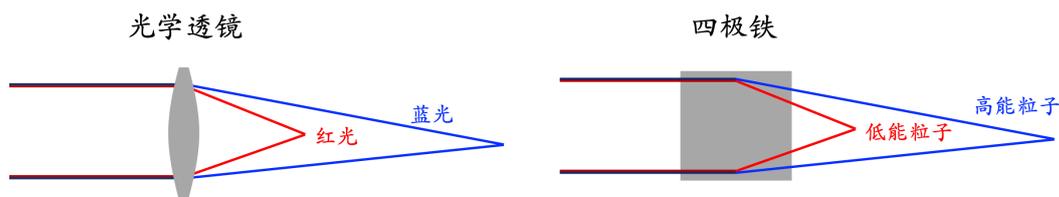


图 7.43: 对单个四极铁, 在聚焦方向贡献负色品, 在散焦方向贡献则贡献正色品。

3. 周长越大的同步加速器储存环, 其色品一般越大。 □

修正四极铁磁聚焦结构的色品一般依赖六极铁 (sextupole)。在六极铁的两侧 — 一般为左右两侧, 称正六极铁 — 分别用来使束团聚焦或散焦, 从而控制或调整磁聚焦结构的色品。参考图 7.44 与 7.45。

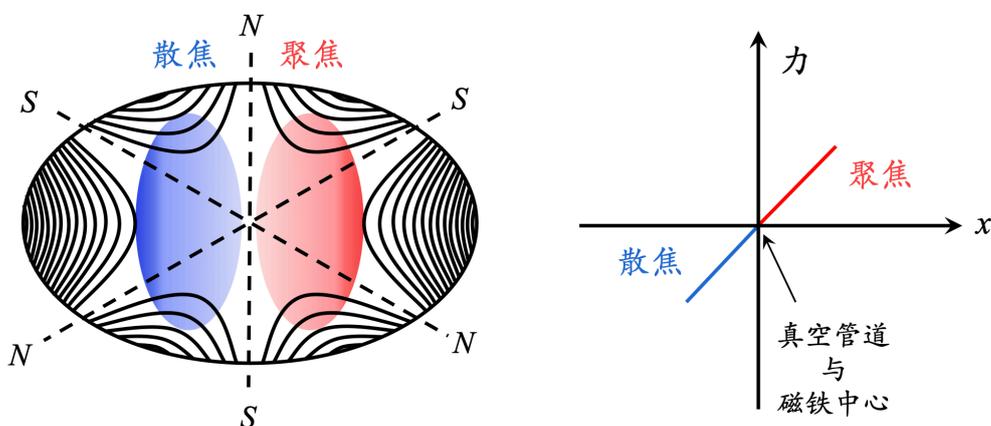


图 7.44: 正六极铁的两侧分别提供聚焦或散焦, 用来控制或调整磁聚焦结构的色品。

对于长度  $\ell$ 、强度  $B'' = \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} = S(s)$  的单一六极铁<sup>35</sup>, 有

$$\frac{B_y}{B\rho} = \frac{S(s)}{2B\rho}(x^2 - y^2), \quad \frac{B_x}{B\rho} = \frac{S(s)}{B\rho}xy \quad (7.246)$$

暂时忽略 COD, 以  $x = x_\beta + D\delta, y = y_\beta$  (假设  $y$  方向没有色散) 代入上式, 有

$$\frac{B_y}{B\rho} = \frac{S(s)}{2B\rho}(x^2 - y^2) = \frac{S(s)}{2B\rho}(x_\beta^2 - 2x_\beta D\delta + D^2\delta^2 - y_\beta^2) \quad (7.247)$$

$$\frac{B_x}{B\rho} = \frac{S(s)}{B\rho}xy = \frac{S(s)}{B\rho}(x_\beta y_\beta + y_\beta D\delta) \quad (7.248)$$

其中, 与能量偏差  $\delta$  一次方成正比的项可以用来修正色品, 与  $x_\beta, y_\beta$  平方有关的项将造成几何像差 (geometric aberration), 导致 betatron 振荡的非线性微扰。

<sup>35</sup>六极铁磁场写为

$$\mathbf{B} = S(s) \left[ \frac{1}{2} \hat{\mathbf{y}} (x^2 - y^2) + \hat{\mathbf{x}} xy \right] = B_y \hat{\mathbf{y}} + B_x \hat{\mathbf{x}}$$

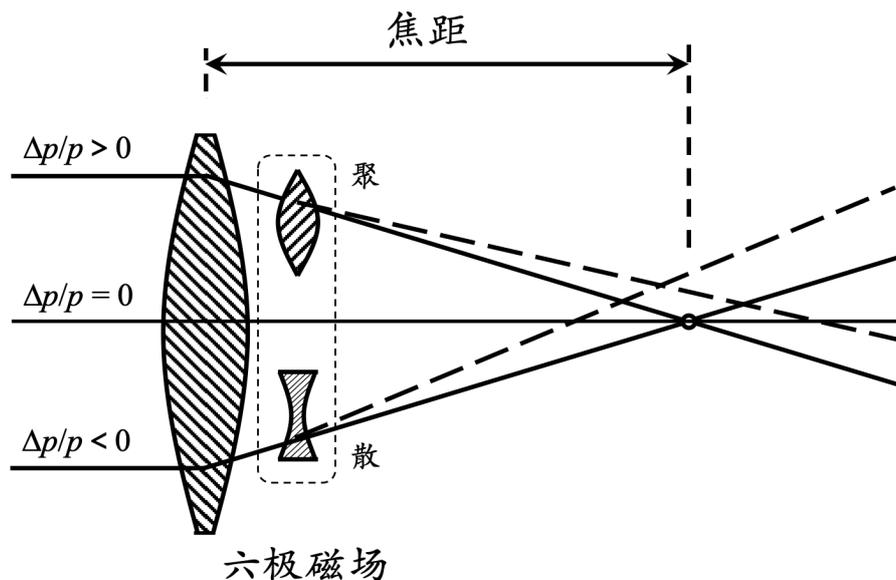


图 7.45: 正六极铁的两侧分别提供聚焦或散焦, 用来控制或调整磁聚焦结构的色品。虚线为未经六极铁修正轨迹, 实线为六极铁修正后轨迹。

由前面的讨论知道, 四极铁导致的 tune shift 可写成

$$\Delta\nu_x = \frac{1}{4\pi} \oint \beta_x(s) k_x(s) ds = \frac{1}{4\pi} \oint \beta_x(s) \left[ \frac{\partial B_y / \partial x(s)}{B\rho} \right] ds \quad (7.249)$$

$$\Delta\nu_y = \frac{1}{4\pi} \oint \beta_y(s) k_y(s) ds = -\frac{1}{4\pi} \oint \beta_y(s) \left[ \frac{\partial B_y / \partial x(s)}{B\rho} \right] ds \quad (7.250)$$

其中,  $k_x, k_y$  为聚焦强度误差。由于四极铁在一个方向聚焦, 在另一个方向将散焦, 因此恒有  $k_y = -k_x$ 。

如果要评估六极铁贡献的色品, 则可适当修改上面量化方式为

$$\Delta\nu_x = \frac{1}{4\pi} \oint \beta_x(s) k_x(s) ds = \frac{1}{4\pi} \oint \beta_x(s) \left[ \frac{\partial B_y / \partial x(s)}{B\rho} \right] ds \quad (7.251)$$

$$\Delta\nu_y = \frac{1}{4\pi} \oint \beta_y(s) k_y(s) ds = \frac{1}{4\pi} \oint \beta_y(s) \left[ \frac{\partial B_x / \partial y(s)}{B\rho} \right] ds \quad (7.252)$$

将上面六极铁的  $\frac{B_y}{B\rho}, \frac{B_x}{B\rho}$  分别对  $x, y$  取微分, 有

$$\frac{\partial B_y}{\partial x B\rho} = \frac{S(s)}{B\rho} x, \quad \frac{\partial B_x}{\partial y B\rho} = \frac{S(s)}{B\rho} x \quad (7.253)$$

利用  $\Delta\nu = \xi\delta$  与  $x_D = D\delta$ , 将上面结果代入 tune shift 公式, 假设六极铁长度很短, 集中在  $s = s_0$  位置, 采用薄透镜近似, 则六极铁贡献的色品大致可写成如下形式

$$\Delta\xi = \pm \frac{1}{4\pi} D(s_0)\beta(s_0) \frac{S(s_0)\ell}{(B\rho)} \quad (7.254)$$

其中,  $D$  为色散函数。可以看到, 六极铁贡献的色品修正量与其所在位置的 betatron 函数大小及色散函数有关。当六极铁放在 betatron 函数较大或色散较大处时, 能提供更大的色品修正。



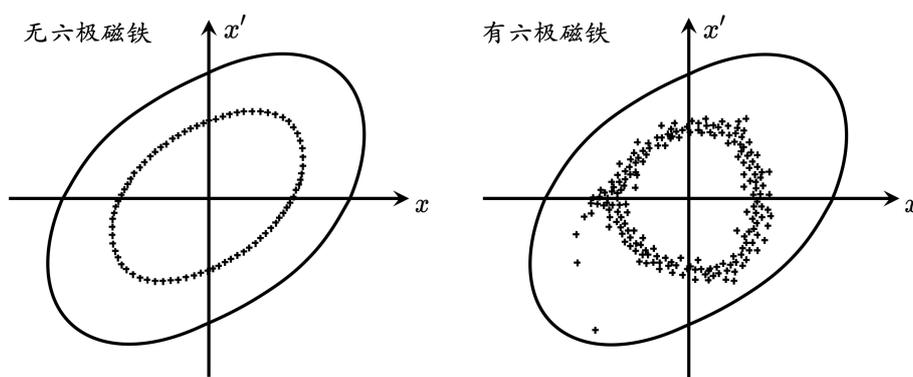
**笔记** 一般修正色品的六极铁会安排在磁聚焦结构传输段中  $\beta_{x,y}$  较大或色散较大的位置,

且六极铁常成对出现。

**注** 为什么要修正色品? 主要有三个理由:

1. 如果不修正, 自然色品一般太大, 即磁聚焦结构显得比较“非线性”。此时, 束团内的偏能粒子, 它们的横向 betatron 振荡频率偏差也很大, 束团整体的横向相空间就不容易调控。
2. 如果不修正, 在横向  $x, y$  方向的色品皆为负, 将导致束团头尾不稳定性 (head-tail instability)。头尾不稳定性将在第 12 章介绍。
3. 如果不修正, 当如果自然色品太大时, 则磁聚焦结构的能量孔径一般会比较小, 偏能粒子的工作点可能会碰到共振线丢失, 影响束流寿命, 也对注入方案产生设限。

利用六极铁修正色品的代价是, 六极铁将导致磁聚焦结构总体的动力学孔径变小。动力学孔径将在 §7.10 简短讨论, 此处仅给出粒子跟踪模拟结果示例, 参考图 7.46。



**图 7.46:** 粒子在储存环中逐圈模拟结果, 左图为不包含六极铁情况, 右图为包含六极铁的粒子跟踪模拟结果。相空间中的每个“+”为粒子在储存环中固定位置记录逐圈经过时的相空间坐标。图例修改自 K. Willie。

由于四极铁不可避免地对不同能量的粒子存在聚焦偏差, 于是引入色品的概念, 用六极铁修正。但是, 六极铁同样地无法完美修正不同能量偏差形态的粒子或不同横向位置留下来的偏差效应  $\Rightarrow$  一样米不能养百样人。能不能修正“色品”? 可以, 用更高阶的磁铁。但注意, 高阶像差还分: chromatic aberration  $U_{1222}$  与 spherical aberration  $T_{126}$ 。色品的概念需要推广。由 §7.1 知, 六极铁的磁场  $B \propto (x^2, y^2, xy)$ , 即横向坐标偏差的二次方, 可用来修正具有能量偏差  $\delta$  的粒子。一般来说, 具有  $B \propto$  横向坐标偏差 <sup>$n$</sup>  的磁铁能够用来修正  $\delta^{n-1}$  引起的色品或像差效应。

FODO 结构由于磁铁组成相对简单, 可以解析给出近似的色品, 总结如下。

**性质 7.11. FODO 插件单元的自然色品**

可以证明, 采用薄透镜近似,  $N$  个 FODO 单元节的自然色品为

$$\xi_{\text{nat}}^{\text{FODO}} \approx -\frac{1}{4\pi} N \left( \frac{\beta_{\text{max}}}{f} - \frac{\beta_{\text{min}}}{f} \right) = -\frac{\tan(\Phi/2)}{\Phi/2} \nu \approx -\nu \quad (7.255)$$

其中,  $f = -K^{-1}$  为焦距,  $\Phi$  为每个单元的相位超前,  $\nu = N\Phi/2\pi$ 。

**证明** 对  $x$  方向聚焦四极铁 (F), 不同的偏能粒子经过时, 感受到的聚焦强度差异为  $k_x = -K_x \delta = -\frac{1}{f} \delta$ , 在该位置的 betatron 函数记为  $\beta_{\text{max}}$ 。对  $x$  方向散焦四极铁 (D), 感受到的散焦强度差异为  $k_x = -(-K_x) \delta = \frac{1}{f} \delta$ , 在该位置的 betatron 函数记为  $\beta_{\text{min}}$ 。代入 tune shift 公式, 利用  $\Delta\nu = \xi \delta$  定义, 一个 FODO 单元节的自然色品有

$$\Delta\nu_x = \xi_{\text{nat, one cell}}^{\text{FODO}} \delta = \frac{1}{4\pi} \oint \beta_x(s) k_x(s) ds = \frac{1}{4\pi} \left( -\frac{\beta_{\text{max}}}{f} + \frac{\beta_{\text{min}}}{f} \right) \delta$$

根据 §7.8 节讨论知道, 对 FODO 单元节, 有

$$\begin{aligned} \beta_{\text{max}} &= \frac{\ell}{\sin \Phi} \left( 1 + \sin \frac{\Phi}{2} \right) = 2f \sqrt{\frac{1 + \sin \frac{\Phi}{2}}{1 - \sin \frac{\Phi}{2}}} \\ \beta_{\text{min}} &= \frac{\ell}{\sin \Phi} \left( 1 - \sin \frac{\Phi}{2} \right) = 2f \sqrt{\frac{1 - \sin \frac{\Phi}{2}}{1 + \sin \frac{\Phi}{2}}} \end{aligned} \quad (7.256)$$

其中,  $\sin \frac{\Phi}{2} = \pm \frac{\ell}{4f}$ 。

 **练习 7.33** 试补全以上性质的证明。 ■

由上面讨论知道, 色品  $\xi$  是一个关联横向 betatron 振荡与纵向能量偏差的物理量, 往后将扮演重要角色。以下先定义一个物理量, 称色品频率 (chromatic frequency)  $\omega_\xi$ , 将在后面第 12 章介绍其衍生的物理效应。

**定义 7.30. 色品频率 (chromatic frequency)  $\omega_\xi$** 

考虑色品效应时, 由于能量偏差导致的 betatron 振荡频率改变, 有

$$\omega_\beta(\delta) = \omega_{\beta 0} + \Delta\omega_\beta(\delta; \xi) = \omega_{\beta 0} + \xi \delta \omega_0 \quad (7.257)$$

当束团传输一段距离后, 束团内某一粒子与参考粒子 ( $\delta = 0$ ) 将积累一 betatron 相位差, 积累的速率可以色品频率  $\omega_\xi$  表征, 定义为

$$\omega_\xi \equiv \frac{\xi \omega_0}{\eta} \quad (7.258)$$

其中,  $\xi$  为自然色品,  $\omega_0$  为绕行角频率,  $\eta$  为滑相因子。

 **笔记** 更多讨论可参考 §12.3.4。 □

这一节介绍完色散函数与色品函数后, 此处还需要介绍一个函数, 称色散  $\mathcal{H}$  函数 (dispersive  $\mathcal{H}$ -function, 或称 curly  $\mathcal{H}$  function)。定义如下:

**定义 7.31.  $\mathcal{H}$  函数**

类似于 Courant-Snyder 不变量,  $\mathcal{H}$  函数定义如下

$$\mathcal{H}_x = \gamma_x D_x^2 + 2\alpha_x D_x D'_x + \beta_x D_x'^2 = \frac{D_x^2 + (\beta_x D'_x + \alpha_x D_x)^2}{\beta_x} > 0 \quad (7.259)$$

其中,  $\beta_x, \alpha_x$  为 Courant-Snyder 函数,  $D_x$  为色散函数。类似地, 可以定义  $\mathcal{H}_y$ 。量纲为长度 (m)。

**注** 有时候,  $\mathcal{H}_x$  函数定义中的  $D_x, D'_x$  写成  $R_{16}, R_{26}$  ( $y$  方向类似)。一般来说, 磁聚焦结构传输段如果不涉及粒子能量大幅改变, 如通过 RF 加速、减速, 则  $D_x = R_{16}, D'_x = R_{26}$ 。但是, 如果传输段包含 RF 腔, 则两种色散函数的值未必一样, 即  $D_x \neq R_{16}, D'_x \neq R_{26}$ 。 $D_x, D'_x$  的定义为局域色散 (local dispersion),  $R_{16}, R_{26}$  的定义为全域色散 (global dispersion), 以起点为零参考点。

**注** 通常第一项  $D_x^2$  主导。

**注** 回忆一下先前介绍的 Courant-Snyder 不变量,  $\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2 = \epsilon$ 。 $\mathcal{H}$  函数可视为当  $x = D\delta, x' = D'\delta$  时表征的不变量。在非弯转段,  $\mathcal{H}$  函数为不变量。一般来说,  $\mathcal{H} \propto \nu_x^{-3}$ 。

**注**  $\mathcal{H}$  函数在弯转段, 由于存在色散, 其值可能改变。 $\mathcal{H}$  函数表征的物理图像为纵向的能量偏差  $\delta \neq 0$  可能带给横向  $x, y$  方向不变量 (如: 发射度) 的影响。这个量在考虑同步辐射效应时常出现, 因为同步辐射过程, 电子在弯转段发出光子, 电子能量改变, 可能连带影响横向束团发射度改变, 或者影响抑制纵向集体效应的朗道阻尼。

第8章将介绍电子弯转时产生同步辐射过程的量子激发 (quantum excitation) 效应。量子激发效应将影响电子横向 betatron 振荡, 量子激发导致的电子横向振幅就可以用  $\mathcal{H}$  物理量描述。此处先给出结果, 电子储存环在同步辐射阻尼与量子激发效应情况下, 平衡态时有几何发射度<sup>36</sup>

$$\epsilon_x = C_q \frac{\gamma^2 \left\langle \frac{\mathcal{H}}{|\rho|^3} \right\rangle}{\mathcal{J}_x \left\langle \frac{1}{\rho^2} \right\rangle} \quad (7.260)$$

其中,  $C_q = \frac{55}{32\sqrt{3}} \frac{\hbar}{mc} = 3.83 \times 10^{-13} \text{ m}$ ,  $\langle (\dots) \rangle = \frac{1}{C} \oint (\dots) ds$ 。更多讨论可参考 §8.4.2。

<sup>36</sup>更准确的表示式需要利用同步辐射积分 (synchrotron radiation integrals)  $\mathcal{I}_j$ , 将在第8章介绍。

**性质 7.12. 几个估算磁聚焦结构函数数量级的公式**

假设加速器为平面环形加速器，则有

$$\langle \beta_x \rangle \approx \frac{R}{\nu_x} \quad (7.261)$$

$$\langle D_x \rangle \approx \frac{R}{\nu_x^2} \quad (7.262)$$

$$\langle \mathcal{H}_x \rangle \approx \frac{D_x^2}{\beta_x} \approx \frac{R}{\nu_x^3} \quad (7.263)$$

其中， $R = \frac{C}{2\pi}$  为储存环平均半径。 □

**练习 7.34** 试论述上面性质的结果。 ■

**解** 上述第一个结果可以通过 betatron tune 的积分式得到。第二个结果的推导假设了磁聚焦结构为 FODO，则色散函数的平均约为  $\langle D_x \rangle \approx \frac{D_F + D_D}{2} = \frac{L\theta}{\sin^2 \frac{\Phi}{2}}$ ，其中， $L$  为周期结构长度， $\theta$  为弯转角度， $\Phi$  为相位超前。对  $\Phi \leq 90^\circ$ ，近似处理  $\sin \frac{\Phi}{2} \approx \frac{\Phi}{2}$ ，有  $\langle D_x \rangle \approx \frac{4L\theta}{\Phi^2}$ 。考虑一储存环由  $N$  个 FODO 结构组成，则  $N\Phi = 2\pi\nu_x$ ， $2N\theta = 2\pi$ ， $2NL = 2\pi R$ 。于是，有

$$\langle D_x \rangle \approx \frac{R}{\nu_x^2}$$

第三个结果的推导可基于  $\mathcal{H}_x$  函数的定义，其中，通常  $\mathcal{H}_x$  中的第一项主宰，于是有

$$\mathcal{H}_x \approx \frac{D_x^2}{\beta_x} \approx \frac{(R/\nu_x^2)^2}{R/\nu_x} = \frac{R}{\nu_x^3}$$

**定律 7.2. 电子储存环的几个空间(磁聚焦结构函数)尺度**

对电子储存环，一般有

$$R(\sim 100\text{m}) \gg \bar{\beta}_{x,y}(\sim 10\text{m}) \gg D(\sim \text{cm}) \gg \mathcal{H}_{x,y} \quad (7.264)$$

其中， $R$  为储存环平均半径， $\bar{\beta}_{x,y}$  为平均 betatron 函数， $D$  为色散函数。 □

结束这一节前，总结一下单次经过加速器与储存环加速器的粒子六维相空间运动方程。这些方程中的横向部分是本章讨论重点。如果没有涉及粒子加速，则纵向运动方程  $\delta' = 0$ ， $z'$  方程可由哈密顿量结合哈密顿运动方程  $z' = \partial\mathcal{H}/\partial\delta$  得到。对储存环或同步加速器，列写粒子的纵向运动方程需要引入动量紧缩因子  $\alpha_c$  与滑相因子  $\eta = \alpha_c - \frac{1}{\gamma^2}$  概念，将在下一章介绍。

**定义 7.32. 单次经过加速器粒子六维相空间运动方程**

将六维相空间坐标写为  $(x, x', y, y', z, \delta)$ 。不考虑电磁辐射或集体效应，则束团中个

别粒子的运动方程有

$$\frac{dx}{ds} = x' \quad (7.265)$$

$$\frac{dx'}{ds} = -K_x(s)x + \frac{\delta}{\rho_x(s)} \quad (7.266)$$

$$\frac{dy}{ds} = y' \quad (7.267)$$

$$\frac{dy'}{ds} = -K_y(s)y + \frac{\delta}{\rho_y(s)} \quad (7.268)$$

$$\frac{dz}{ds} = -\left(\frac{x}{\rho_x(s)} + \frac{y}{\rho_y(s)}\right) \quad (7.269)$$

$$\frac{d\delta}{ds} = 0 \quad (7.270)$$

其中,  $l$  表示  $\frac{d}{ds}$ ,  $x, y, z$  为偏离参考粒子轨迹的位置坐标,  $(x, y, s)$  形成 Frenet-Serret 坐标系,  $\rho_{x,y}$  为横向水平 ( $x$ ) 与垂直 ( $y$ ) 方向的弯转半径。

假设加速器为平面加速器, 参考粒子的运动仅在  $(x, s)$  平面<sup>a</sup>, 不考虑横向垂直  $y$  方向<sup>b</sup>, 则方程简化为

$$\frac{dx}{ds} = x' \quad (7.271)$$

$$\frac{dx'}{ds} = -K_x(s)x + \frac{\delta}{\rho_x(s)} \quad (7.272)$$

$$\frac{dy}{ds} = y' \quad (7.273)$$

$$\frac{dy'}{ds} = -K_y(s)y \quad (7.274)$$

$$\frac{dz}{ds} = -\frac{x}{\rho_x(s)} \quad (7.275)$$

$$\frac{d\delta}{ds} = 0 \quad (7.276)$$

**注** 横向运动方程可以合写为一个二阶微分方程

$$x'' + K_x(s)x = \frac{\delta}{\rho_x(s)}$$

对  $y$  方向也有类似的形式。其一般形式(二阶微分方程)称为非齐次 Hill 方程。

**注** 纵向运动方程中的  $x$  项源于色散。如果考虑粒子加速、减速过程, 则  $\frac{d\delta}{ds} = -\kappa(s)z$ , 其中,  $\kappa = \frac{\Delta E_{\text{cav}} \omega_{\text{RF}}}{E_0 L_{\text{cav}} c} \cos \phi_s$ 。

**注** 这里  $z'$  方程的项源于哈密顿量中的  $-\frac{x\delta}{\rho_x}, -\frac{y\delta}{\rho_y}$  项。

**注** 如果考虑集体效应, 则应在  $dx'/ds, dy'/ds, d\delta/ds$  方程中加入表征集体效应的尾场或阻抗项。将在第 12 章、第 13 章介绍。

**注** 这里的方程适用于电子, 对于质子或离子, 在非极端相对论情况下(一般都是如此), 一般不用  $\delta$ 。

<sup>a</sup>对于参考粒子, 弯转平面仅在  $(x, s)$  平面, 弯转磁铁磁场方向仅沿  $y$  方向。

<sup>b</sup>但是, 对于非参考粒子, 存在横向垂直  $y$  方向运动。



**定义 7.33. 储存环粒子六维相空间运动方程**

将六维相空间坐标写为  $(x, x', y, y', z, \delta)$ 。不考虑电磁辐射或集体效应, 在固定参考能量情况下, 忽略储存环中局部色散效应 (即采用平滑近似), 也忽略横纵向耦合效应, 则束团中个别粒子的运动方程有

$$\frac{dx}{ds} = x' \quad (7.277)$$

$$\frac{dx'}{ds} = -\left(\frac{\nu_{x0}}{R}\right)^2 x \quad (7.278)$$

$$\frac{dy}{ds} = y' \quad (7.279)$$

$$\frac{dy'}{ds} = -\left(\frac{\nu_{y0}}{R}\right)^2 y \quad (7.280)$$

$$\frac{dz}{ds} = -\eta\delta \quad (7.281)$$

$$\frac{d\delta}{ds} = \frac{1}{\eta} \left(\frac{\nu_{s0}}{R}\right)^2 z \quad (7.282)$$

其中,  $l$  表示  $\frac{d}{ds}$ ,  $x, y, z$  为偏离参考粒子轨迹的位置坐标,  $(x, y, s)$  形成 Frenet-Serret 坐标系,  $\nu_{x0, y0, s0}$  分别为横向  $x, y$  的 betatron tune 与纵向  $z$  方向的 synchrotron tune,  $\eta = \alpha_c - \frac{1}{\gamma^2} \approx \frac{1}{\nu_{x0}^2} - \frac{1}{\gamma^2}$ 。

当束团为纵向未聚束束团 (coasting beam) 时, 即  $\nu_{s0} \rightarrow 0$ , 则有  $\frac{d\delta}{ds} = 0$ 。

**注** 纵向相关的物理量将在下一章介绍。

**注** 这里的  $\nu_{x0} = R/\langle\beta_x\rangle, \nu_{y0} = R/\langle\beta_y\rangle$ , 其中,  $R$  为储存环平均半径  $\geq \rho$ 。

**注** 明显地, 这里给出的方程做了平滑近似, 因此, 如果要分析储存环局部动力学过程, 以上结果不适用。□

最后, 提醒一下, 这一章我们只介绍单粒子、线性的动力学。尽管介绍了多粒子形成束团整体的描述方式, 但是忽略了粒子与粒子间的交互作用, 因此仍然是单粒子效应。此外, 考虑的磁聚焦结构部件为线性磁铁部件, 展现出来的运动应被视为线性运动, 且多半篇幅讨论的是横向一个维度的运动, 比如:  $x$  方向。尽管螺线管耦合了横向  $x, y$  两个维度, 但其运动仍是线性的。耦合  $\neq$  非线性。闭轨畸变、共振、色散、色品、 $\mathcal{H}$  函数等概念自然也都是线性物理图像。当然, 为了修正自然色品, 介绍了六极铁这类非线性磁铁部件。单粒子横向非线性动力学是一个活跃的研究课题, 特别是在储存环同步加速器中。

## 7.11 一个用来衡量储存环横向磁聚焦结构设计的物理量：动力学孔径

尽管这里不讨论单粒子的非线性运动，但一般来说——从历史发展角度来看也差不多是如此——在设计磁聚焦结构时，非线性效应对储存环横向动力学的影响总是希望被有效抑制的。也就是说，当我们希望造一台效能良好的储存环加速器，我们希望的是其当考虑了非线性因素影响之后，其磁聚焦结构的光学函数尽可能接近单纯线性传输理论的结果，即希望造一台尽可能线性的粒子加速器<sup>37</sup>。但是，设计一个要能实际用在真实加速器的磁聚焦结构，不仅需要考虑二极铁、四极铁等线性条件，还需要考虑高阶非线性效应、磁场误差等对束团的影响。非线性效应无所不在，它可以是二极铁、四极铁在制造时，偏离中心轴的横向剖面磁场分布不够均匀等。综合线性与高阶非线性效应的影响，很多时候我们不打算一阶一阶讨论，而是发明一个物理量用来衡量储存环横向磁聚焦结构总体设计，称动力学孔径 (dynamic aperture, DA)。



**笔记** 目前来说，加速器中非线性动力学多半研究的是单粒子、多圈非线性动力学，多半采用数值粒子跟踪模拟，少数采用基于哈密顿力学分析的理论方法。理论方法涉及较深的经典力学，此处不论。数值方法并不总是可靠，于是有时戏称“一笔糊涂账”。

目前普遍量化一磁聚焦结构设计的动力学孔径的办法为采用粒子跟踪模拟 (particle tracking simulation)。给定少许的、具有不同相空间坐标  $(x, x', y, y')$  作为初始条件的代表粒子，追踪过程对磁铁部件引入随机多极误差，在尽可能多圈的跟踪之后，记录这些粒子的相空间坐标，呈现在  $x$ - $y$  平面上即为动力学孔径，如图 7.47 所示。

动力学孔径越大越好。

一般来说，线性磁聚焦结构的动力学孔径最大。造成动力学孔径缩小的因素有：

- 六极铁及以上的高阶磁铁  $\Rightarrow$  为了修正四极铁非零色品，几乎不可避免要使用六极铁。并且，现在对于越低发射度的电子储存环，越要求更大的六极铁强度，因此非线性非常强。
- 插入节 (insertion device)，如：波荡器 (undulator)、扭摆器 (wiggler)  $\Rightarrow$  作为同步辐射储存环，这些部件是必备的，不能没有。这些部件也可能导致动力学孔径缩小。
- 储存环中磁铁排布的系统或随机误差  $\Rightarrow$  无法避免  $\Rightarrow$  尽量优化这些误差的幅值、位置分布等。

<sup>37</sup>美国费米实验室近年来建造了一比较不一样的粒子加速器，称可积光学测试加速器 (Integrable Optics Test Accelerator, IOTA)，为一周长约 40 m 的紧凑型储存环，主要用来研究基于特殊、高阶非线性磁铁形成的“可积光学磁聚焦结构”及其对带电粒子束的非线性效应，包含纯光学、空间电荷效应及其补偿的束流动力学，及对光学随机冷却 (optical stochastic cooling, OSC) 的研究等。此加速器装置的几个特点：通过适当的粒子束注入能量，该加速器能支持电子和质子运行。此外，该加速器相对紧凑，适合研究空间电荷效应主导的束流动力学。由于 IOTA 加速器采用的特殊、高阶非线性磁铁与其伴随的各种高阶、非线性效应等，需要对加速器磁聚焦结构光学进行精密调整、控制，因此，对束流量测、控制、诊断给出许多挑战。关于 IOTA 加速器装置的介绍，可参考 S. Antipov et al., IOTA (Integrable Optics Test Accelerator): facility and experimental beam physics program, JINST 12 T03002 (2017). <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1748-0221/12/03/T03002/pdf>。

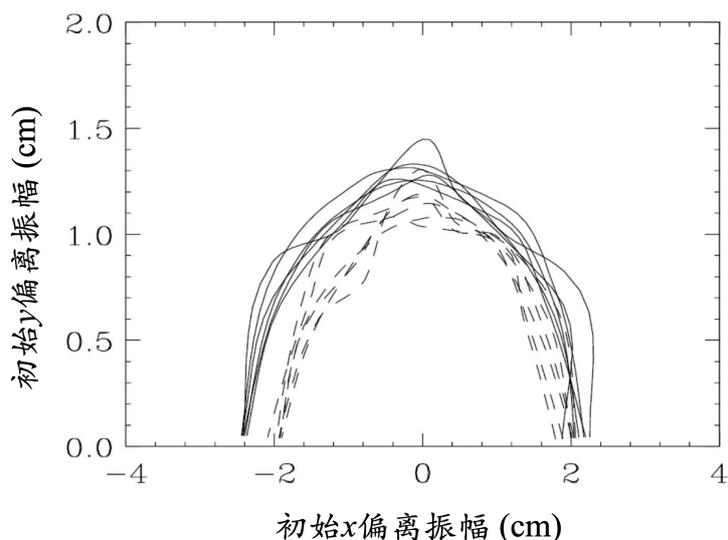


图 7.47: 基于 SPEAR3 储存环计算的动力学孔径, 由六个不同横向相空间坐标作为初始条件逐圈跟踪粒子, 记录其  $(x, y)$  值得到。实线: 所有跟踪粒子的初始  $\delta = 0$ 。虚线: 考虑了 3% 差异的不同粒子的初始  $\delta$ 。此处不考虑粒子纵向同步振荡 (第8章将介绍), 也忽略集体效应。图例取自 Handbook, p.113。

当动力学孔径太小时, 将影响:

- 上游注入粒子束, 容易导致注入过程粒子丢失。
- 束团寿命减短。

目前来说, 如何有效且准确 (efficiently and accurately) 计算一磁聚焦结构的动力学孔径, 为束流动力学中的经典难题。以上介绍的粒子跟踪模拟只是直观的方法, 但不是唯一方法, 并且有时候此种方法给出的结果也不可靠<sup>38</sup>。目前来说, 关于动力学孔径的计算面临几个处境:

1. 计算、模拟的结果与包含的效应有强烈依存关系, 应包含哪些效应, 目前尚无定论。
2. 如何定义动力学孔径的边界, 比如: 在绕行  $10^4$  圈后、 $10^6$  圈后或  $10^8$  圈后? 长时间尺度的粒子跟踪模拟 (long-term particle tracking) 非常耗时。
3. 完整的动力学孔径不是二维  $x-y$  的, 而是高维度的, 怎么量化才是最准确的?
4. 如何更好地优化一加速器设计的动力学孔径。

如何更好地优化一加速器设计的动力学孔径? 虽然没有明确、最优的步骤, 但是目前普遍认为以下两个方法能够有效维持足够大的动力学孔径:

- 六极铁安置在  $-II$  的磁聚焦结构单元节、
- 使磁聚焦结构设计更具对称性, 即更具周期结构。



**笔记** 动力学孔径的概念相对于静态孔径 (static aperture), 即金属真空管壁的孔径, 又称

<sup>38</sup>非线性动力学有时候异常复杂, 且匪夷所思。比如, 粒子在储存环中稳定地绕行  $10^6$  圈之后, 不能排除可能在  $(10^6 + 1)$  圈丢失。

物理孔径 (physical aperture)。为什么不用静态孔径描述就好，而费力计算动力学孔径？首先，动力学孔径  $\neq$  金属真空管壁的孔径。称其为“动力学”，表示其代表粒子运动过程扫出来的有效边界，振荡振幅比此动力学孔径边界大的粒子，终将丢失；只有比动力学孔径边界小的粒子才“可能”存活 (如果不考虑集体效应)。

**注** 以上讨论为衡量储存环横向磁聚焦结构设计性能的物理量。一个表征储存环纵向动力学表现的物理量：能量接受度 (energy acceptance)，通常为纵向相空间“高度”(bucket height)，将在 §8.2 介绍。

磁聚焦结构设计没有唯一解。一个好的储存环磁聚焦结构设计就像一件艺术品。

除了动力学孔径，衡量非线性效应对横向动力学的影响还有一个有力的工具，目前已得到广泛使用，且能揭示更多的物理内涵，称频率映射分析法 (frequency map analysis, FMA)，在 1990 年由天体物理学家 Jacques Laskar 提出。细节此处不论，仅简单介绍，图 7.48 为典型的 FMA 图谱。

FMA 的呈现方式一般有二：

- 独立跟踪多个粒子多圈，记录粒子的逐圈信息，利用基本频率数值分析 (Numerical Analysis of Fundamental Frequencies, NAFF)<sup>39</sup>，分析个别粒子在前面几圈、中间几圈、后面几圈的 betatron tunes，据此计算 tune 的扩散速率 (diffusion rate)，呈现为  $(\nu_x, \nu_y)$  图谱。图上每个点表征每个不同的跟踪模拟粒子。
- 将对应不同 tune 数值与强度的不同粒子，在多圈跟踪后，画在  $(x, y)$  图上，颜色仍承接  $(\nu_x, \nu_y)$  图谱。



**笔记** FMA 对高维度、准周期 (quasi-periodic) 动力学系统的分析非常有用。感兴趣的读者可以参考 J. Laskar, Frequency map analysis and particle accelerators, PAC (2003). <https://accelconf.web.cern.ch/p03/PAPERS/WOAB001.PDF>。利用 FMA 分析同步辐射光源单电子动力学的讨论可参考 L. Nadolski and J. Laskar, Review of single particle dynamics for third generation light sources through frequency map analysis, Phys. Rev. ST Accel. Beams **6**, 114801 (2003). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.6.114801>。

**注** 前面介绍的单粒子共振条件的一般形式为  $m_x\nu_x + m_y\nu_y + m_z\nu_s = \ell$ ，其中， $(m_x, m_y, m_z, \ell) \in \mathbb{Z}$ 。由此可想像，如果也将纵向  $\nu_s$  影响列入考虑时，上面  $(\nu_x, \nu_y)$  图中的共振线会等效加粗，挤占工作点存活空间。

<sup>39</sup>NAFF 是一种高精度频谱分析方法，主要用于确定信号中的基本频率 (betatron tune) 及其对应的幅值和相位。NAFF 结合傅里叶变换和迭代优化，以极高的精度提取周期信号中的频率成分。与快速傅里叶变换 (fast Fourier transform, FFT) 不同，NAFF 从信号中提取一个频率成分后，将其从原信号中去除，再对剩余信号重复上述过程。通过拟合和优化，NAFF 进一步提高频率的计算精度，通常能达到比 FFT 更高的频率分辨能力。

