

电磁辐射与加速器束流动力学导论

**Introduction to Accelerator Beams, Collective Dynamics,
Electromagnetic Radiation and Free-electron Lasers**

作者：蔡承颖 (Cheng-Ying Tsai, C.-Y. Tsai)

特别声明

此笔记/讲义非最终版，内容可能存在笔误、谬误，仍在迭代修改中。此讲义不定期更新。

第四章 同步辐射

内容提要

- 同步辐射张角 $\theta \approx \frac{1}{\gamma}$
- 对足够长弯转磁铁，同步辐射特征频率 $\omega_c \approx \frac{3c\gamma^3}{2\rho}$ ，纵向形成长度约为 ρ/γ
- 对短弯铁 $L < 2\rho/\gamma$ ，同步辐射特征频率 $\omega_{\text{typ}} \approx \frac{2c\gamma^2}{L}$
- 同步辐射由横向水平极化主导 $P_\sigma : P_\pi \approx 7 : 1$
- 同步辐射是量子力学效应，不是经典力学效应
- 辐射形成长度
- 辐射屏蔽因子

在第2章与第3章介绍了电磁辐射的基础之后，这一章与下一章将重点介绍两种在电子加速器中常见的辐射机制：同步辐射与波荡器辐射。尽管这一章的讨论将涉及同步辐射场能量的计算，同时由能量守恒知道，电子能量将因此损耗而减少。但是，当我们计算同步辐射场能量时，仍假设电子能量不变，暂时忽略因此造成的电子能量损失。

实验上，同步辐射 (synchrotron radiation) 首次于 1947 年美国通用电气公司 (General Electric) 同步加速器¹意外发现，名称虽带有历史因素，但不仅限于在同步加速器中发出的辐射^{2,3}。



笔记 关于同步辐射早期历史进展，可参考 John P. Blewett, Synchrotron Radiation – Early History, *J. Synch. Rad.* **5**, 135 (1998). <https://doi.org/10.1107/S0909049597043306> 或 Giorgio Margaritondo, The evolution of a dedicated synchrotron light source, *Physics Today* **61**, 37-43 (2008). <https://doi.org/10.1063/1.2930734>。

作为高频电磁辐射机制的一种，许多近代同步辐射理论在 1940-1950 年期间由美国物理学家 J. Schwinger⁴给出，其主要贡献包含：分析同步辐射特征频率、同步辐射功率角分布、同步辐射偏振或极化分布、量子力学修正等。



笔记 二十世纪中之前，同步辐射理论的探索相对缓慢，究其原因，可能有：

- 当时还无法产生高能电子束，缺乏“动机”。

¹电子同步加速器能量约 70 MeV，轨道半径约 0.3 m，弯转磁场强度约 0.81 T。

²同一时期，在通用电气公司还有 100 MeV 的电子感应加速器 (betatron)。如果当时是在那个机器上首次观察到电磁辐射，那么现在可能就不再称同步辐射，而是“贝他”辐射 (betatron radiation)。相较于 100 MeV 电子感应加速器，当时 70 MeV 的同步加速器碰巧采用了一段透明玻璃真空管道，因此才能从肉眼直接、意外地看到同步辐射光。

³有些天体物理学家或许不能同意这里“同步辐射首次于 1947 年同步加速器发现”的描述。他们认为同步辐射在古代就被观测到了，称为蟹状星云 (crab nebula)，据记录，为 1054 年中国和阿拉伯天文学家在地球上观测记录到的超新星爆发遗迹，在 1731 年由英国天文学家发现，位于金牛座，距离地球约 6500 光年。

⁴在此讲义 §1.12 提到，施温格对推进波导与谐振腔理论进展扮演重要角色。对包含许多冗长繁难的同步辐射理论计算，施温格的贡献也同样不可忽视。

- 相对于使用的经典电动力学，当时量子力学更迅猛发展。

一般来说，同步辐射光源具有以下定性特性：

- 高辐射功率
- 高亮度
- 高度准直性(方向性)
- 辐射频谱为连续宽谱
- 偏振性(非单一全偏振)
- 高稳定性，受益于同步加速器储存环
- 可计算性

4.0 问答预览

1. 什么是同步辐射？

⇒ 同步辐射是高能电子在横向磁场中运动时，由于洛伦兹力作用，电子经历横向向心加速运动而发出的电磁辐射。

2. 同步辐射有什么特点？

⇒ 高辐射功率、高亮度、高度准直性、辐射频谱为连续宽谱、线偏振主导、高稳定性、可计算性。

3. 同步辐射的张角是多少？

⇒ 同步辐射的张角约为 $1/\gamma$ ，其中， γ 为粒子的相对论洛伦兹因子。

4. 同步辐射的特征频率是多少？

⇒ 对足够长弯转磁铁，同步辐射特征频率 ω_c 约为 $3c\gamma^3/2\rho$ ，其中， c 为光速， ρ 为弯转半径。

5. 同步辐射的极化特性是什么？

⇒ 同步辐射主要由横向水平极化主导，辐射功率 $P_{\sigma, \text{水平}} : P_{\pi, \text{垂直}} \approx 7 : 1$ 。

6. 同步辐射的形成长度是什么？

⇒ 纵向形成长度约为 ρ/γ ，横向形成长度约为 $\lambda/\Delta\psi$ ，其中， λ 为波长， $\Delta\psi$ 为张角。

7. 同步辐射屏蔽效应是什么？

⇒ 金属管壁会屏蔽掉那些对应横向形成长度长于管壁尺寸的波长。

8. 中心极限定理在同步辐射中有什么应用？

⇒ 中心极限定理可以用来解释大量光子叠加后，光子能量的概率分布接近高斯分布。

9. 同步辐射的应用有哪些？

⇒ 同步辐射光源在科学研究中有着广泛的应用，比如材料科学、生物医学、环境科学等领域。

10. 如何计算同步辐射功率？

⇒ 同步辐射功率可以通过经典电动力学方法计算。更准确的计算则可以通过量子力学。

方便起见，这一章将讨论的空间坐标变量如图 4.1 所示。

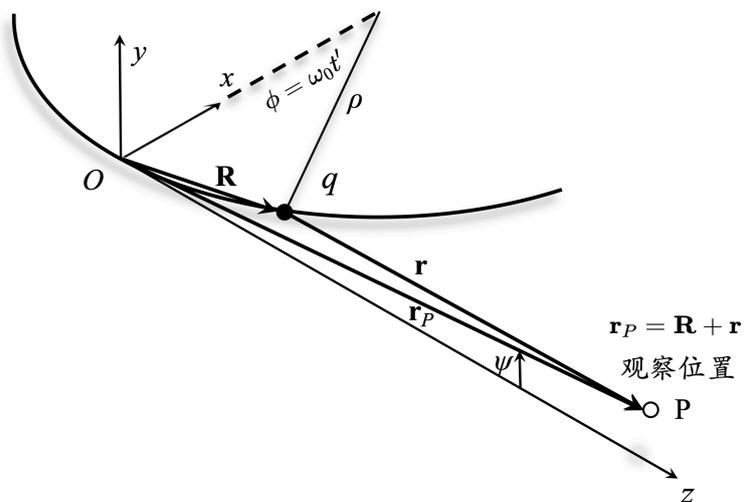


图 4.1: 用于描述同步辐射的空间坐标变量, 有 $\omega_0 = \beta c / \rho$ 。按此图, 推迟条件要求 $t = t' + r(t')/c$, 其中, $r(t') = |\mathbf{r}(t')| = |\mathbf{r}_P - \mathbf{R}(t')|$ 。

4.1 同步辐射的定性讨论

4.1.1 同步辐射张角 $\theta \approx \frac{1}{\gamma}$

这里指的同步辐射张角是在实验室静止坐标系下的观察，涉及相对论多普勒效应。前面已经介绍过，这里再总结一下。

定理 4.1. 相对论多普勒效应

考虑在移动坐标系 (I') 中，电磁场传播相对方向为 $\cos \theta' = \frac{k'_z}{k'}$ ，则在实验室坐标系中，有

$$\tan \theta = \frac{k_y}{k_z} = \frac{k'_y}{\gamma(k'_z + \beta \frac{\omega'}{c})} = \frac{\sin \theta'}{\gamma(\cos \theta' + \beta)} \Rightarrow \theta \sim \frac{1}{\gamma} \quad (4.1)$$

$$\omega = \frac{\omega'}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)} \approx \frac{2\gamma\omega'}{1 + \gamma^2\theta^2} \Rightarrow \omega \sim 2\gamma\omega' \quad (4.2)$$

其中，假设 $\gamma \gg 1, \beta \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2}, \cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ 。

注 以上推导假设 $\omega' = ck'$ ，即在移动坐标系中，必须是时变电磁场。在移动坐标系中的静电场不适用。

由上可知，同步辐射张角 $\theta \approx \frac{1}{\gamma}$ 。此与上一章利用 Lienard-Wiechert 场分析的结果一致，参考图 3.3 及其讨论。

4.1.2 同步辐射特征频率 $\omega_c \approx \frac{3c\gamma^3}{2\rho}$

当电子经历弯转段，由于横向加速而发出辐射时，作为远处观察者，观察到的电磁信号是随时间改变的，像一个时间脉冲，为时变信号。将此时变信号做傅里叶变换，就存在一主频率成分，又称特征频率。此小节先通过定性讨论给出同步辐射特征频率估算，下一节将通过定量计算与傅里叶变换，同样能够给出一致结果。

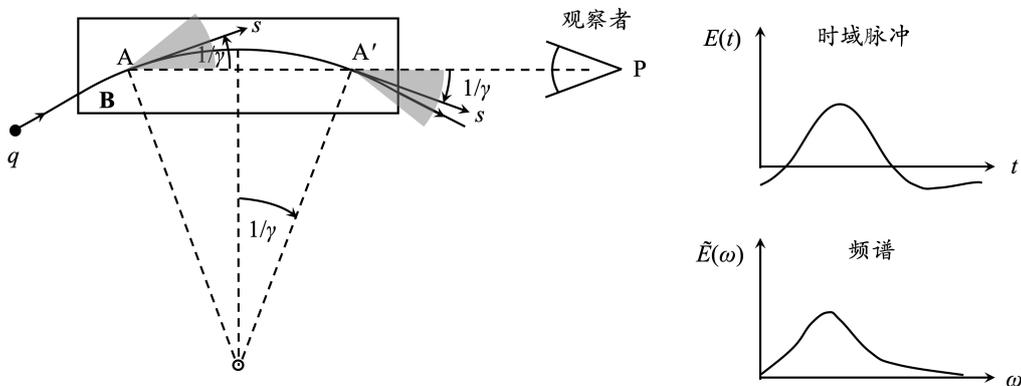


图 4.2: 电子经过足够长的弯转磁铁产生同步辐射。

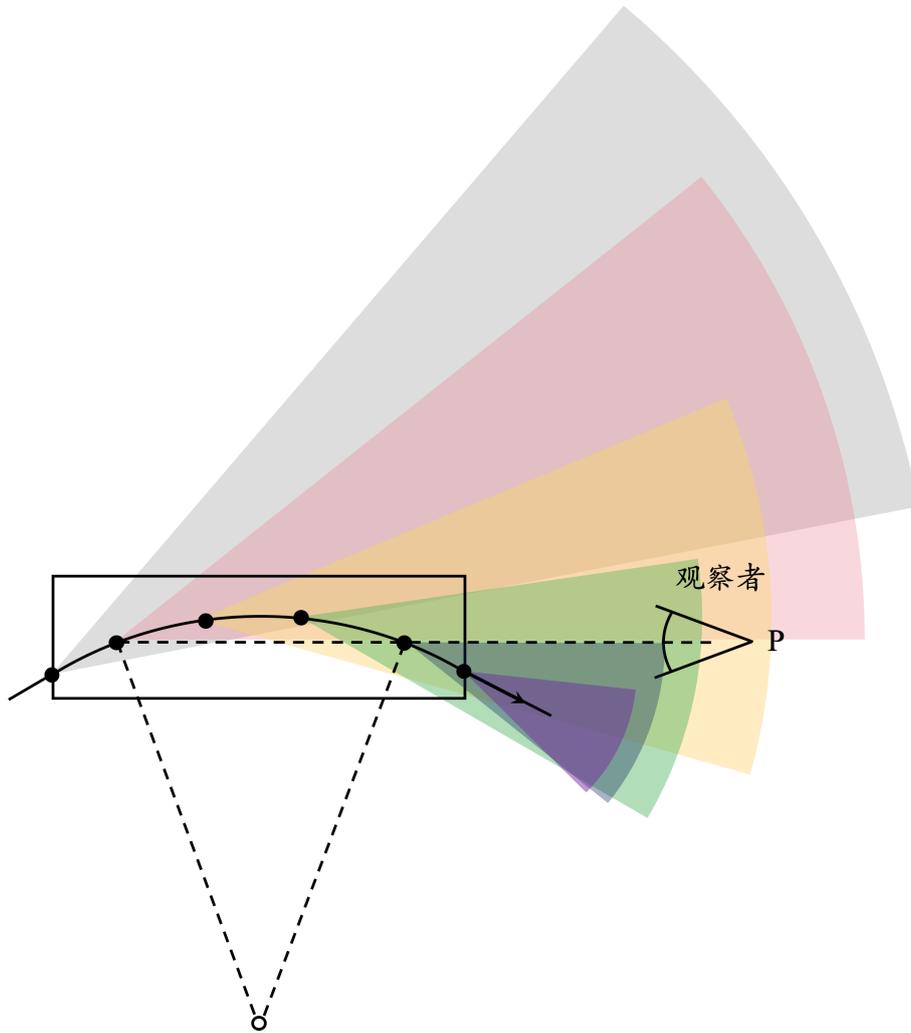


图 4.3: 电子经过足够长的弯转磁铁过程, 在不同位置产生的同步辐射与观察位置的相对关系。

由图 4.2 与 4.3, 假设 t_s 是电子进入至离开弯铁所走过弧 (arc) 需要的时间, 离开弯铁的此时, 最初发出的光子走直线可能已经超过或即将追上电子。站在观察者位置 P, 接收到的信号时间长度被“压缩”(因为光子走直线, 追上电子), 压缩了 t_γ 。 t_γ 为电磁波或光子走直线距离需要的时间。故, 观察者位置 P 接收到的信号时间长度为 $t_s - t_\gamma$, 有

$$\Delta t = t_s - t_\gamma = \frac{2\rho}{\beta\gamma c} - \frac{2\rho \sin(\frac{1}{\gamma})}{c} \approx \frac{4\rho}{3c\gamma^3} \quad (4.3)$$

则主频率成分可以估算为 $\omega_{\text{typ}} \approx \frac{1}{\Delta t} \approx \frac{3c\gamma^3}{4\rho}$, 其中, ρ/γ 又称纵向形成长度 (formation length)。留意, 这里得到的辐射主频率 (特征频率) 与磁铁长度无关。

 **笔记** 同步辐射光源的主频率成分为 UV 或 X 射线。这里估算一下, 基于典型的同步辐射环形加速器参数, 是得到的主频率成分为 UV 或 X 射线。取弯转半径 $\rho \sim 10$ m, 能量 3 GeV ($\gamma \approx 6000$), 则

$$f_c = \frac{3c\gamma^3}{4\pi\rho} \sim 1.5 \times 10^{18} \text{ Hz}$$

确实落在 X 射线频段。

 **笔记** 观察者 P 接收的时间长度为 Δt 可以通过上述动态过程推论, 还可以通过洛伦兹变换与相对论多普勒效应得到。电子两次放出辐射的时间差为 $\Delta t' = \frac{2\rho}{\beta\gamma c}$, 由第 2 章介绍的推迟关系, 结合洛伦兹变换, 在观察位置 P 的时间差有

$$\Delta t = (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \Delta t' \approx \left(\frac{1}{2\gamma^2} \right) \Delta t' \sim \frac{\rho}{\gamma^3 c} \quad (4.4)$$

其倒数给出主频率成分。参考图 4.4。

如果只看图 4.4 中不同颜色 (即不同位置与不同时刻产生的场) 较密集的线, 会发现它们的波前包络形成“类似”于螺旋曲线 (spiral curve)⁵, 如图 4.5 给出。左图用箭头标注的是波前方向, 往反方向延伸则对应稍早时刻发出辐射的电子的位置。

上面假设弯转磁铁足够长, 能够形成一个完整的同步辐射信号, 其辐射主频率 (特征频率) 与磁铁长度无关, 仅与弯转半径 ρ 有关。如果弯转磁铁不够 $2\rho/\gamma$ 长度, 如图 4.6, 那么, 特征频率怎么描述?

按类似的论证, 观察者 P 接收到的信号时间长度约为

$$\Delta t_{\text{sm}} = t_s - t_\gamma = \frac{2\rho}{\beta c} \sin^{-1} \left(\frac{L}{2\rho} \right) - \frac{L}{c} \approx \frac{L}{\beta c} (1 - \beta) \approx \frac{L}{2c\gamma^2} \quad (4.5)$$

⁵感兴趣的读者可以自行探索, 此波前包络满足如下方程

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \rho \cos(\theta_0 - \theta) - \frac{\rho\theta}{\beta} \sin\left(\theta_0 - \theta \pm \frac{1}{\gamma}\right) \\ y(\theta) &= \rho \sin(\theta_0 - \theta) + \frac{\rho\theta}{\beta} \cos\left(\theta_0 - \theta \pm \frac{1}{\gamma}\right) \end{aligned}$$

其中, ρ 为弯转半径, θ_0 为电子初始极坐标角度位置, β, γ 为洛伦兹相对论因子。

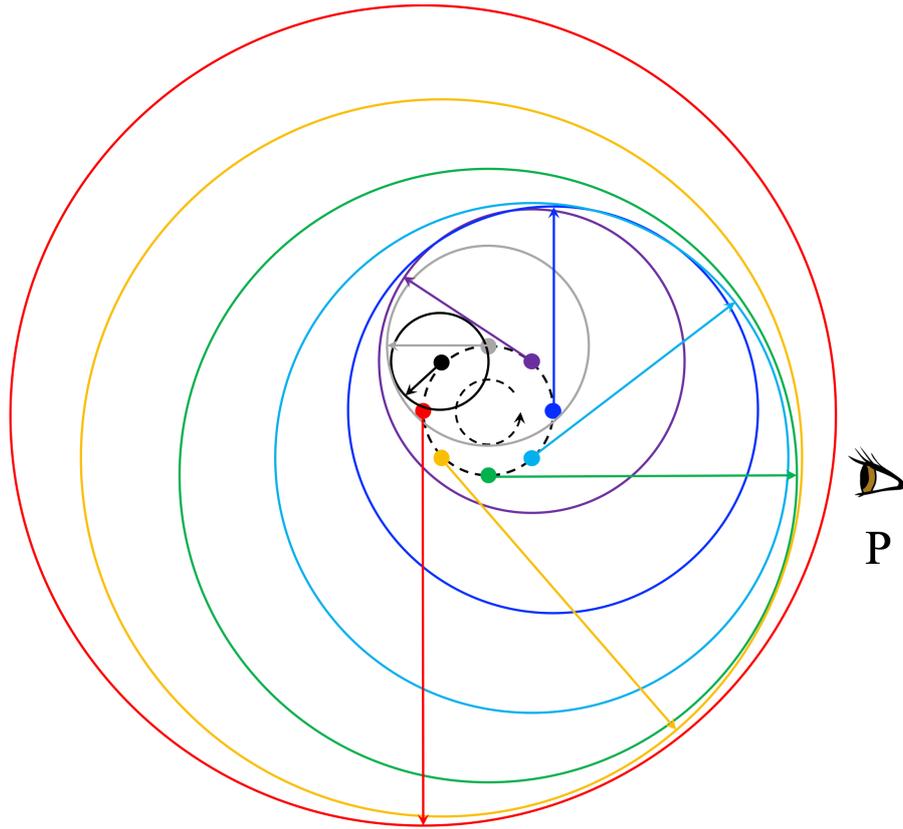


图 4.4: 相对论电子沿着黑色虚线形成的圆形轨道绕行发出同步辐射场, 在稍微不同位置发出沿切线方向小角度传播的辐射场, 叠加形成辐射脉冲。红色为较早时刻的电子与发出的辐射波前, 按橙、绿、蓝、紫、灰逐次演化。

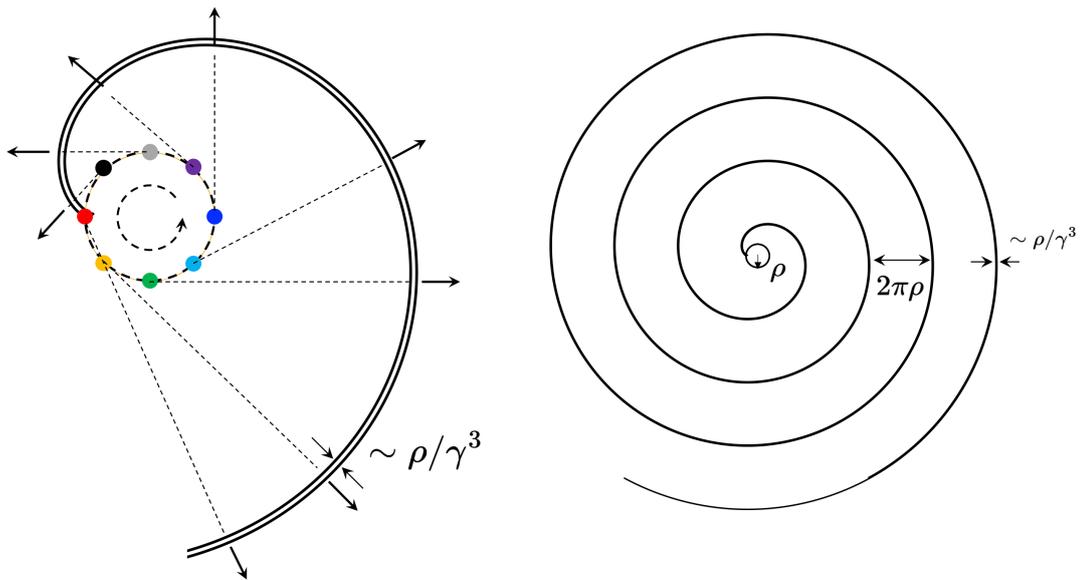


图 4.5: 同步辐射场较密集的波前包络形成类似于螺旋曲线。这些包络“甩”出来的场间隔约 $2\pi\rho$, 即电子绕行的圆周长, 包络的粗度对应完整辐射脉冲的时间长度 $\sim \rho/\gamma^3$ 。

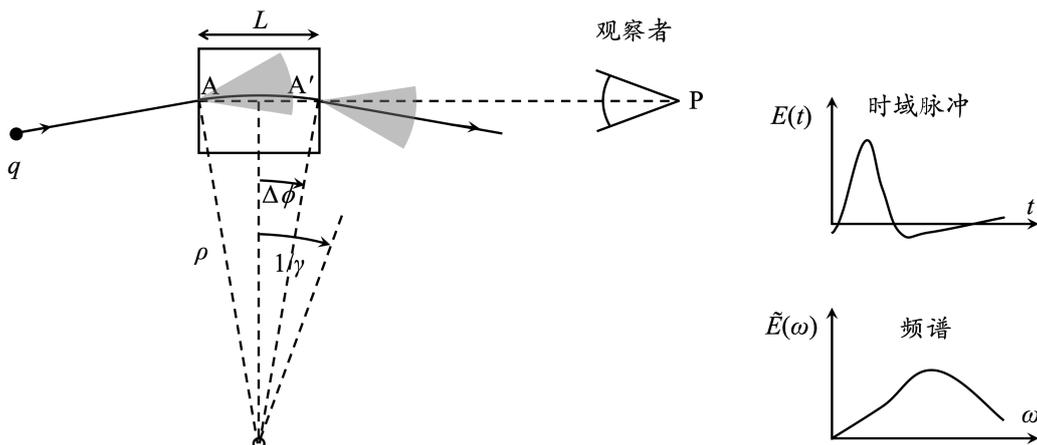


图 4.6: 电子经过不够 $2\rho/\gamma$ 长度的弯转磁铁时产生的同步辐射。

则, $\omega_{\text{typ}} \approx \frac{1}{\Delta t} \approx \frac{2c\gamma^2}{L}$, 与磁铁长度成反比, 与弯转半径无关 (一阶情况)。此种情况的辐射场又称边缘辐射 (edge radiation)。

练习 4.1 将此与磁铁长度相关的特征频率估算与前面足够长磁铁给出的特征频率对比, 验证 $L \sim \rho/\gamma$, 即为纵向辐射脉冲形成长度。 ■

4.1.3 同步辐射由横向水平极化主导 $P_\sigma : P_\pi \approx 7 : 1$

辐射场的极化方向由其电场分量的振荡方向决定。由图 4.7, 结合对 Lienard-Wiechert 场的定性认识

$$\mathbf{E}(t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left\{ \frac{[\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]]}{r(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right\}_{\text{ret}} \quad (4.6)$$

由 $\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]$ 的方向判断, 可以得到同步辐射由横向水平极化主导。在 xz 平面上, 观察者只接收到水平极化电场; 离开 xz 平面, 则辐射场包含部分水平 (σ) 极化与部分垂直 (π) 极化。它们的辐射功率比约有 $P_\sigma : P_\pi \approx 7 : 1$ 。

关于不同极化间辐射功率比例的定量讨论将在后面讨论。

4.1.4 同步辐射是量子力学效应, 不是经典力学效应

虽然这里定性介绍用的是经典力学语言, 但是辐射过程本质上为量子力学过程。这是后见之明; 半经典 (semi-classical) 力学方法已经可以帮助我们了解许多同步辐射场的特性。对于一些经典力学无法挖掘的同步辐射特性, 将在后面定量讨论介绍。

电子辐射过程即为电子发出光子过程。电子发出光子的过程先由与“虚”光子 (virtual

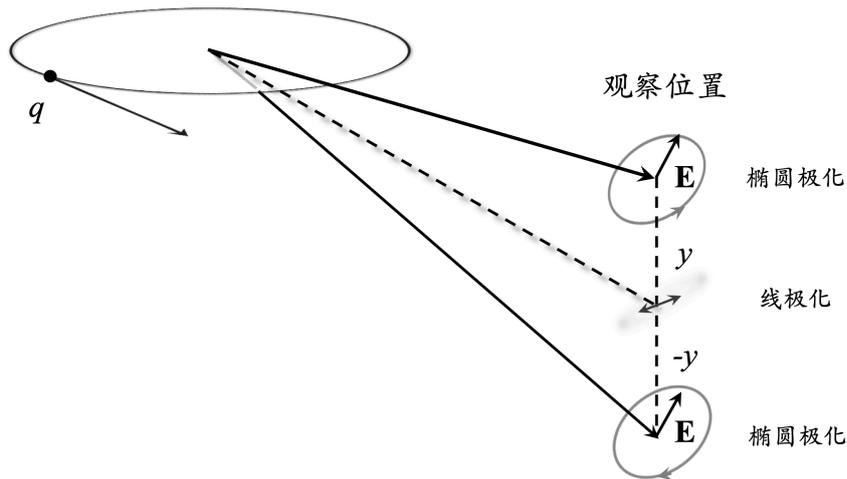


图 4.7: 电子经过足够长的弯转磁铁产生同步辐射时, 远处观察者 P 接收到的电场极化方向。

photon) 作用开始⁶: 电子在弯转过程产生虚光子, 虚光子衰减形成正负电子对 (偶极子), 其中正电子与入射电子散射, 形成“实”光子 (real photon), 参考图 4.8。形成长度 $\sim \rho/\gamma$ 表征电子需要一段有限长度才能发出“实”光子。单个电子在不同时刻发出同步辐射光子的过程彼此为独立 (independent) 事件过程, 即, 不同的辐射形成长度间是独立的。

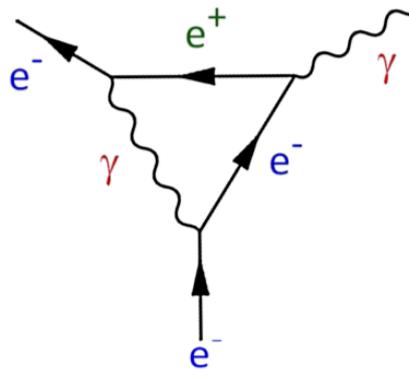


图 4.8: 费曼图 (Feynman diagram), 表征电子经过弯转磁铁产生同步辐射的量子力学过程。

注 对同步辐射的光子动力学过程, 感兴趣的可参考 A. Novokhatski, Field dynamics of coherent synchrotron radiation using a direct numerical solution of Maxwell's equations, Phys. Rev. ST Accel. Beams **14**, 060707 (2011). <https://journals.aps.org/prab/abstract/10.1103/PhysRevSTAB.14.060707>



笔记 在加速器束流动力学分析中, 什么时候经典力学方法失效?

- 一、考虑同步辐射的量子激发效应 \Rightarrow 用 random walk 模型可以处理, 因为发出光子过程满足随机分布, 即发出接连两个光子的事件可视为独立事件。将在 §8.4 讨论。
- 二、当光子能量与电子本身能量在同一数量级时, 所幸此情况一般不是加速器考虑的情

⁶虚光子在弯转磁铁的磁场里。

况。

三、核物理实验很多时候需要粒子束为自旋极化束，因此在加速器束流动力学分析时需要考虑粒子自旋动力学 (spin dynamics) \Rightarrow 用 Thomas-BMT 方程。

 **练习 4.2** 考虑一个中学时学过，但没有进行实际估算的问题：用经典力学方法评估氢原子外最低阶轨道 $n = 1$ 电子绕行一圈的辐射能量，估算至多绕行几圈就会塌陷？ ■

解 利用 $U_s = P_s \frac{2\pi\rho}{\beta c} = \frac{4\pi r_e m_e c^2 \beta^3 \gamma^4}{3\rho}$ ，其中， $r_e = 2.8 \times 10^{-15}$ m, $v \approx 2 \times 10^6$ m/s, $\rho = 5.3 \times 10^{-11}$ m, 则 $U_s \approx 0.000034$ eV。游离能量为 13.6 eV, 因此大约 $13.6/0.000034 \approx 4 \times 10^5$ 圈之后塌陷。其实应该更快些，因为半径 ρ 逐渐变小。

$$\frac{m_e v^2}{a_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a_0^2} \Rightarrow v = e \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 m_e a_0}}$$

其中， $a_0 \approx 5.3 \times 10^{-11}$ m 为波尔半径 (Bohr radius)。 ■

注 以上模型显然与现实不符，因此才有了量子力学。其中，Bohr 原子模型说：

- 电子绕行存在稳定态而“不”辐射。
- 电子的稳态“轨道”存在的条件：当电子绕行原子核的角动量 $\tau = m_e v r$ 满足约化普朗克常数 (reduced Planck constant) 的整数倍时，即 $m_e v r = n\hbar$ ，其中， $\hbar = h/2\pi$ ， h 为普朗克常数 (Planck constant)。
- 电子在稳态“轨道”间转移将放出或吸收电磁辐射 (光子)，其对应的能量为 $\Delta E = \pm h\nu$ ，其中， ν 为光子频率。

 **笔记** 在上面练习中，电子速率 $v = 2 \times 10^6$ m/s 的估算为 $v \approx \alpha_f c \approx 3/137 \times 10^8 \approx 2 \times 10^6$ m/s，其中 α 为精细结构参数 (fine structure constant)，无量纲。精细结构参数“为什么是这个数值、如何从第一原理推导”目前没有定论。但是，它到处出现，随不同作用力数值有所不同。

- 根据不同作用而异。作用力越大， α 越大。
- 目前已知对电磁作用，有 $\alpha_f \approx 1/137 \approx 0.0073$ 。
- 比这个值小时，原子分子外的电子容易脱离而不再稳定。
- 比这个值大时，电子与核靠得近，只剩核作用而没有化学作用。
- 当 α 与 $1/137$ 相差 4% 以上，自然界将不再有碳原子。

4.2 同步辐射的定量讨论

下面的定量讨论采用四个简化假设：

1. 磁铁长度大于纵向形成长度，即 $L > 2\rho/\gamma$ 。
2. 远场近似，即 $r_P \gg \rho/\gamma$ 。
3. 极端相对论电子，即 $\gamma \gg 1$ 。
4. 电子发出辐射时，暂时不考虑辐射的“反作用”。反作用效应将在第 8 章讨论。

以下讨论从频域分析开始，先考虑电子“单次”经过弯转段，因此，辐射频谱为连续谱。接着，考虑电子周期性经过弯转段，如：电子同步加速器或储存环，此时的辐射频谱将不再是严格的连续谱。

如果任性地假设电子发出辐射前后能量不变，那么周期运动的电子会在频谱上形成离散的谱线。但是，实际情况下，由于电子逐圈补偿能量与辐射能量损失存在微小差异或是电子束团本身存在能散，因此，这些离散的谱线将变得模糊而仍像连续谱。此外，这里定量分析采用经典力学方法，同步辐射过程为量子力学过程，电子放出光子的过程具有随机性，辐射频谱将不再是理想的离散谱线。辐射频谱仅在低频区间才可能出现较明显的离散谱线。

以下总结计算过程需要把握的几个原则：

1. 计算电子运动学物理量，包含 $\boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{r}_P, \mathbf{R}$ 等。
2. 对 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_P - \mathbf{R}, t_P = t - \frac{r_P}{c}$ 进行必要化简⁷，如：远场近似等。
3. 计算并化简一些关键的复合量，如： $[\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]]$ 、 $[\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}]]$ 。
 \Rightarrow 化简过程涉及 $\frac{\rho}{\gamma r_P} \ll 1$ 为一小量，指数项以外一阶近似足够⁸，指数项包含相位信息可能需要展开到二阶。
 \Rightarrow 实用近似： $|\sin(\omega_0 t')| \lesssim \frac{1}{\gamma}$ ， $1 - \cos(\omega_0 t') \lesssim \frac{1}{2\gamma^2}$ ， $|\sin \psi| \lesssim \frac{1}{\gamma}$ 。
4. 将以上运动学物理量代入 Lienard-Wiechert 场的时域或频域⁹表示式

$$\mathbf{E}(t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left\{ \frac{[\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]]}{r(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right\}_{\text{ret}} \quad (4.7)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}(\omega) = -\frac{i\omega q}{4\pi\epsilon_0 c r} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}]] e^{i\omega \left(t' + \frac{r(t')}{c} \right)} dt' \quad (4.8)$$

⁷留意，这里的 t_P 不是前面介绍的推迟关系 $t = t' + r(t')/c$ 中在观察位置 \mathbf{P} 的 t 时刻。这里的 $t_P = t - r_P/c$ 为观察位置 \mathbf{P} 在 t 时刻的“平移”，平移了 r_P/c 。在 A. Hofmann 一书中称 t_P 为约化的观察时刻 (reduced observation time)，后面将发现，用 t_P 这个物理量能方便后面辐射场的计算。指数项 $i\omega t_P$ 与 $i\omega t$ 仅差一个常数相位，不影响对辐射场特性的讨论。

⁸若一阶项都消掉了，则需要保留二阶项。

⁹第3章讨论过，Lienard-Wiechert 场的时域与频域表示式不是等价的；频域表示式已经包含上面化简的假设。此外，频域需要对 t' 积分。

其中，对电子而言， $q = -e$ 。

4.3 一些计算细节

按照上一节总结的几个原则，分析同步辐射场特性¹⁰。首先，

1. 计算电子运动学物理量，在直角坐标系，有 $\omega_0 = \beta c/\rho$ 、 $\frac{1}{\rho} = \frac{|e|B}{p} = \frac{|e|B}{m_e c \beta \gamma} \approx \frac{|e|Bc}{m_e c^2 \gamma}$ 、 $\dot{\beta} = \beta \omega_0 = \beta^2 c/\rho$ 、 $\mathbf{r}_P = r_P[0, \sin \psi, \cos \psi]$ 与

$$\mathbf{R}(t') = \rho [(1 - \cos(\omega_0 t')), 0, \sin(\omega_0 t')] \quad (4.9)$$

$$\boldsymbol{\beta}(t') = \beta [\sin(\omega_0 t'), 0, \cos(\omega_0 t')] \quad (4.10)$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}(t') = \dot{\beta} [\cos(\omega_0 t'), 0, -\sin(\omega_0 t')] \quad (4.11)$$

2. 对 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_P - \mathbf{R}$ 、 $t_P = t - \frac{r_P}{c}$ 进行必要化简，在直角坐标系，有

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_P - \mathbf{R} = [-\rho(1 - \cos(\omega_0 t')), r_P \sin \psi, r_P \cos \psi - \rho \sin(\omega_0 t')] \quad (4.12)$$

观察位置 P 不动的话， t_P 无异于 t 。

$$\begin{aligned} r &= r_P \sqrt{1 - 2 \frac{\rho}{r_P} \cos \psi \sin(\omega_0 t') + 2 \left(\frac{\rho}{r_P}\right)^2 (1 - \cos(\omega_0 t'))} \\ &\approx r_P \left(1 - \frac{\rho}{r_P} \cos \psi \sin(\omega_0 t')\right) = r_P - \rho \cos \psi \sin(\omega_0 t') \approx r_P \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} t_P &\equiv t' + \frac{r(t') - r_P}{c} = t' - \frac{\rho \cos \psi \sin(\omega_0 t')}{c} \approx t' \left(1 - \beta + \beta \frac{\psi^2}{2}\right) + \frac{c^2 \beta^3 t^3}{6\rho^2} \\ &\approx t' \frac{1 + \gamma^2 \psi^2}{2\gamma^2} + \frac{c^2 t^3}{6\rho^2} \end{aligned} \quad (4.14)$$

3. 计算并化简一些关键的复合量，在直角坐标系，有

$$\mathbf{n} = \frac{[-\rho(1 - \cos(\omega_0 t')), r_P \sin \psi, r_P \cos \psi - \rho \sin(\omega_0 t')]}{r_P - \rho \sin(\omega_0 t')} \approx [0, \sin \psi, \cos \psi] \quad (4.15)$$

$$[\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]] \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} &\approx \dot{\beta} [-\cos(\omega_0 t') + \beta \cos \psi, -\cos \psi \sin \psi \sin(\omega_0 t'), \sin^2 \psi \sin(\omega_0 t')] \\ &= \frac{\dot{\beta}}{2\gamma^2} \left[-\left(1 + \gamma^2 \psi^2 - \gamma^2 (\omega_0 t')^2\right), -2\gamma \omega_0 t' \gamma \psi, 0\right] \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}]] &\approx \beta [-\sin(\omega_0 t'), \sin \psi \cos \psi \cos(\omega_0 t'), -\sin^2 \psi \cos(\omega_0 t')] \\ &= [-\omega_0 t', \psi, 0] \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{2\gamma^2} \left(1 + \gamma^2 \psi^2 + \gamma^2 (\omega_0 t')^2\right) \quad (4.19)$$

¹⁰这一节主要为 A. Hofmann 一书 Ch 3 与 Ch 4 的要点浓缩。如读者对细节感兴趣，不妨参考 A. Hofmann 一书。

4. 代入 Liénard-Wiechert 场的频域表示式，在直角坐标系有

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}(\omega) &= -\frac{i\omega q}{4\pi\epsilon_0 cr} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}]] e^{i\omega\left(t' + \frac{r(t')}{c}\right)} dt' \\ &\rightarrow -\frac{i\omega q}{4\pi\epsilon_0 cr} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}]] e^{i\omega\left(t' + \frac{r(t') - r_P}{c}\right)} dt'\end{aligned}\quad (4.20)$$

$$\Rightarrow \tilde{\mathbf{E}}(\omega) = -\frac{i\omega q}{4\pi\epsilon_0 cr_P} \int_{-\infty}^{\infty} [-\omega_0 t', \psi, 0] \exp\left(i\omega\left(\frac{t'(1 + \gamma^2\psi^2)}{2\gamma^2} + \frac{c^2 t'^3}{6\rho^2}\right)\right) dt' \quad (4.21)$$

其中， x, y 分量分别计算，利用 \sin, \cos 函数的奇偶性，有

$$\tilde{E}_x(\omega) = \frac{q\omega}{4\pi\epsilon_0 cr_P} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0 t' \sin\left(\omega t' \frac{1 + \gamma^2\psi^2}{2\gamma^2} + \frac{\omega c^2 t'^3}{6\rho^2}\right) dt' \quad (4.22)$$

$$\tilde{E}_y(\omega) = -\frac{iq\omega}{4\pi\epsilon_0 cr_P} \int_{-\infty}^{\infty} \psi \cos\left(\omega t' \frac{1 + \gamma^2\psi^2}{2\gamma^2} + \frac{\omega c^2 t'^3}{6\rho^2}\right) dt' \quad (4.23)$$

经过变量变换，积分结果可写为艾里函数 (Airy function) 形式

$$\tilde{E}_x(\omega) = -\frac{q\gamma}{\epsilon_0 cr_P} \left(\frac{3|\omega|}{4\omega_c}\right)^{1/3} \text{Ai}'\left(\left(\frac{3\omega}{4\omega_c}\right)^{2/3} (1 + \gamma^2\psi^2)\right) \quad (4.24)$$

$$\tilde{E}_y(\omega) = -\frac{iq\gamma(\omega/|\omega|)}{\epsilon_0 cr_P} \left(\frac{3|\omega|}{4\omega_c}\right)^{2/3} \gamma\psi \text{Ai}\left(\left(\frac{3\omega}{4\omega_c}\right)^{2/3} (1 + \gamma^2\psi^2)\right) \quad (4.25)$$

除了可以写为艾里函数，也可以写为修正贝塞尔函数 (modified Bessel function) 形式

$$\tilde{E}_x(\omega) = \frac{\sqrt{3}q\gamma}{(2\pi)\epsilon_0 cr_P} \left(\frac{|\omega|}{2\omega_c}\right) (1 + \gamma^2\psi^2) \mathcal{K}_{2/3}\left(\frac{\omega}{2\omega_c} (1 + \gamma^2\psi^2)^{3/2}\right) \quad (4.26)$$

$$\tilde{E}_y(\omega) = -\frac{i\sqrt{3}q\gamma}{(2\pi)\epsilon_0 cr_P} \left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) \gamma\psi \sqrt{1 + \gamma^2\psi^2} \mathcal{K}_{1/3}\left(\frac{\omega}{2\omega_c} (1 + \gamma^2\psi^2)^{3/2}\right) \quad (4.27)$$

以上推导用到了下面的积分恒等式

$$\begin{aligned}\text{Ai}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(xt + \frac{t^3}{3}\right) dt \\ \text{Ai}'(x) &= \frac{d\text{Ai}(x)}{dx} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t \sin\left(xt + \frac{t^3}{3}\right) dt \\ \text{Ai}(x) &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{x}{3}} \mathcal{K}_{1/3}\left(\frac{2x^{3/2}}{3}\right) \\ \text{Ai}'(x) &= -\frac{1}{\pi} \frac{x}{\sqrt{3}} \mathcal{K}_{2/3}\left(\frac{2x^{3/2}}{3}\right)\end{aligned}\quad (4.28)$$



笔记 无论写成 Airy 函数或是修正贝塞尔函数，都是一种符号。写成这些特殊函数形式是多此一举吗？Modified Bessel function 或 Airy function 是数学家帮我们探索过、提供给我们的宝贵分析工具，于是我们可以直接、有系统地得知这些特殊函数的特性，从而得知同步辐射场的特性。

已经在频域得到解析形式的电场 (与磁场)，能在时域也得到解析形式的解吗？将前

面得到的运动学复合量代入下式

$$\mathbf{E}(t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left\{ \frac{[\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]]}{r(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right\}_{\text{ret}} \quad (4.29)$$

化简后, 有

$$\mathbf{E}(t_p) = \frac{q\omega_0\gamma^4}{\pi\epsilon_0 c r_P} \frac{\left[-\left(1 + \gamma^2\psi^2 - (\gamma\omega_0 t')^2\right), -2(\gamma\omega_0 t')\gamma\psi, 0 \right]}{\left(1 + \gamma^2\psi^2 + (\gamma\omega_0 t')^2\right)^3} \quad (4.30)$$

Lienard-Wiechert 场的时域表示式不需要对 t' 积分。但是, 需要将 t' 以 t_P 形式表示, 可以通过反解以下 t_P 的“方程式”得到

$$t_P \approx t' \frac{1 + \gamma^2\psi^2}{2\gamma^2} + \frac{c^2 t'^3}{6\rho^2} \quad (4.31)$$



笔记 看似时域计算少了对 t' 积分, 意味着比较简单? 天下没有免费的午餐。

上式为 t' 的三次代数方程, 其解¹¹有

$$\begin{aligned} \omega_0 t' \approx & \frac{\sqrt{1 + \gamma^2\psi^2}}{\gamma} \left(\frac{2\omega_c t_P}{(1 + \gamma^2\psi^2)^{3/2}} + \sqrt{1 + \frac{(2\omega_c t_P)^2}{(1 + \gamma^2\psi^2)^3}} \right)^{1/3} \\ & + \frac{\sqrt{1 + \gamma^2\psi^2}}{\gamma} \left(\frac{2\omega_c t_P}{(1 + \gamma^2\psi^2)^{3/2}} - \sqrt{1 + \frac{(2\omega_c t_P)^2}{(1 + \gamma^2\psi^2)^3}} \right)^{1/3} \end{aligned} \quad (4.32)$$

其中, $\omega_c = \frac{3c\gamma^3}{2\rho} = \frac{3}{2}\omega_0\gamma^3$ 为同步辐射特征频率。

上式 (...) ^{1/3} 中还可以进一步化简, 利用以下恒等式

$$\pm w + \sqrt{1 + w^2} = e^{\pm \sinh^{-1} w} \quad (4.33)$$

$$\gamma\omega_0 t' = 2\sqrt{1 + \gamma^2\psi^2} \sinh \left(\frac{1}{3} \sinh^{-1} \left(\frac{2\omega_c t_P}{(1 + \gamma^2\psi^2)^{3/2}} \right) \right) \quad (4.34)$$

将 Eq. (4.30) 中的 x, y 分量分别计算, 有

$$E_x(t_P) = -\frac{q\omega_0\gamma^4}{\pi\epsilon_0 c r_P} \frac{(1 - 4 \sinh^2(\frac{1}{3} \sinh^{-1} \tau))}{(1 + \gamma^2\psi^2)^2 (1 + 4 \sinh^2(\frac{1}{3} \sinh^{-1} \tau))^3} \quad (4.35)$$

$$E_y(t_P) = -\frac{q\omega_0\gamma^4}{\pi\epsilon_0 c r_P} \frac{4\gamma\psi \sinh(\frac{1}{3} \sinh^{-1} \tau)}{(1 + \gamma^2\psi^2)^{5/2} (1 + 4 \sinh^2(\frac{1}{3} \sinh^{-1} \tau))^3} \quad (4.36)$$

其中, $\tau = \frac{2\omega_c t_P}{(1 + \gamma^2\psi^2)^{3/2}}$ 为归一化时间。

图 4.9 给出在时域与频域中, 单电子单次经过弯转磁铁时, 同步辐射场的“样貌”。单电子的辐射场总是相干的, 因此, 这里的辐射场即相干同步辐射 (coherent synchrotron radiation, CSR)¹²。关于相干同步辐射场的更多讨论, 将在第 15 章进一步介绍。

¹¹参考 <https://mathworld.wolfram.com/CubicFormula.html>

¹²相干同步辐射分非相干 (incoherent) 与相干 (coherent), 这里仅考虑单电子, 因此总是相干的。考虑多个电子时就要量化相干程度 (称相干性, coherence), 一般用群聚因子 (bunching factor) 量化, 其包含电子束团分布的信息, 类似于固态物理学中的形状因子 (form factor)。关于多粒子电磁辐射的讨论, 可参考第 9 章。

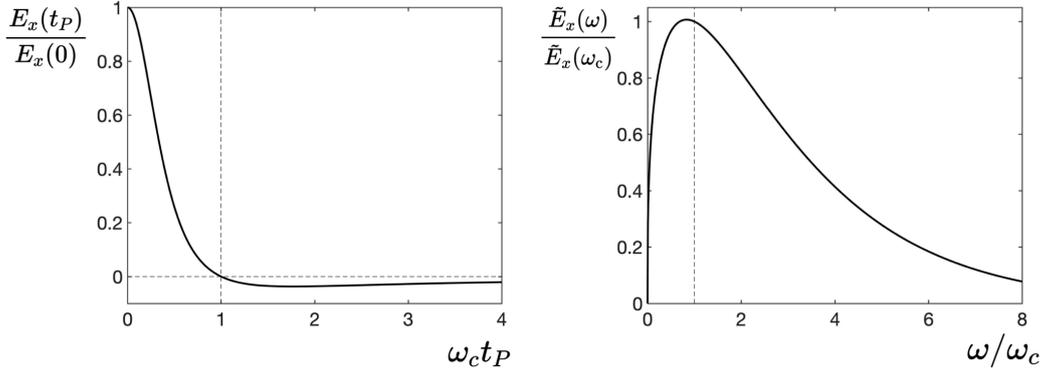


图 4.9: 电子单次经过弯转磁铁产生的同步辐射场的时域分布(上)与频谱(下), 其中, 频谱形成连续宽谱。



笔记 比较一下, 图 4.9 场的时域、频谱分布与图 4.2 的时域、频谱分布同样讨论单粒子经过弯转磁铁产生的场, 看起来却不太一样。是图 4.2 画的不精确, 或是其它原因?

当电子环绕储存环周期运动时, 产生的辐射场可以按以下方式计算

$$\mathbf{E}(t_P) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_n e^{-in\omega_0 t_P} \quad \text{其中} \quad \mathbf{E}_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \mathbf{E}(t) e^{in\omega_0 t_P} dt_P \quad (4.37)$$

即, 谐波辐射电场有

$$\mathbf{E}_n = -\frac{in\omega_0 q}{4\pi\epsilon_0 c r_P T_0} \int_0^{T_0} [\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}]] e^{in\omega_0(t' + (r(t') - r_P)/c)} dt' \quad (4.38)$$

其中, 指数部分项有

$$e^{in\omega_0(t' + (r(t') - r_P)/c)} = e^{in(\omega_0 t' - \beta \cos \psi \sin(\omega_0 t'))} \quad (4.39)$$

$$= \cos(n\omega_0 t' - n\beta \cos \psi \sin(\omega_0 t')) + i \sin(n\omega_0 t' - n\beta \cos \psi \sin(\omega_0 t')) \quad (4.40)$$

由高等数学知识, 可预期谐波电场、辐射功率频谱等将包含贝塞尔函数。

将谐波电场写成分量形式, 有

$$\begin{aligned} E_\phi(t_P) &= \frac{q\omega_0\beta}{4\pi\epsilon_0 c r_P} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \mathcal{J}'_n(n\beta \cos \psi) e^{-in\omega_0 t_P} \\ &= \frac{q\omega_0\beta}{2\pi\epsilon_0 c r_P} \sum_{n=1}^{\infty} n \mathcal{J}'_n(n\beta \cos \psi) \cos(n\omega_0 t_P) \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} E_\psi(t_P) &= i \frac{q\omega_0}{4\pi\epsilon_0 c r_P} \tan \psi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \mathcal{J}_n(n\beta \cos \psi) e^{-in\omega_0 t_P} \\ &= -\frac{q\omega_0}{2\pi\epsilon_0 c r_P} \tan \psi \sum_{n=1}^{\infty} n \mathcal{J}_n(n\beta \cos \psi) \sin(n\omega_0 t_P) \end{aligned}$$

其中, 用了贝塞尔函数的奇偶性, $\mathcal{J}_n(na) = \mathcal{J}_{-n}(-na)$, $\mathcal{J}'_n(na) = -\mathcal{J}'_{-n}(-na)$ 。

对极端相对论情况, 在临界频率附近时(即当谐波数很大时), 离散的谱线由第 n_c 次

谐波主导，其中， $n_c = \omega_c/\omega_0 = 3\gamma^3/2 \gg 1$ 。此时，贝塞尔函数的渐进行为可以写成艾里函数，有¹³

$$n\mathcal{J}_n(n\beta \cos \psi) \approx 2 \left(\frac{n}{2}\right)^{2/3} \text{Ai} \left(\left(\frac{n}{2\gamma^3}\right)^{2/3} (1 + \gamma^2 \psi^2) \right)$$

$$n\mathcal{J}'_n(n\beta \cos \psi) \approx -2 \left(\frac{n}{2}\right)^{1/3} \text{Ai}' \left(\left(\frac{n}{2\gamma^3}\right)^{2/3} (1 + \gamma^2 \psi^2) \right)$$

由此可看出，对极高次谐波 $n_c \gg 1$ 情况，环绕储存环多圈的离散谱的结果与单次经过的连续谱一致。

除时、频域电磁场，其它物理量，如辐射能量、功率、角分布等，也有解析解吗？有，但是这里不再介绍推导细节了。定量讨论允许给出更准确的同步辐射电磁场的描述，以下总结特性：

性质 4.1. 同步辐射场的性质

同步辐射形成连续宽谱，有以下特性：

- 横向 $\theta_0 \approx 1/\gamma$ 、纵向 $\theta_m \approx 1/2\gamma$
- 同步辐射形成连续宽谱。定义发生在光子通量/强度最大处对应的频率为同步辐射光子临界频率 (critical frequency)，又称特征频率成分，有

$$\omega_c = \frac{3c\gamma^3}{2\rho} = \frac{3\gamma^3}{2}\omega_0 \quad (4.42)$$

其中， ω_0 为储存环绕行角频率。

- 相应地，同步辐射光子临界能量 (critical photon energy) 定义为 $E_{\gamma c} = \hbar\omega_c$ 。实用公式：

$$E_{\gamma c} [\text{keV}] = 4.136 \times 10^{-18} f_c [\text{Hz}] = 2.218 \frac{E^3 [\text{GeV}]}{\rho [\text{m}]} = 0.665 E^2 [\text{GeV}] B [\text{T}] \quad (4.43)$$

$$\lambda_c [\text{nm}] = \frac{1.24}{E_{\gamma c} [\text{keV}]} = \frac{1.864}{E^2 [\text{GeV}] B [\text{T}]} \quad (4.44)$$

对 GeV 量级、周长 500 m 量级的电子储存环，临界波长大约在 X 射线波段。

- 对足够长弯转磁铁，纵向形成长度约为 ρ/γ
- 同步辐射场为完全时变场，DC 成分为 0，即 $\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(t_p) dt_p = \tilde{\mathbf{E}}(0) = 0$
- 由于辐射电场有 x, y 分量，辐射功率也可以分开算， x 分量称 σ 模， y 分量称 π 模，有

$$P_\sigma = P_s \frac{6 + \beta^2}{8}, \quad P_\pi = P_s \frac{2 - \beta^2}{8} \quad (4.45)$$

$$P_s = \frac{2cr_e m_e c^2 \beta^4 \gamma^4}{3\rho^2}, \quad U_s = P_s \frac{2\pi\rho}{\beta c} = \frac{4\pi r_e m_e c^2 \beta^3 \gamma^4}{3\rho} \quad (4.46)$$

其中， $\beta = v/c$ 。

¹³此渐进关系式在一般物理数学教科书较少看到，关于此渐进式的推导，可参考 A. Hofmann 一书的 Appendix B.2。

- 当电子在储存环中周期运动时，周期为 $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi\rho}{\beta c}$ ，辐射频谱将由连续谱变成离散谱，谱线为 $\omega_n = n\omega_0 = n\frac{\beta c}{\rho}$ ，其中， n 为谐波数。 □

以上给出的同步辐射功率为经典力学分析的结果。如果考虑量子力学修正，则有

$$P_{\text{quantum}} = P_s \left(1 - \frac{55}{16\sqrt{3}} \frac{E_{\gamma c}}{E} \right) \quad (4.47)$$

其中， $E_{\gamma c}$ 为同步辐射光子临界能量。可以看到，对 1 GeV 电子、1 T 弯转磁场强度，修正项约为 10^{-6} 。当粒子发出的光子能量与粒子自身总能量相当时，即 $E_{\gamma c} \sim E$ ，量子力学修正将不可被忽略。关于同步辐射量子修正的更多讨论，可参考 W. Dittrich, V. Schanbacher, On the quantum corrections in synchrotron radiation, Nuclear Physics B **163**, 133-155 (1980). [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(80\)90394-6](https://doi.org/10.1016/0550-3213(80)90394-6)。此修正项的推导需要量子场论基础，此处不论，感兴趣的读者可参考量子场论教科书，如 M.E. Peskin and D.V. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory, CRC Press (2018) 一书的 Chapter 6。



笔记 回顾一下，是哪些原因让单个电子的同步辐射就导致这么复杂的结果？推迟条件，隐函数形式导致，指数项三次方以上展开出现 Airy 函数。那些 Bessel 函数怎么跑出来的？周期运动，(单) 电子逐圈绕行导致。

这一节我们利用 Lienard-Wiechert 场，定量分析了同步辐射场的特性。有些教科书不从 Lienard-Wiechert 场出发，而从傍轴波方程 (paraxial wave equation) 出发，可以得到同样的结果。对此分析方式感兴趣的读者，可参考 Kwang-Je Kim, Zhirong Huang, and Ryan Lindberg, Synchrotron Radiation and Free-Electron Lasers – Principles of Coherent X-Ray Generation, Cambridge University Press (2017) 一书的 §2.2-§2.3。

4.4 一些辐射物理量的分布函数

略去推导细节，这里给出一些同步辐射复合物理量的分布函数¹⁴。

4.4.1 同步辐射功率 频谱 角 分布

此为同步辐射功率“双谱 (double spectrum)”分布。双谱分布包含的信息量最多，因此，得到双谱分布后，其它物理量可以在此基础上得到。

$$\frac{d^2 P}{d\Omega d\omega} = \frac{P_s \gamma}{\omega_c} [F_{s\sigma}(\omega, \psi) + F_{s\pi}(\omega, \psi)] = \frac{P_s \gamma}{\omega_c} F_s(\omega, \psi) \quad (4.48)$$

其中， F_s 满足归一化条件

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} d(\gamma\psi) \int_0^{\infty} F_s(\omega, \psi) d(\omega/\omega_c) = 1 \quad (4.49)$$

与

$$\begin{aligned} F_{s\sigma}(\omega, \psi) &= \frac{9}{2\pi} \left(\frac{3\omega}{4\omega_c}\right)^{2/3} \text{Ai}^2 \left(\left(\frac{3\omega}{4\omega_c}\right)^{2/3} (1 + \gamma^2 \psi^2) \right) \\ &= \left(\frac{3}{2\pi}\right)^3 \left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right)^2 (1 + \gamma^2 \psi^2)^2 \mathcal{K}_{2/3}^2 \left(\frac{\omega}{2\omega_c} (1 + \gamma^2 \psi^2)^{3/2}\right) \\ F_{s\pi}(\omega, \psi) &= \frac{9}{2\pi} \left(\frac{3\omega}{4\omega_c}\right)^{4/3} \gamma^2 \psi^2 \text{Ai}^2 \left(\left(\frac{3\omega}{4\omega_c}\right)^{2/3} (1 + \gamma^2 \psi^2) \right) \\ &= \left(\frac{3}{2\pi}\right)^3 \left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right)^2 \gamma^2 \psi^2 (1 + \gamma^2 \psi^2) \mathcal{K}_{1/3}^2 \left(\frac{\omega}{2\omega_c} (1 + \gamma^2 \psi^2)^{3/2}\right) \end{aligned} \quad (4.50)$$

其中，图 4.10、图 4.11、图 4.12 为同步辐射功率频谱角分布样貌与 $F_{s\sigma}(\omega, \psi)$, $F_{s\pi}(\omega, \psi)$ 在 z 轴上的频率依存关系。

由第二类修正贝塞尔函数 $\mathcal{K}_\alpha(z)$ 的渐进关系

$$\mathcal{K}_\alpha(z) \sim \begin{cases} 2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha) z^{-\alpha}, & \text{if } z \ll 1 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}, & \text{if } z \gg 1 \end{cases} \quad (4.51)$$

知，高于临界频率时，同步辐射功率随指数衰减 $\propto e^{-\omega/\omega_c}$ 。对 $\alpha = 1/3$ 情况，第二类修正贝塞尔函数 $\mathcal{K}_{1/3}(z)$ 与其渐进式如图 4.13。

定理 4.2. 同步辐射低频成分角散 $\Delta\psi \sim (\lambda/\rho)^{1/3}$ 、高频成分角散 $\Delta\psi \sim \frac{1}{\gamma}$

由同步辐射双谱函数 $\frac{d^2 P}{d\omega d\Omega}$ ，可以得到同步辐射角散 (angular spread)^a

$$\Delta\psi \sim \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^{1/3} \quad (4.52)$$

其中， $\lambda = \lambda/2\pi = c/\omega$ 为约化波长。

¹⁴这一节主要为 A. Hofmann 一书 Ch 5 的要点浓缩。如读者对细节感兴趣，不妨参考 A. Hofmann 一书。

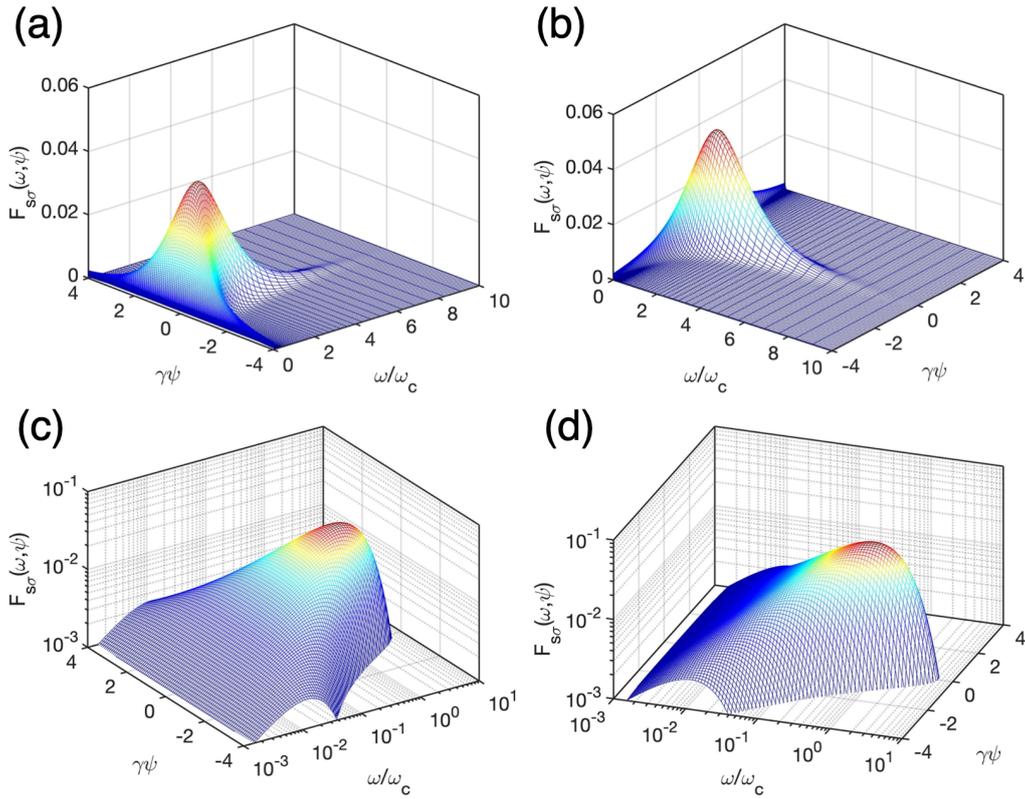


图 4.10: 同步辐射功率谱函数 $F_{s\sigma}(\omega, \psi)$ 与角的“双谱”分布。上排以线性标度画出功率谱函数，下排以对数标度画出功率谱函数。左右两排呈现图的不同视角。

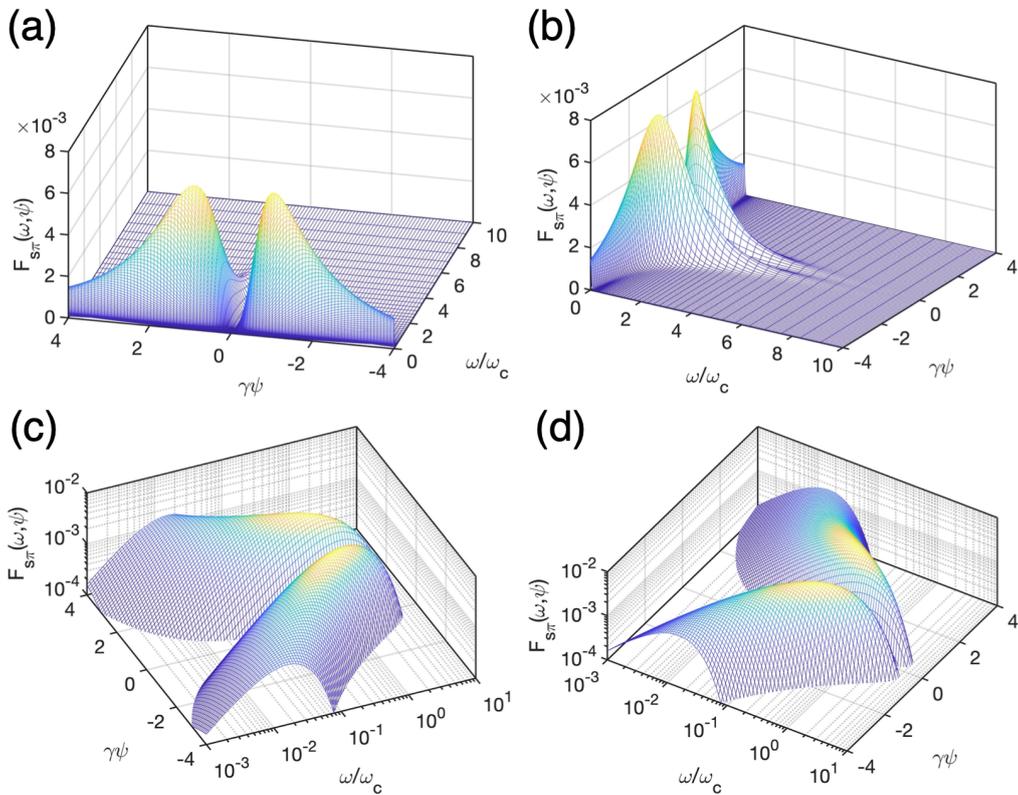


图 4.11: 同步辐射功率谱函数 $F_{s\pi}(\omega, \psi)$ 与角的“双谱”分布。上排以线性标度画出功率谱函数，下排以对数标度画出功率谱函数。左右两排呈现图的不同视角。

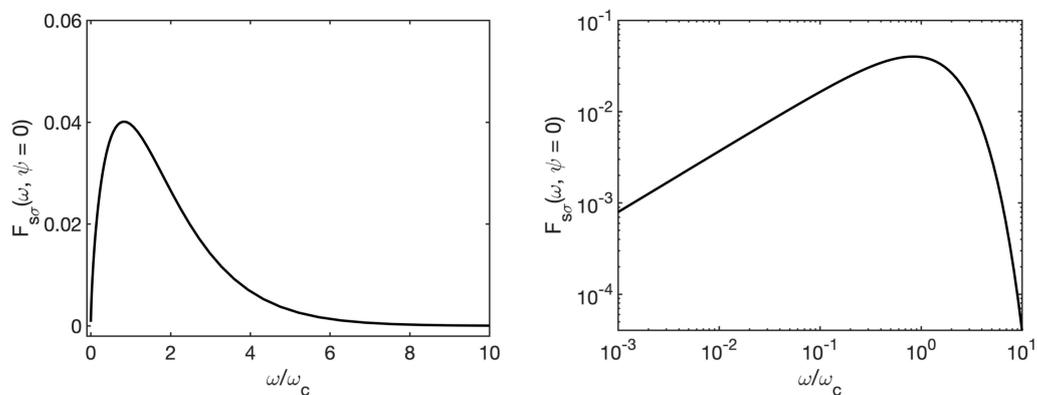


图 4.12: 在 z 轴上或 xz 平面上 ($\psi = 0$, 又称 median plane) 的同步辐射功率频谱。左图为线性坐标, 右图为双对数坐标。

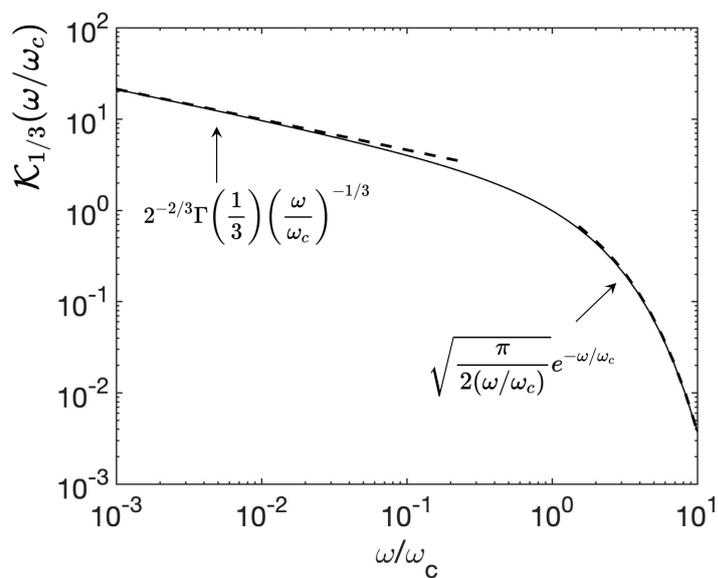


图 4.13: 第二类修正贝塞尔函数 $\mathcal{K}_{1/3}(z)$ 与其渐近式。

对于高频 $\omega \leq \omega_c$ 情况，其中， $\omega_c = \frac{3c\gamma^3}{2\rho}$ 为光子临界频率，有 $\Delta\psi \sim \frac{1}{\gamma}$ 。高频同步辐射张角 $\sim 1/2\gamma$ 。对 $\omega \geq \omega_c$ ，以上定标定律不再准确。

证明 辐射场横向尺寸为有限的根源为粒子走弧线，扫出有限横向尺寸。此外，电磁波存在衍射效应。通过简单的几何关系，辐射场的横向尺寸可以估算为

$$\Delta x \approx \rho \left(1 - \cos \frac{1}{\gamma}\right) \approx \frac{\rho}{2\gamma^2} = \left(\frac{\rho}{2}\right) \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2 \approx \rho(\Delta\psi)^2$$

此外，衍射关系有 $\Delta x \approx \lambda/\Delta\psi$ 。结合这两个关系，得证。

“张角 (opening angle) 也大约在同一个数量级。 □

练习 4.3 估算高频极限 $\omega \geq \omega_c$ 时的同步辐射角散。 ■

解 高频极限时，辐射场张角比 $1/\gamma$ 更小，因此 $\Delta x \approx (\rho/\gamma)\Delta\psi$ 。结合电磁波衍射关系，有

$$\Delta\psi \sim \left(\frac{\rho\lambda}{\rho}\right)^{1/2}$$

4.4.2 同步辐射功率 频谱 分布

对双谱分布的立体角 $d\Omega$ 进行积分，则有同步辐射功率频谱分布。参考图 4.14，其中

$$d\Omega = \sin\Theta d\Theta d\phi = \cos\psi d\psi d\phi = 2\pi \cos\psi d\psi \quad (4.53)$$

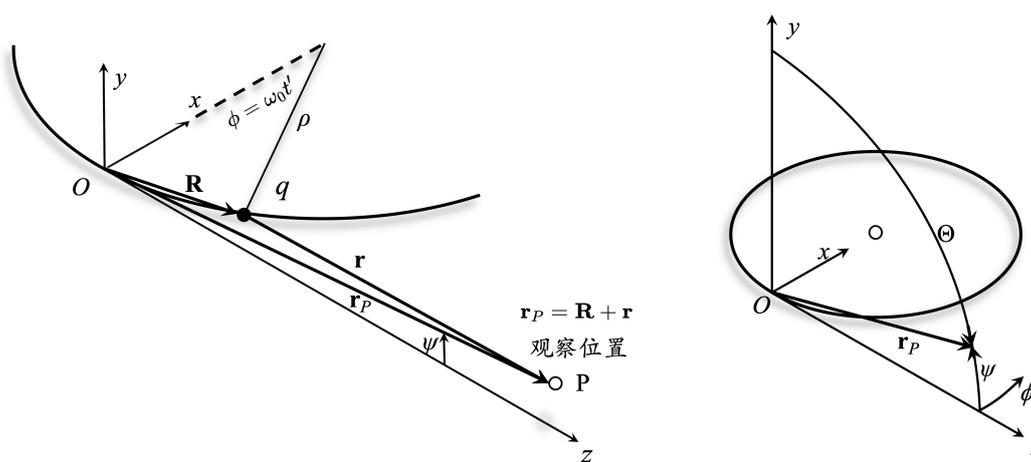


图 4.14: 用于描述同步辐射的空间坐标变量，立体角有 $d\Omega = \sin\Theta d\Theta d\phi = \cos\psi d\psi d\phi = 2\pi \cos\psi d\psi$ 。

则辐射功率频谱分布有¹⁵

$$\frac{dP}{d\omega} = \int \frac{d^2P}{d\Omega d\omega} d\Omega = \frac{P_s}{\omega_c} \left[S_{s\sigma} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) + S_{s\pi} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \right] = \frac{P_s}{\omega_c} S_s \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \quad (4.54)$$

其中,

$$\begin{aligned} S_{s\sigma} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) &= 9 \left(\frac{3\omega}{4\omega_c} \right)^{2/3} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Ai}'^2 \left(\left(\frac{3\omega}{4\omega_c} \right)^{2/3} (1 + \gamma^2 \psi^2) \right) d(\gamma\psi) \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{16\pi} \frac{\omega}{\omega_c} \left(\int_{\omega/\omega_c}^{\infty} \mathcal{K}_{5/3}(z') dz' + \mathcal{K}_{2/3} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \right) \\ S_{s\pi} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) &= 9 \left(\frac{3\omega}{4\omega_c} \right)^{4/3} \gamma^2 \psi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{Ai}^2 \left(\left(\frac{3\omega}{4\omega_c} \right)^{2/3} (1 + \gamma^2 \psi^2) \right) d(\gamma\psi) \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{16\pi} \frac{\omega}{\omega_c} \left(\int_{\omega/\omega_c}^{\infty} \mathcal{K}_{5/3}(z') dz' - \mathcal{K}_{2/3} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \right) \\ S_s \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) &= \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} \frac{\omega}{\omega_c} \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} \mathcal{K}_{5/3}(z') dz' \end{aligned} \quad (4.55)$$

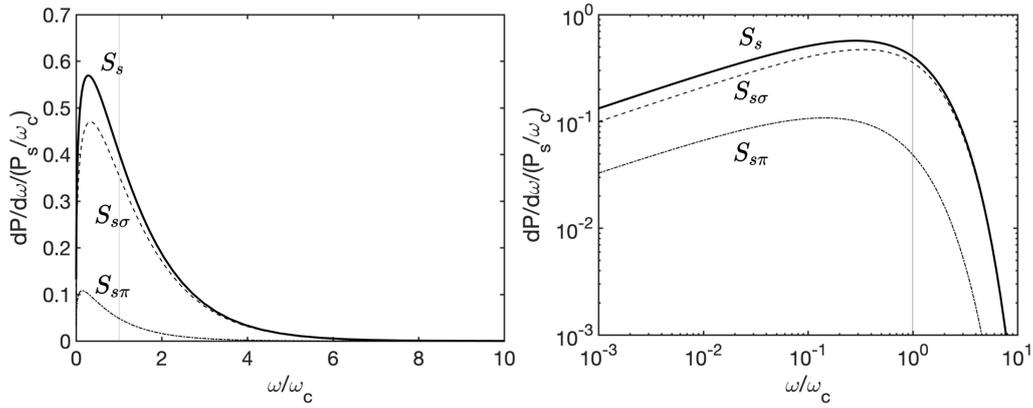


图 4.15: 同步辐射功率频谱分布。左图为线性坐标, 右图为双对数坐标。高于临界频率的高频范围内, 由水平(σ)极化主宰, 有 $S_s \approx S_{s\sigma} \approx \frac{27\sqrt{2}}{16\sqrt{3}\pi} \sqrt{\frac{\omega}{\omega_c}} e^{-\omega/\omega_c}$ 。 S_s 最大值发生在 $\omega/\omega_c \approx 0.3$ 。

辐射功率中的极化占比可以通过进一步对频率积分得到, 有

$$\int_0^{\infty} \left(S_{s\sigma} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) + S_{s\pi} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \right) d \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) = \frac{7}{8} + \frac{1}{8} = 1 \quad (4.56)$$

如果频率积分范围从 0 至临界频率 $\omega_c = 3\omega_0\gamma^3/2$, 则恰好涵盖全辐射功率的一半。

$$\int_0^{\omega_c} \left(S_{s\sigma} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) + S_{s\pi} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \right) d \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) = 0.42 + 0.08 = 0.5 \quad (4.57)$$

同上所述, 高于临界频率时, 同步辐射功率随指数衰减 $\propto e^{-\omega/\omega_c}$ 。

图 4.15 为单电子单次经过弯转段产生的同步辐射功率频谱。对储存环同步加速器, 周期绕行运动的电子产生的同步辐射会在频谱上形成离散的谱线。实际情况下, 由于电子逐圈补偿能量与辐射能量损失存在微小差异或是电子束团本身存在能散, 因此, 这些离散的谱线将变得模糊而仍像连续谱。参考图 4.16。

¹⁵留意, 在 M. Sands 中, $dP/d\omega$ 写成 $\mathcal{P}(\omega)$ 。

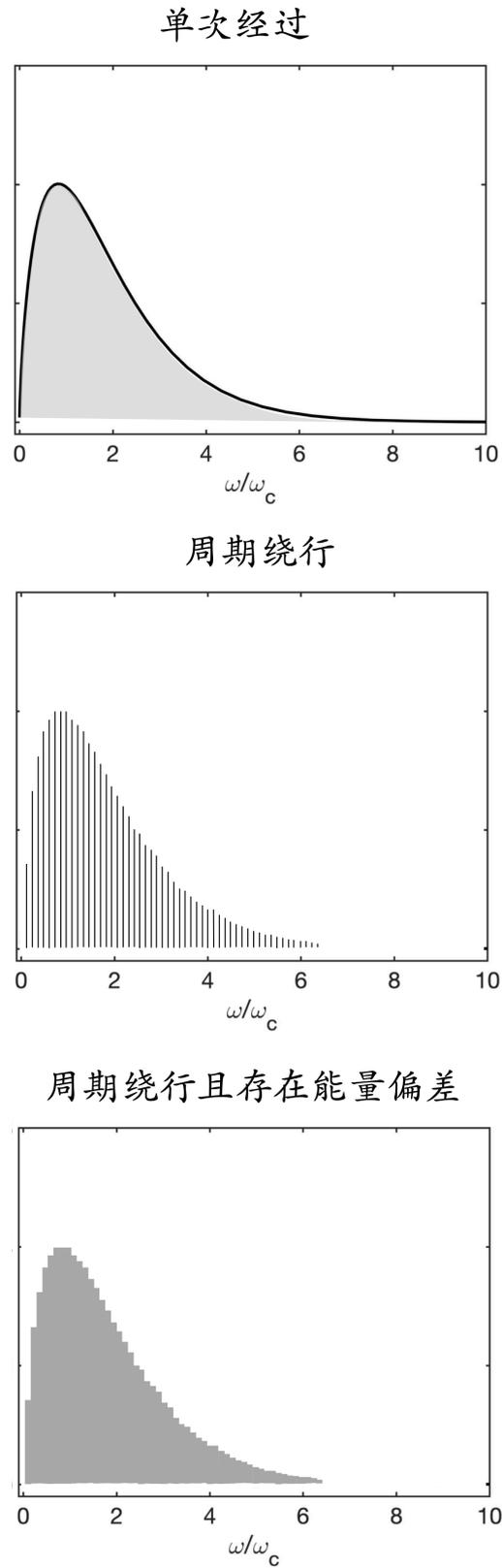


图 4.16: 同步辐射功率频谱示意图: (上) 单次经过情况、(中) 周期绕行情况、(下) 考虑逐圈能量偏差或能散情况。

笔记 思考一下，不考虑能量偏差情况，图 4.16 中间图的每一根谱线没有粗细，在频域中与临近谱线的间隔为 c/ρ 。频谱分布的大致宽度——即同步辐射带宽——大约为 $c\gamma^3/\rho$ 。

练习 4.4 图 4.16 仅考虑单电子绕行情况，如果是多个电子（形成束团）产生的辐射频谱，频谱分布样貌会有什么改变？

4.4.3 同步辐射功率角分布

对双谱分布的频率进行积分，就有辐射功率角分布。留意，由于 §3.2 采用正频率惯例（利用了辐射场频谱函数的奇偶性），此处对频率积分只需考虑 $(0, \infty)$ 。

$$\frac{dP}{d\Omega} = \int_0^\infty \frac{d^2P}{d\Omega d\omega} d\omega = \frac{P_s \gamma}{\omega_c} \int_0^\infty [F_{s\sigma}(\omega, \psi) + F_{s\pi}(\omega, \psi)] d\omega \quad (4.58)$$

其中，对两种不同极化的积分分别为

$$\frac{dP_\sigma}{d\Omega} = \frac{P_s \gamma}{(2\pi)} \frac{21}{32} \frac{1}{(1 + \gamma^2 \psi^2)^{5/2}}, \quad \frac{dP_\pi}{d\Omega} = \frac{P_s \gamma}{(2\pi)} \frac{15}{32} \frac{\gamma^2 \psi^2}{(1 + \gamma^2 \psi^2)^{7/2}} \quad (4.59)$$

同步辐射功率角分布参考图 4.17。

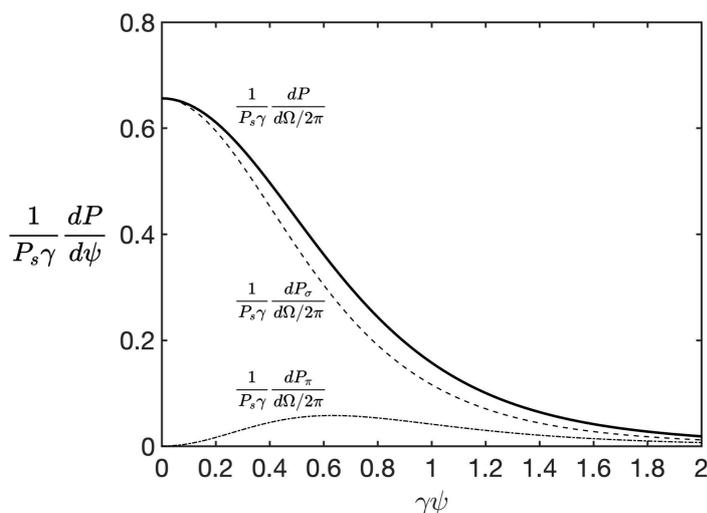


图 4.17: 同步辐射功率角分布， $d\Omega = d\psi d\phi = 2\pi d\psi$ 。

笔记 有些读者可能会好奇，为什么这里讨论的是辐射功率的“角”分布，而不是空间的尺寸分布？因为辐射场随着 z 或 s 是散开的，在没有指明观察位置距离源的确切距离之前，很难给出尺寸，此时辐射分布的角度可能是较好的描述方式。由前面的讨论，可以大概想像辐射功率的空间分布将是落在 xz 平面上、扁平散开的样子。

4.4.4 同步辐射偏振或极化分布

分电场偏振、功率频谱角分布偏振、功率频谱分布偏振、功率角分布偏振。电场偏振的分析需要先选择横向两个适当的正交分量进行量化，选择非唯一，参考图 4.18。

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(t) &= \left[\hat{E}_x \cos(\omega t) \boldsymbol{\eta}_x \pm \hat{E}_y \sin(\omega t) \boldsymbol{\eta}_y \right] \\
&= \mathbf{E}_+(t) + \mathbf{E}_-(t) \\
&= \hat{E}_+ \frac{\cos(\omega t) \boldsymbol{\eta}_x + \sin(\omega t) \boldsymbol{\eta}_y}{\sqrt{2}} + \hat{E}_- \frac{\cos(\omega t) \boldsymbol{\eta}_x - \sin(\omega t) \boldsymbol{\eta}_y}{\sqrt{2}}
\end{aligned} \tag{4.60}$$

其中,

$$\hat{E}_+ = \frac{\hat{E}_x + \hat{E}_y}{\sqrt{2}}, \quad \hat{E}_- = \frac{\hat{E}_x - \hat{E}_y}{\sqrt{2}} \tag{4.61}$$

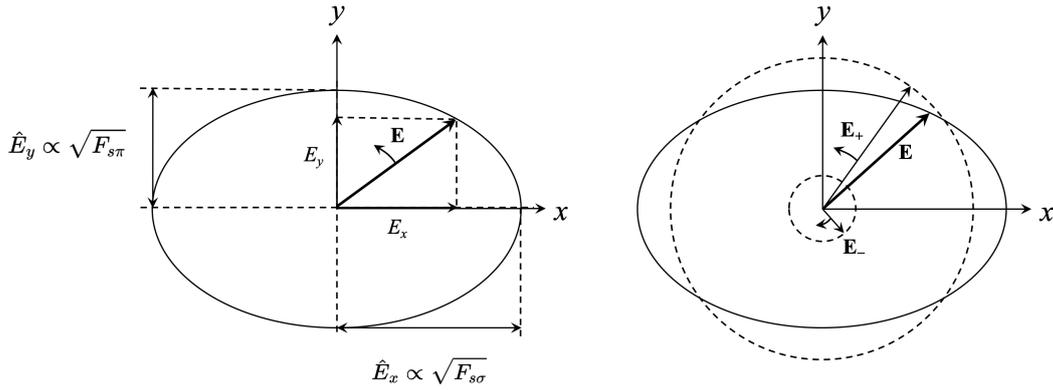


图 4.18: 此图考虑 $\omega = \omega_c$ 、 $\psi = 1/\gamma$ 情况。右图表示一椭圆偏振电场可以拆解为两个互为反向圆偏振电场的和。

注 可以证明, 两种正交极化形态为等价描述。

$$\frac{d^2 P}{d\Omega d\omega} = \frac{2r^2 \omega_0}{(2\pi)^2 \mu_0 c} \left[|\tilde{E}_+|^2 + |\tilde{E}_-|^2 \right] = \frac{2r^2 \omega_0}{(2\pi)^2 \mu_0 c} \left[|\tilde{E}_x|^2 + |\tilde{E}_y|^2 \right] \tag{4.62}$$

其中,

$$\tilde{E}_+(\omega) = \frac{\tilde{E}_x(\omega) + i\tilde{E}_y(\omega)}{\sqrt{2}}, \quad \tilde{E}_-(\omega) = \frac{\tilde{E}_x(\omega) - i\tilde{E}_y(\omega)}{\sqrt{2}} \tag{4.63}$$

除了电场偏振, 更多时候用户关心的是功率频谱角分布偏振, 定义为

$$\frac{\frac{d^2 P_\sigma}{d\Omega d\omega} - \frac{d^2 P_\pi}{d\Omega d\omega}}{\frac{d^2 P_\sigma}{d\Omega d\omega} + \frac{d^2 P_\pi}{d\Omega d\omega}} = \frac{F_{s\sigma} - F_{s\pi}}{F_{s\sigma} + F_{s\pi}} \tag{4.64}$$

或功率频谱分布偏振, 定义为

$$\frac{\frac{dP_\sigma}{d\omega} - \frac{dP_\pi}{d\omega}}{\frac{dP_\sigma}{d\omega} + \frac{dP_\pi}{d\omega}} = \frac{S_{s\sigma} - S_{s\pi}}{S_{s\sigma} + S_{s\pi}} \tag{4.65}$$

或功率角分布偏振, 定义为

$$\frac{\frac{dP_\sigma}{d(\gamma\psi)} - \frac{dP_\pi}{d(\gamma\psi)}}{\frac{dP_\sigma}{d(\gamma\psi)} + \frac{dP_\pi}{d(\gamma\psi)}} = \frac{1 + 2\gamma^2\psi^2/7}{1 + 12\gamma^2\psi^2/7} \tag{4.66}$$

可以预期, 将频率与立体角在全空间积分后, 有

$$P_\sigma = \frac{7}{8} P_s, \quad P_\pi = \frac{1}{8} P_s, \quad \frac{P_\sigma - P_\pi}{P_\sigma + P_\pi} = \frac{3}{4} \tag{4.67}$$

注 以上定义辐射分布的偏振以两个线极化方向 (σ, π) 为正交形态, 也可以选择 (椭圆) 圆极

化(+, -)方向为正交形态。因此, 功率频谱角分布偏振有

$$\frac{\frac{d^2 P_+}{d\Omega d\omega} - \frac{d^2 P_-}{d\Omega d\omega}}{\frac{d^2 P_+}{d\Omega d\omega} + \frac{d^2 P_-}{d\Omega d\omega}} = \frac{F_{s+} - F_{s-}}{F_{s+} + F_{s-}} = 2 \frac{\psi}{|\psi|} \frac{\sqrt{F_{s\sigma} F_{s\pi}}}{F_{s\sigma} + F_{s\pi}}. \quad (4.68)$$

其它以此类推。



笔记 可以证明

$$\begin{aligned} F_{s+} &= \frac{1}{2} \left(F_{s\sigma} + F_{s\pi} + 2 \frac{\psi}{|\psi|} \sqrt{F_{s\sigma} F_{s\pi}} \right) \\ F_{s-} &= \frac{1}{2} \left(F_{s\sigma} + F_{s\pi} - 2 \frac{\psi}{|\psi|} \sqrt{F_{s\sigma} F_{s\pi}} \right) \end{aligned} \quad (4.69)$$

与 $F_{s+} + F_{s-} = F_{s\sigma} + F_{s\pi} = F_s$ 。

4.4.5 同步辐射 光量子 分布

此处分析用到了光子的半经典 (semi-classical) 理论, 即, 对单个光子, 有 $E_\gamma = \hbar\omega$ 。假设光子数为 n , \dot{n} 为单位时间光子数, 由同步辐射功率频谱分布

$$\frac{dP}{d\omega} = \frac{P_s}{\omega_c} S_s \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \quad (4.70)$$

知

$$dP = E_\gamma d\dot{n} = E_\gamma \frac{d\dot{n}}{dE_\gamma} dE_\gamma = E_\gamma \frac{d\dot{n}}{dE_\gamma} \hbar d\omega \quad (4.71)$$

因此

$$\frac{dP}{d\omega} = E_\gamma \frac{d\dot{n}}{dE_\gamma / \hbar} = \hbar \frac{d\dot{n}}{dE_\gamma / E_\gamma} = \hbar \frac{d\dot{n}}{d\omega / \omega} \quad (4.72)$$

由此可以与光子特性关联, 如: 单位时间单位频带内的 σ, π 偏振光子通量

$$\frac{d\dot{n}}{dE_\gamma / E_\gamma} = \frac{d\dot{n}}{d\omega / \omega} = \frac{1}{\hbar} \frac{dP}{d\omega} = \frac{P_s}{E_{\gamma c}} \left[S_{s\sigma} \left(\frac{E_\gamma}{E_{\gamma c}} \right) + S_{s\pi} \left(\frac{E_\gamma}{E_{\gamma c}} \right) \right] \quad (4.73)$$

其中, $E_{\gamma c} = \hbar\omega_c$

$$\frac{P_s}{E_{\gamma c}} = \frac{8\pi r_e m_e c^2 \gamma}{9h\rho} = \frac{2e^2 \gamma}{9e_0 h \rho} = \frac{4\omega_0 \gamma \alpha_f}{9} \quad (4.74)$$

其中, $r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \approx 2.818 \times 10^{-15} \text{ m}$

$$\alpha_f = \frac{e^2}{2\epsilon_0 c h} = \frac{1}{137.036} = 0.007297 \quad (4.75)$$

注 以上分析假设光子在自由空间传播, 没有与其它物质作用, 因此光子数守恒。

单位时间同步辐射光量子能谱分布如图 4.19。有时候, 单位时间同步辐射光量子能谱角分布可能是用户更感兴趣的物理量, 即

$$\frac{d\dot{n}}{d\Omega dE_\gamma / E_\gamma} = \frac{d^2 P}{d\Omega d\omega} \frac{1}{\hbar} = \frac{P_s \gamma}{E_{\gamma c}} F_s(E_\gamma, \psi) = \frac{8\sqrt{3} \dot{n}_s \gamma}{2\pi \cdot 45} [F_{s\sigma}(E_\gamma, \psi) + F_{s\pi}(E_\gamma, \psi)] \quad (4.76)$$

一般以 photons /s/0.1% bandwidth /mrad² 为单位, 其中, \dot{n}_s 为单个电子单位时间由于同步辐射而发出的光子数

$$\dot{n}_s = \frac{P_s}{E_{\gamma c}} \int_0^\infty \frac{S_s(E_\gamma / E_{\gamma c})}{E_\gamma / E_{\gamma c}} d(E_\gamma / E_{\gamma c}) = \frac{P_s}{E_{\gamma c}} \frac{15\sqrt{3}}{8} = \frac{5\sqrt{3}}{6} \alpha_f \omega_0 \gamma \quad (4.77)$$

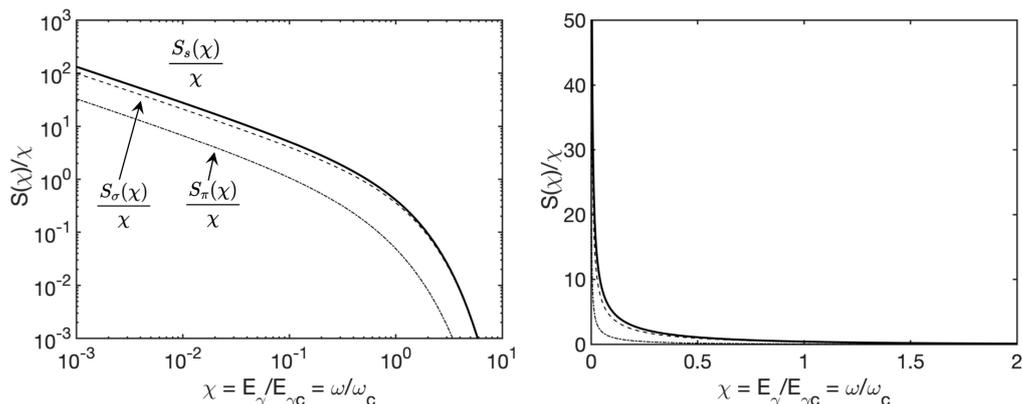


图 4.19: 同步辐射光子分布。左图为双对数标度, 右图为线性标度。

单电子每圈绕行 (平均) 发出的光子数有

$$n_s = \dot{n}_s \times T_0 = \dot{n}_s \times \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{5\pi\sqrt{3}}{3} \alpha_f \gamma = 0.0662\gamma \approx \frac{\gamma}{15} \quad (4.78)$$

由上可知, 辐射光子数 \propto 电子能量洛伦兹因子 γ , 越高能量的电子辐射出越多光子。

笔记 上面给出了单圈、单电子弯转过程发出的同步辐射 (平均) 光子数。由于绕行一圈周长为 $2\pi\rho$, 单位长度弯转过程期间, 单电子发出的同步辐射 (平均) 光子数则有 $n_s/2\pi\rho$ 。我们想估算一下在能够完整产生辐射脉冲的磁铁长度内, 即在 $2\rho/\gamma$ 长度内, 辐射光子数为多少。

$$\frac{\text{单圈 (平均) 光子数}}{2\pi\rho} \times \text{辐射形成长度} = \frac{n_s}{2\pi\rho} \frac{2\rho}{\gamma} \approx 0.02 \text{ 个} \quad (4.79)$$

意思是, 当电子单圈发出 n_s 个光子时, 忽略暂态效应, 仅考虑稳态情况, 电子经历 $2\rho/\gamma$ 弯转段时, 在 $\pm 1/\gamma$ 辐射圆锥内, 只有 0.02 个光子。这个结果有些颠覆我们从经典电动力学对电磁辐射的认识。此结果为一常数, 与电子能量洛伦兹因子 γ 无关; 电子能量越高, 辐射圆锥张角越小, 虽然产生的光子多了, 但是 $\pm 1/\gamma$ 辐射圆锥也小。

性质 换个方式说, 当电子弯转 $\pm 1/\gamma$ 弧度时, 约发出 α_f 个光子, 其中, $\alpha_f = 1/137$ 。

笔记 计算单电子的辐射场本身可以视为一种具有 (巧妙的) 物理近似假设的数学游戏。如果你/妳的数学足够好, 一个解析公式可能胜过许多计算软件。

注 相对论电子辐射总有张角 $\theta \approx \frac{1}{\gamma}$ 的特性。这个特性在计算辐射场的化简时, 有时候非常有用, 如:

$$\int_0^\pi (\dots \sin \theta \dots) d\theta \rightarrow \int_0^\infty (\dots \theta \dots) d\theta$$

4.4.6 讨论: 中心极限定理

前面介绍过, 单个电子在不同时刻发出同步辐射光子的过程彼此为独立 (independent) 事件过程, 即, 不同的辐射形成长度间是独立的。此外, 同步辐射频谱在 $\omega > \omega_c$ 的高

频成分呈指数衰减，或者，换句话说，在 $0 < \omega \leq \omega_c$ 的范围内改变不大 (参考 §4.4.2 或图 4.15) 而可近似视为常数。这两个前提条件使同步辐射光子的概率分布满足“中心极限定理”(central limit theorem, CLT)，总结如下：

定理 4.3. 中心极限定理

令在能量 u 时发出单个光子的概率密度为 $P(u)$ ，假设不同时刻放出光子事件彼此为独立，且高频成分发出光子 (或高能量光子) 的概率密度随之快速衰减，则当发出的光子数 n 足够多时， $n \gg 1$ ，这些 n 个光子的能量概率分布将满足高斯分布 (Gaussian distribution) 或正态分布 (normal distribution)，称中心极限定理 (central limit theorem, CLT)。

数学上， n 个光子的能量概率分布 $\mathcal{P}_n(w)$ 可写为

$$\mathcal{P}_n(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-(w-w_n)^2/2\sigma_n^2} \quad (4.80)$$

其中， n 个光子的中心能量 w_n 与能量方差 σ_n^2 写成

$$w_n = n\langle u \rangle, \quad \sigma_n^2 = n\sigma_u^2 \quad (4.81)$$

又称爱因斯坦关系 (Einstein relation)，同步辐射单个光子的平均能量与能量方差分别定义为

$$\langle u \rangle = \int uP(u)du, \quad \sigma_u^2 = \int (u - \langle u \rangle)^2 P(u)du \quad (4.82)$$

证明 由于不同时刻放出光子事件彼此为独立，因此， n 个光子的能量概率密度为各自相乘

$$P(u_1) du_1 P(u_2) du_2 \cdots P(u_n) du_n \quad (4.83)$$

概率分布则有

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_n(w) &= \iiint P(u_1) P(u_2) \cdots P(u_n) \delta\left(w - \sum_{i=1}^n u_i\right) du_1 du_2 \cdots du_n \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikw} [Q(k)]^n \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(kw+n \ln[Q(k)])} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-(w-w_n)^2/2\sigma_n^2} \end{aligned} \quad (4.84)$$

其中，第一个等号中的 $\delta(\dots)$ 函数表征 n 个光子的总能量，可按如下方式展开便于进一步化简

$$\delta\left(w - \sum_{i=1}^n u_i\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(w-\sum_i u_i)} \quad (4.85)$$

此外， $Q(k) \ll 1$ 的积分可按如下方式计算

$$Q(k) = \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-iku} P(u) \approx 1 - ik\langle u \rangle - \frac{1}{2} \langle u^2 \rangle k^2 + \cdots \quad (4.86)$$

注 此关系 $w_n \propto n$ 与 $\sigma_n \propto \sqrt{n}$ 表征物理上的扩散 (diffusion) 效应。§8.4 将介绍, 此同步辐射的扩散效应将与同步辐射阻尼效应相抗衡, 从而得到稳态解。□

注 以上提及的扩散效应又称正常扩散效应 (normal diffusion effect), 即 $\sigma_n^2 \propto n$ 或者说方差随时间成正比增加 $\sigma^2 \propto t^2$ 。正常扩散效应满足爱因斯坦关系 (Einstein relation), 即当 $\sigma^2 \propto t^\mu$ 有 $\mu = 1$, 又称布朗运动 (Brownian motion)。留意, 并不是物理上的所有扩散效应都满足 $\mu = 1$ 。当 $\mu \neq 1$ 时, 通称异常扩散效应 (anomalous diffusion effect)。可再细分:

- 当 $\mu < 1$ 时, 称亚扩散 (sub-diffusion)。
- 当 $\mu > 1$ 时, 则称超扩散 (super-diffusion)。

4.5 辐射形成长度 (formation length)

§4.1 讨论同步辐射特征频率时, 考虑了两种情况, 当弯转磁铁长度足够长而形成完整的单电子辐射脉冲或者当弯转磁铁不够长而无法形成完整辐射脉冲, 前者给出熟悉的同步辐射临界特征频率公式 $\omega_c \propto \gamma^3/\rho$, 后者给出短弯转磁铁 L 的同步辐射特征频率约有 $\omega_{\text{typ}} \propto \gamma^2/L$ 。当时, 提到了辐射场的纵向形成长度为 $l_f \sim \rho/\gamma$, 意思是, 弯转磁铁长度至少要比 l_f 长, 电子弯转过程发出的辐射场才能被远处观察者完整接收。这里的完整接收指的是, 从电子进入弯转段发出的最早的光子至电子离开弯转段发出的最晚的光子。

由 $l_f \sim \rho/\gamma$, 结合 $\omega_c = \frac{3c\gamma^3}{2\rho}$ 、 $\lambda = \lambda/2\pi = c/\omega$ 、横向角散 $\Delta\psi \sim (\lambda/\rho)^{1/3}$, 纵向形成长度 l_f 可以用辐射主波长 λ 与弯转半径 ρ 表示, 结果整理如下:

定理 4.4. 纵向辐射脉冲形成时间/长度、辐射脉冲时间/长度

对于中心频率为 ω 的电磁辐射, 电子绕行弯转段需要走一段 l_f 的弯转距离, 才能形成一个完整的辐射脉冲。这个距离称为纵向辐射脉冲形成长度 (longitudinal formation length), 可以估计为

$$l_f(\omega) \sim \rho^{2/3}\lambda^{1/3} \quad \text{或} \quad l_f(\omega) \sim \frac{\lambda}{\Delta\psi^2} \quad (4.87)$$

其中, $\lambda = \lambda/2\pi = c/\omega$, ρ 为弯转半径, $\Delta\psi \sim (\lambda/\rho)^{1/3}$ 为同步辐射场的横向散角。纵向辐射脉冲形成时间则为 $\tau_f = l_f/c$ 。

对于高频 $\omega \sim \omega_c$ (其中, $\omega_c = \frac{3c\gamma^3}{2\rho}$ 为同步辐射临界频率) 的电磁辐射, 电子绕行弯转段需要走大约 $l_f \sim \frac{\rho}{\gamma}$ 的弯转距离, 才能形成一个完整的辐射脉冲。换句话说, 绕行的电子需要在弯转段中花大约 $\tau_f \sim \frac{\rho}{c\gamma}$ 时间, 才能形成一个完整的辐射脉冲。此时, 产生的完整辐射脉冲时间长度约为 $\frac{\rho}{c\gamma^3}$ 。注意, 完整辐射脉冲时间 \neq 形成一个完整辐射脉冲所需要的时间。



笔记 如何理解 $\frac{\rho}{c\gamma}$ 与 $\frac{\rho}{c\gamma^3}$ 的联系? 注意, 相对论电子速率约 $v \approx c\left(1 - \frac{1}{2\gamma^2}\right)$, 而光子速率为 c 。速率差约有 $\frac{c}{2\gamma^2}$ 。在辐射脉冲形成时间 $\tau_f \sim \frac{\rho}{c\gamma}$ 内, 正是这个速率差造成辐射脉冲时长 $\tau_f \times \frac{c}{2\gamma^2} \sim \frac{\rho}{2\gamma^3}$ 。

注 如果弯转磁铁长度不够辐射脉冲形成长度 l_f 情况, 如: 对 10 MeV 电子 $\gamma = 10/0.511$, $\rho = 10$ m, 则 $l_f \sim 0.5$ m, 那么, 形成的辐射脉冲就不是完整的辐射脉冲, 此时辐射场又称边缘辐射 (edge radiation)。其对应的辐射频谱特性也就不是教科书常见的结果。

如果要得到完整的同步辐射脉冲, 一般要求弯转磁铁的长度必须是形成长度的数倍, 即, $L \gg l_f$, 或者, 弯转磁铁的弯转角度 $L/\rho \gg 1/\gamma$ 。

定理 4.5. 横向辐射脉冲形成尺寸 (transverse formation length)

除了电子沿纵向需要走一段距离 l_f (或花一段时间 τ_f), 沿横向 x, y 也需要有限空间范围 l_{\perp} 才能形成完整的辐射脉冲, 有

$$l_{\perp}(\omega) \sim \frac{\lambda}{\Delta\psi} \sim \rho^{1/3} \lambda^{2/3} \quad (4.88)$$

证明 由纵向波数 $k = \omega/c$, 已知辐射张角约为 $\Delta\psi \sim (\lambda/\rho)^{1/3}$, 则横向波数约为 $k_{\perp} \sim k \times \Delta\psi$. 横向波数的倒数可以表征横向辐射脉冲形成尺寸, 有 $l_{\perp} \sim k_{\perp}^{-1}$. \square



笔记 纵向辐射脉冲形成长度 l_f 类似于高斯激光束的瑞利长度 (Rayleigh length) z_R . 横向辐射脉冲形成长度 l_{\perp} 则类似于高斯激光束的束腰尺寸 (waist size) w_0 .

此讲义后面会陆陆续续讨论到辐射场特性, 由于高斯光束更适合描述光束的聚焦、散焦等, §1.22 介绍过, 以下整理一个在激光光学领域描述高斯光束非常实用的物理量, 称瑞利长度 (Rayleigh length), 定义如下:

定义 4.1. 瑞利长度 (Rayleigh length, Rayleigh range)、光束横向尺寸

如图 4.20, 光学中, 定义光场的瑞利长度定义为

$$z_R = \frac{k_L w_0^2}{2} = \frac{\pi w_0^2}{\lambda_L} \quad (4.89)$$

其中, $k_L = 2\pi/\lambda_L$ 为辐射波数, w_0 称为辐射场束腰 (waist), 为光束横向尺寸最小处。光束横向尺寸为

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \quad (4.90)$$

当 $z = z_R$ 时, 横向半径增加 $\sqrt{2}$ 倍, 有 $w(z) = \sqrt{2}w_0$; 横向面积增加 2 倍。

此外, 在 z 处波前的局域曲率半径 $R(z)$ 有

$$R(z) = z \left(1 + \frac{z_R^2}{z^2}\right) \quad (4.91)$$

注 两倍瑞利长度称共焦参数 (confocal parameter) $b = 2z_R$ 。

注 辐射光学中的瑞利长度对应电子光学的 betatron 函数, 在自由空间中有

$$\sigma_x(s) = \sigma_x(0) \sqrt{1 + \left(\frac{s}{\beta_{x0}}\right)^2} \quad (4.92)$$

其中, 在 $s = 0$ 处的 betatron 函数写为 β_{x0} , 束团尺寸写为 $\sigma_x(0)$ 。

注 关于高斯光束的介绍, 可参考 Gennady Stupakov and Gregory Penn, *Classical Mechanics and Electromagnetism in Accelerator Physics*, Springer (2018) 的 §13.2. \square

§1.22 介绍过, 与相同频率的均匀平面电磁波相比, 聚焦高斯光束传输时会产生额外的相移。高斯光束可以视为一系列不同空间频率分量的平面波的集合。那些传输方向与光轴方向存在一定角度的平面波分量在传输过程中经历了一些相移。这些分量的叠加后

使得高斯光束相对于沿光轴方向传输的平面波产生了此相移。这种相移是由德国科学家 Gouy 发现的，故称为古伊相移。

定义 4.2. 古依相移 (Gouy phase, Gouy phase shift)

定义为

$$\psi_G(z) = \tan^{-1} \left(\frac{z}{z_R} \right) \quad (4.93)$$

表征高斯光束与同样中心频率的平面波束的相位差。

注 有些文献的定义差一个负号。

注 此处 Gouy phase 与第 7 章 (§7.3) 将介绍的 Courant-Snyder 相位在数学结构上等价，分别描述激光光束与电子束的特性。对其物理图像的比较与讨论，有兴趣的读者可参考 K. Floetmann, Equivalence of Gouy and Courant-Snyder phase, Phys. Rev. A **102**, 033507 (2020). <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRevA.102.033507>

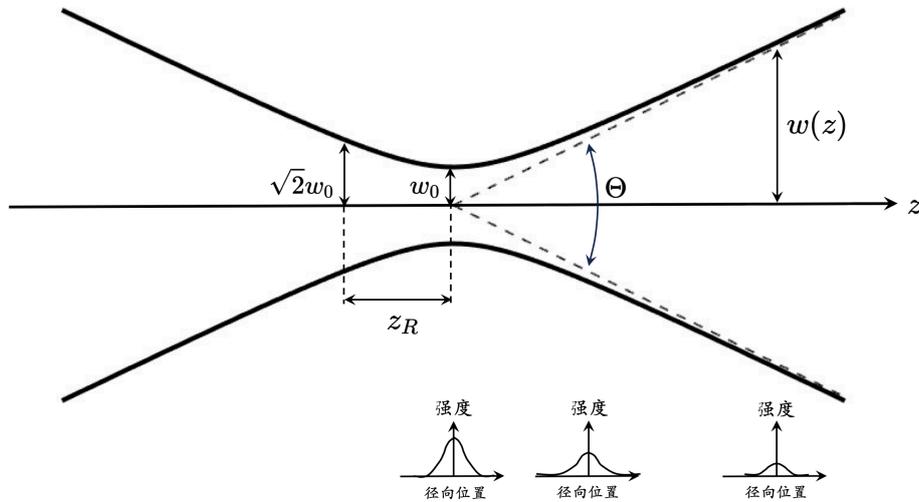


图 4.20: 高斯光束。下排为激光束的横向强度分布图，左边为束腰处 $z = 0$ ，中间为 $z = z_R$ 处，右边为甚远处，强度依序衰减。

已知激光束腰 w_0 可以写成 $w_0 = 2\frac{\lambda}{\theta}$ ，如果将 $\theta \rightsquigarrow \Delta\psi$ ，则 $\ell_{\perp} \sim \frac{\lambda}{\Delta\psi}$ 就可与激光束腰 w_0 比拟。将此 w_0 定标代入光场的瑞利长度 z_R 定义，有

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda_L} = 4 \frac{\pi \lambda^2}{\lambda_L \theta} = \frac{\lambda_L}{\pi \Delta\psi^2} \quad (4.94)$$

则纵向辐射脉冲形成长度 ℓ_f 可与高斯激光束的瑞利长度比拟。

由前面介绍的同步辐射频谱特性知道，同步辐射谱为宽谱。这里的分析假设在粒子弯转轨道附近没有边界，即为自由空间近似 (free space approximation)，不存在金属管壁。但在实际粒子加速器中，带电粒子处在高度真空环境，周围由金属真空管壁环绕。存在金属真空管壁的事实将导致辐射频谱在低频部分或长波长部分，辐射场将受到金属管壁

影响而被屏蔽 (shielding)。利用上面介绍的形成长度，可以形象化地理解同步辐射屏蔽效应。已知电子弯转时发出的同步辐射具有有限的横纵向尺寸，在加速器中，电子历经弯转段时，周遭的真空环境由金属管壁局限。当金属管壁的横向尺寸接近或比辐射横向形成长度小的时候，可以想像，电子产生的辐射场会被管壁“刮除”一部分，于是有了辐射屏蔽。由上讨论，我们知道辐射场包含不止一个波长，因此，金属管壁的屏蔽效应仅对那些对应横向形成长度长于管壁尺寸的波长有效，对短波长辐射无效。

定理 4.6. 辐射屏蔽因子

金属管壁的屏蔽效应仅对那些对应横向形成长度长于管壁尺寸的波长有效。假设金属管壁尺寸为 a ，弯转半径 ρ ，则将被有效屏蔽的辐射波长满足

$$\ell_{\perp} > a \Rightarrow \rho^{1/3} \lambda^{2/3} > a \Rightarrow \lambda > \sqrt{\frac{a^3}{\rho}} \quad (4.95)$$

其中， $\lambda = \lambda/2\pi$ 。当辐射波长比 $2\pi a^{3/2}/\rho^{1/2}$ 长时，对应的辐射功率将指数衰减。换句话说，如果将无金属管壁屏蔽的自由空间的辐射能量写成 U_{free} ，将存在金属管壁屏蔽时的辐射能量写成 U_{shield} ，则由于不是所有频率成分的辐射场都能辐射，即 $U_{\text{shield}} < U_{\text{free}}$ ，其比值可以估算为

$$\frac{U_{\text{shield}}}{U_{\text{free}}} \approx 4.2 \left(\frac{n_{\text{th}}}{n_c} \right)^{5/6} e^{-\frac{2n_{\text{th}}}{n_c}}, \quad n_{\text{th}} > n_c \quad (4.96)$$

其中，

- h 为金属管壁的全高，近似为 $h \approx 2a$

$$n_{\text{th}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{\pi\rho}{h} \right)^3 \quad (4.97)$$

- $n_c \approx \rho/\sigma_z$

证明 更多细节可参考 R. Li, C.L. Bohn, and J.J. Bisognano, Analysis on the steady-state coherent synchrotron radiation with strong shielding, Proceedings of the 1997 Particle Accelerator Conference. <https://doi.org/10.1109/PAC.1997.750787> □

4.6 整理：同步辐射实用公式

- 同步辐射光子临界频率

$$\omega_c = \frac{3c\gamma^3}{2\rho} \quad (4.98)$$

- 同步辐射光子临界能量 $E_{\gamma c} = \hbar\omega_c$ 与临界波长

$$E_{\gamma c} [\text{keV}] = 4.136 \times 10^{-18} f_c [\text{Hz}] = 2.218 \frac{E^3 [\text{GeV}]}{\rho [\text{m}]} = 0.665 E^2 [\text{GeV}] B [\text{T}] \quad (4.99)$$

$$\lambda_c [\text{nm}] = \frac{1.24}{E_{\gamma c} [\text{keV}]} = \frac{1.864}{E^2 [\text{GeV}] B [\text{T}]} \quad (4.100)$$

- 同步辐射场的大致张角 ψ (横向垂直方向)

$$\psi(\omega) \approx \begin{cases} \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^{1/3}, & \omega \ll \omega_c \\ \frac{1}{\gamma}, & \omega \approx \omega_c \\ \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^{1/2}, & \omega \gg \omega_c \end{cases} \quad (4.101)$$

- 根据经典电动力学图像，单个电子产生的同步辐射光子平均能量与方均能量有

$$\begin{aligned} \langle E_\gamma \rangle &= \frac{P_s}{\dot{n}_s} = \frac{8}{15\sqrt{3}} E_{\gamma c} \\ \langle E_\gamma^2 \rangle &= \frac{1}{\dot{n}_s} \frac{P_s}{E_{\gamma c}} \int_0^\infty E_\gamma^2 \frac{S_s(E_\gamma)}{E_\gamma/E_{\gamma c}} dE_\gamma/E_{\gamma c} = \frac{11}{27} E_{\gamma c}^2 \end{aligned} \quad (4.102)$$

- 单个电子绕行等磁环 (isomagnetic ring)¹⁶ 一圈产生的同步辐射能量为

$$U_0 [\text{keV}] = 88.45 \frac{E^4 [\text{GeV}]}{\rho [\text{m}]} = 26.5 E^3 [\text{GeV}] B [\text{T}] \quad (4.103)$$

- 对 N 个粒子形成的束团，绕行等磁环一圈产生的非相干同步辐射 (incoherent synchrotron radiation, ISR) 平均功率为

$$\begin{aligned} P_{\text{ISR,bunch,turn}} [\text{W}] &= \frac{N U_0}{T_0} = \frac{U_0 \langle I_b \rangle}{|e|} = 8.846 \times 10^4 \frac{E^4 [\text{GeV}]}{\rho [\text{m}]} \frac{\langle I_b \rangle [\text{A}]}{|e|} \\ &= 26.5 \times 10^3 E^3 [\text{GeV}] B [\text{T}] \langle I_b \rangle [\text{A}] \end{aligned} \quad (4.104)$$

留意，此处等磁环中的平均电流 $\langle I_b \rangle$ 定义为

定义 4.3. 储存环平均电流 $\langle I_b \rangle$

定义为

$$\langle I_b \rangle = |e| N_e f_{\text{rev}}$$

其中， N_e 为束团内电子个数， $f_{\text{rev}} = 1/T_{\text{rev}}$ 为束团绕行频率。 □

- 对 N 个粒子形成的束团，经过弯转磁铁 L_b 产生非相干同步辐射平均功率为

$$P_{\text{ISR,bunch},L_b} [\text{W}] = P_{\text{ISR,bunch,turn}} \times \frac{L_b}{2\pi\rho} = 14060 E^4 [\text{GeV}] \langle I_b \rangle [\text{mA}] \frac{L [\text{m}]}{\rho^2 [\text{m}]} \quad (4.105)$$

- 对 N 个粒子形成的束团，绕行等磁环一圈或经过弯转磁铁 L_b 产生相干同步辐射 (coherent synchrotron radiation, CSR) 功率可参考 §15.4

¹⁶等磁环定义为平均弯转半径即二极铁的弯转半径，即 $C = 2\pi\langle R \rangle = 2\pi\rho$ 。关于等磁环的特性将在第 8 章介绍。

- 同步辐射功率频谱最大值发生在 $\omega \approx 0.3\omega_c$ ，对一束团有

$$\left(\frac{dP_{\text{bunch}}}{d\omega}\right)_{\text{max}} [\text{W} \cdot \text{sec}] = \frac{NU_0 S_{s,\text{max}}}{T_0 \omega_c} = 0.57 \frac{NP_0}{\omega_c} = 1.5 \times 10^{17} E[\text{GeV}] \langle I_b \rangle [\text{mA}] \quad (4.106)$$

其中， $P_0 = U_0/T_0$ 。

- 对 N 个粒子形成的束团，平均电流为 I_b 时，同步辐射功率 能量谱角 分布有

$$\frac{d^2 P}{d\Omega dE_\gamma} = 2.12410^{-3} \times E^2 [\text{GeV}] \langle I_b \rangle [\text{A}] \left(\frac{E_\gamma}{E_{\gamma c}}\right)^2 (1 + \gamma^2 \psi^2)^2 \left[K_{2/3}^2(\xi) + \frac{\gamma^2 \psi^2}{1 + \gamma^2 \psi^2} K_{1/3}^2(\xi) \right] \quad (4.107)$$

其中，辐射光子能量与频率有 $E_\gamma = \hbar\omega$ 。一般以 **Watts/mrad²/eV** 为单位。

- 对 N 个粒子形成的束团，平均电流为 I_b 时，同步辐射功率 角 分布

$$\frac{dP}{d\Omega} [\text{Watt/mrad}^2] = 5.42E^4 [\text{GeV}] B[\text{T}] \langle I_b \rangle [\text{A}] \frac{1}{(1 + \gamma^2 \psi^2)^{5/2}} \left[1 + \frac{5\gamma^2 \psi^2}{7(1 + \gamma^2 \psi^2)} \right] \quad (4.108)$$

对轴上 ($\psi = 0, \phi = 0$) 来说，有

$$\frac{dP}{d\Omega} [\text{Watt/mrad}^2] = 5.42E^4 [\text{GeV}] B[\text{T}] I_b [\text{A}] \quad (4.109)$$

- 对 N 个粒子形成的束团，平均电流为 I_b 时，单位时间同步辐射光子数 能谱角 分布有

$$\frac{d\dot{n}}{d\Omega dE_\gamma/E_\gamma} = 1.32510^{13} \times E^2 [\text{GeV}] \langle I_b \rangle [\text{A}] \left(\frac{E_\gamma}{E_{\gamma c}}\right)^2 (1 + \gamma^2 \psi^2)^2 \left[K_{2/3}^2(\xi) + \frac{\gamma^2 \psi^2}{1 + \gamma^2 \psi^2} K_{1/3}^2(\xi) \right] \quad (4.110)$$

其中，一般以 **photons /s/0.1% bandwidth /mrad²** 为单位。

- 单个电子单位时间由于同步辐射而发出的光子数

$$\dot{n}_s [\text{photons/sec}] = \frac{5\sqrt{3}}{6} \alpha_f \omega_0 \gamma \approx 6.2cB[\text{T}] \quad (4.111)$$

- 单电子每圈绕行 (平均) 发出的光子数

$$n_s = \frac{5\pi\sqrt{3}}{3} \alpha_f \gamma = 0.0662\gamma \quad (4.112)$$

- 单个电子单位时间由于同步辐射而发出的光子数，包含水平极化 (σ) 与垂直极化 (π) 光子数，根据经典电动力学图像，单个电子产生的同步辐射平均能量与方均能量有

$$\begin{aligned} \dot{n}_\sigma &= \frac{12\sqrt{3}}{8} \frac{P_s}{E_{\gamma c}}, & \dot{n}_\pi &= \frac{3\sqrt{3}}{8} \frac{P_s}{E_{\gamma c}}, & \dot{n}_s &= \frac{15\sqrt{3}}{8} \frac{P_s}{E_{\gamma c}} \\ \langle E_{\gamma\sigma} \rangle &= \frac{35\sqrt{3}}{180} E_{\gamma c}, & \langle E_{\gamma\pi} \rangle &= \frac{20\sqrt{3}}{180} E_{\gamma c}, & \langle E_\gamma \rangle &= \frac{32\sqrt{3}}{180} E_{\gamma c} \\ \langle E_{\gamma\sigma}^2 \rangle &= \frac{25}{54} E_{\gamma c}^2, & \langle E_{\gamma\pi}^2 \rangle &= \frac{10}{54} E_{\gamma c}^2, & \langle E_\gamma^2 \rangle &= \frac{22}{54} E_{\gamma c}^2 \end{aligned} \quad (4.113)$$

- 单位时间电子束团由于(非相干)同步辐射而发出的光子数

$$\dot{N}_s [\text{photons/sec}] = 4.14 \times 10^{17} \frac{R [\text{m}]}{\rho [\text{m}]} \gamma I_b [\text{A}] \quad (4.114)$$

其中, I_b 为束团电流。

- 弯转段内单位长度电子束团由于(非相干)同步辐射而发出的光子数

$$\frac{dN}{ds} [\text{photons/m}] = 6.60 \times 10^{16} \frac{R [\text{m}]}{\rho [\text{m}]^2} \gamma I_b [\text{A}] \quad (4.115)$$

第四章 补充习题

1. 推导同步辐射临界频率 ω_c 。对 3 GeV 电子，弯转半径 10 m 的储存环，临界频率大约多少？
2. 这一章分析的情况为无边界自由空间。存在金属真空管道时，将考虑辐射屏蔽效应，试利用辐射屏蔽因子给出 $\frac{d^2P}{d\Omega d\omega}$ 的粗略修正估算。

解 提示：金属屏蔽对辐射功率的影响为指数衰减。

3. 一般教科书描述 1947 年同步辐射首次在美国通用电气公司的电子同步加速器为意外发现。该加速器能量约 70 MeV，轨道半径约 0.3 m，弯转磁场强度约 0.81 T。现在回头看，试估算同步辐射临界波长，用来解释当时观察到的可见光是可预期的，只是当时量测几乎关注在微波频段。

第五章 波荡器辐射

内容提要

- 四代光源大致进展
- 共振条件 $\lambda_\ell = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K_u^2}{2} + \gamma^2\theta^2\right)$
- 波荡器参数 $K_u = \frac{\psi_0}{1/\gamma} = \gamma\psi_0$
- 波荡器与扭摆器的辐射特性

粒子加速器中最常见的两种辐射机制：同步辐射、波荡器辐射。同步辐射在上一章介绍了，这一章将介绍波荡器 (undulator) 辐射。有时候又将扭摆器 (wiggler) 辐射与这里的波荡器辐射统称波荡器辐射。类似于上一章，尽管这一章的讨论涉及波荡器辐射场能量计算，同时由能量守恒知道，电子能量将因此损耗而减小。但是，当我们计算波荡器辐射场能量时，仍假设电子能量不变，暂时忽略因此造成的电子能量损失。此电子束整体能量损失/偏移效应在分析自由电子激光 (free electron laser, FEL) 时可能需要考虑，如：低增益 FEL、饱和 FEL，可参考第 10 章。

5.0 问答预览

1. 什么是波荡器辐射?
⇒ 波荡器辐射是相对论粒子在周期性变化的磁场中运动时产生的一种电磁辐射。
2. 波荡器辐射与同步辐射有什么区别?
⇒ 波荡器辐射需要设计专门的波荡器元件产生周期性磁场，而同步辐射是电子在弯转磁铁中转弯时就能产生。
3. 什么是波荡器参数 K_u ?
⇒ 波荡器参数 K_u 表示电子在波荡器中横向扭摆角度 ψ_0 与同步辐射张角 $1/\gamma$ 的比值，是决定波荡器辐射特性的重要参数。
4. 什么是波荡器辐射的共振条件?
⇒ 波荡器辐射的共振条件是指电子产生的辐射波长与波荡器周期、电子能量和观察者位置满足特定的关系，使得辐射场能够发生建设性干涉。
5. 波荡器辐射的谱宽与什么因素有关?
⇒ 波荡器辐射的谱宽与波荡器周期数有关，周期数越多，谱宽越窄。
6. 平面型波荡器辐射的偏振特性是什么?
⇒ 平面型波荡器产生线偏振辐射。
7. 什么是波荡器辐射的脉冲形成长度?
⇒ 波荡器辐射的纵向脉冲形成长度是指电子在波荡器中形成完整辐射脉冲所需走过的距离，等于波荡器长度。横向形成长度则约为电子束横向尺寸。
8. 什么是衍射极限?
⇒ 衍射极限是指光束在传播过程中由于衍射效应产生的最小 (横向) 光斑尺寸。

波荡器又分平面型波荡器 (planar undulator) 与螺旋型波荡器 (helical undulator)。简化起见，这一章仅讨论平面型波荡器，其空间坐标变量如图 5.1 所示。

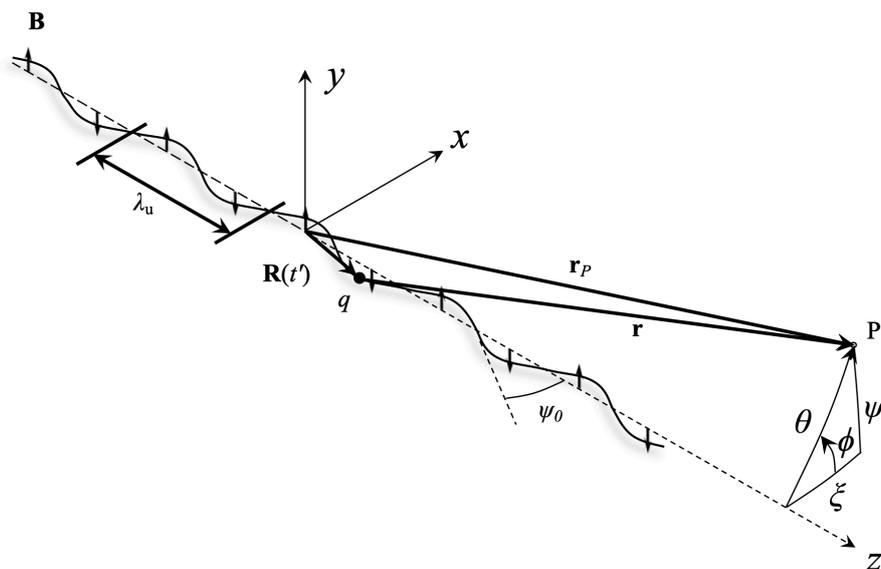


图 5.1: 平面型波荡器空间坐标变量 $\psi = \theta \sin \phi$, $\xi = \theta \cos \phi$, $d\Omega = \theta d\phi d\theta = d\xi d\psi$ 。按此图, 推迟条件要求 $t = t' + r(t')/c$, 其中, $r(t') = |\mathbf{r}(t')| = |\mathbf{r}_P - \mathbf{R}(t')|$ 。电子扭摆轨迹落在 xz 平面, 波荡器磁场 $B_y(z)$ 沿着 y 方向, 在波荡器轴附近垂直于 xz 平面。

永磁平面型波荡器的大致样貌如图 5.2, 还细分“真空外”波荡器 (out-of-vacuum undulator) 与“真空内”波荡器 (in-vacuum undulator)。产生磁场的方式除了永磁铁, 还可以采用电磁铁、超导磁铁等, 细节此处不论。此讲义着重讨论平面型波荡器, 对螺旋型波荡器与平面型波荡器的细节区别也不做讨论。

5.1 四代光源大致进展

在理论与实验方面, 对同步辐射的探讨比波荡器辐射要早, 这是由于同步辐射在环形加速器 (如, 同步加速器或储存环) 中, 当电子转弯时, 就不可避免产生同步辐射。因此, 在电子环形加速器发展阶段时, 其实就伴随着同步辐射的产生。波荡器辐射则是在人们对同步辐射的认识与需求更加明确后, 才开始进行探索的。要产生波荡器辐射需要波荡器, 此元件并不像弯转磁铁, 在环形加速器中并不是必须存在。这也是为什么有时候波荡器或扭摆器又称插入件 (insertion device), 是选择性地作为加速器的一部分组成。

高能相对论电子产生辐射光源的发展进程可以大致分为四个阶段:

- 第一代 高能物理电子储存环的副产品、一种寄生的辐射能量损耗 (parasitic loss)、不是有意产生的。
- 第二代 有意、专门设计电子束以产生的电磁辐射, 称同步辐射 (synchrotron radiation)。
- 第三代 电子储存环中有意、专门设计插件磁铁 (insertion device) 以产生的电磁辐射, 称波荡器辐射 (undulator radiation) 或扭摆器辐射 (wiggler radiation)。

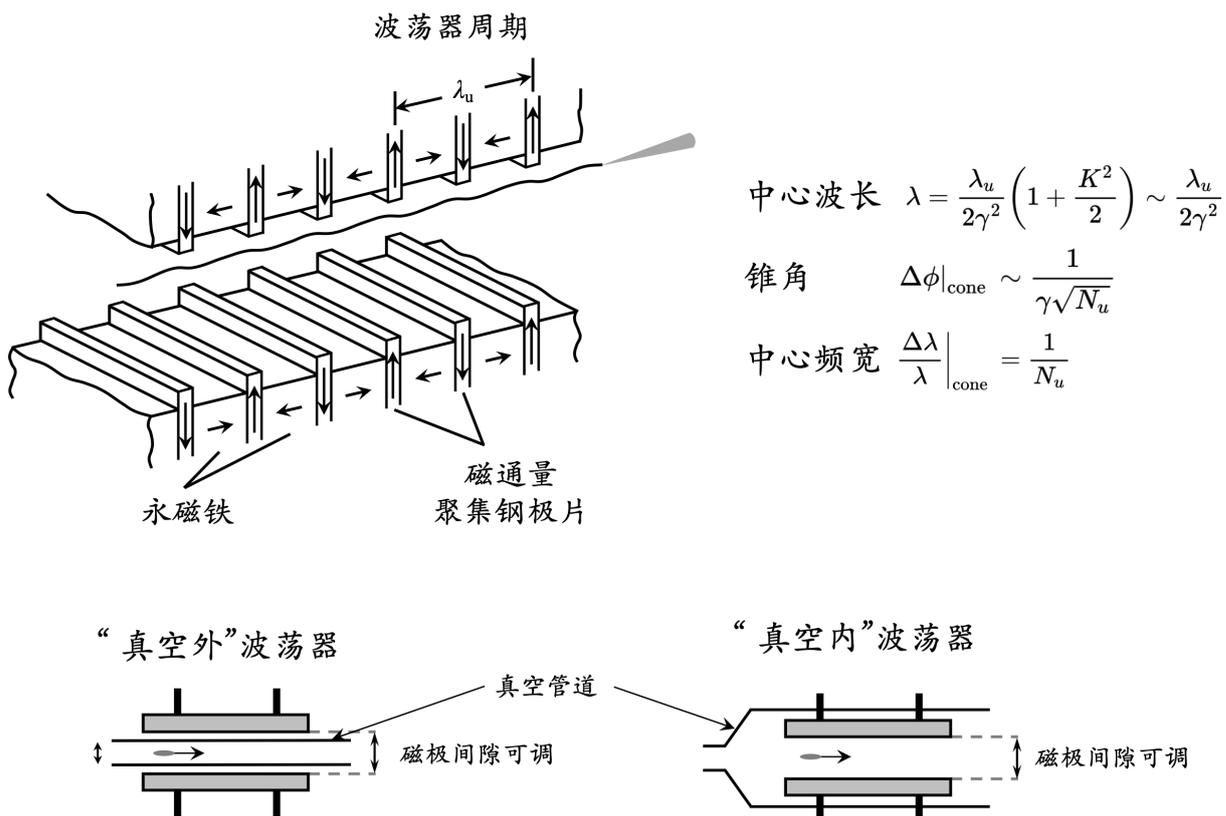


图 5.2: 永磁平面型波荡器。上排为示意图与辐射特性，下排为考虑真空管道的两种波荡器类型。

第四代 自由电子激光 (free-electron laser, FEL)、衍射极限储存环 (diffraction-limited storage ring, DLSR)。

笔记 最近可能听闻“第五代”光源，读者觉得什么将是第五代光源？如何定义？

5.2 波荡器辐射的定性讨论

几个基本平面型波荡器参数:

1. 波荡器磁场

$$B(z) = B_y(z) = B_0 \cos(k_u z), \quad \int_{-L_u/2}^{L_u/2} B_y(z) dz = 0 \quad (5.1)$$

2. 由洛伦兹力方程,

$$\frac{dp_x}{dt} = m\gamma \frac{d^2x}{dt^2} = -qvB_0 \cos k_u z \approx -qcB_0 \cos k_u z \quad (5.2)$$

有电子轨迹

$$\begin{aligned} x(t) &\approx \frac{qB_0}{m\gamma k_u^2 c} \cos(k_u ct) \\ x(z) &\approx \frac{qB_0}{m\gamma k_u^2 c} \cos(k_u z) = a \cos(k_u z) \\ v_x(t) = \dot{x}(t) &= \frac{dx}{dt} = -\frac{qB_0 c}{m\gamma k_u c} \sin(k_u ct) \\ x' = \frac{dx}{dz} &= -\frac{qB_0}{m\gamma k_u c} \sin(k_u z) = -ak_u \sin(k_u z) = -\psi_0 \sin(k_u z) \end{aligned} \quad (5.3)$$

其中, $a = \frac{qB_0}{m\gamma k_u^2 c}$ 为临时替代符号, ψ_0 与前面介绍的同步辐射张角的比较形成一个决定波荡器辐射特性的重要参数。以上做了 $v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} \approx c$ 的假设。

3. 波荡器参数

$$K_u = \frac{\psi_0}{1/\gamma} = \gamma\psi_0 \quad (5.4)$$

$$K_u \neq k_u$$

$K_u < 1$ 称 weak undulator; $K_u > 1$ 称 strong undulator 或 wiggler。

注 仅有 $B(z) = B_y = B_0 \cos(k_u z)$ 的磁场其实不满足 Maxwell 方程, 即, 不满足磁场高斯定律 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 。因此, 此形式应视为仅在波荡器沿轴附近 ($x, y \ll 1$) 成立的近似表示。

练习 5.1 第1章介绍过, 对无电流区域, 磁场分析可采用类似静电场的拉普拉斯方程 $\nabla^2 \varphi_m = 0$ 分析。考虑如下标量磁位函数

$$\varphi_m(x, y, z) = -\frac{B_0}{k_u} \sinh(k_u y) \sin(k_u z)$$

利用 $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = -\mu_0 \nabla \varphi_m$ 求波荡器的磁场。 ■

解

$$\mathbf{B}(x, y, z) = B_0 \cosh(k_u y) \sin(k_u z) \hat{\mathbf{y}} + B_0 \sinh(k_u y) \cos(k_u z) \hat{\mathbf{z}}$$

可验证此表示式满足磁场高斯定律。这里的 $\hat{\mathbf{z}}$ 分量表征的是波荡器磁极的边缘场, 参考图 5.3。当 $y \rightarrow 0$ 时, 退化为上面的 $B_y(z) = B_0 \sin(k_u z)$ 简化模型 (差一静磁场相位, 无妨), 同时表征在波荡器中心轴 (on-axis) 上无 $\hat{\mathbf{y}}$ 方向以外的边缘磁场。 ■

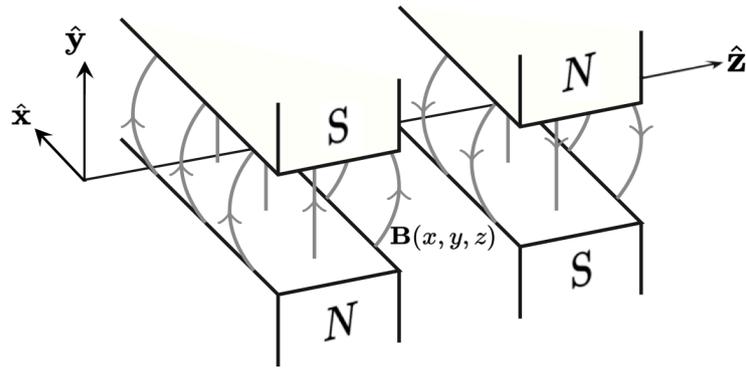


图 5.3: 平面波荡器磁极边缘磁场样貌。

5.2.1 共振条件 $\lambda_1 = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K_z^2}{2} + \gamma^2\theta^2 \right)$

不同于弯转磁铁产生同步辐射，电子经过波荡器时，由于具有周期重复性，因此存在共振条件。由于辐射场的波动特性，那些满足建设性干涉的频率或波长成分能够在远处观察位置被探测到，称满足共振条件 (resonance condition)。

参考图 5.4，类似于 §3.4 介绍的 Smith-Purcell 辐射，建设性干涉发生在电子经历相邻波荡器周期时，产生的辐射场相对于观察位置路径上的路程差为辐射波长整数倍 n 时，考虑 $n = 1$ ，即 $\lambda_u/(\beta c) - \lambda_u \cos \theta/c = 1 \cdot \lambda_1/c$ ，有

$$\lambda_1(\theta) = \frac{\lambda_u}{\beta} (1 - \beta \cos \theta) \tag{5.5}$$

其中， β 应视为沿着扭摆曲线的切线速率。当 $K \ll 1$ 时， $\beta \approx \beta_z$ 。考虑 $\beta_z \rightarrow 1$ 、 $\gamma \gg 1$ 情况，则上式可以简化为

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} (1 + \gamma^2\theta^2) \tag{5.6}$$

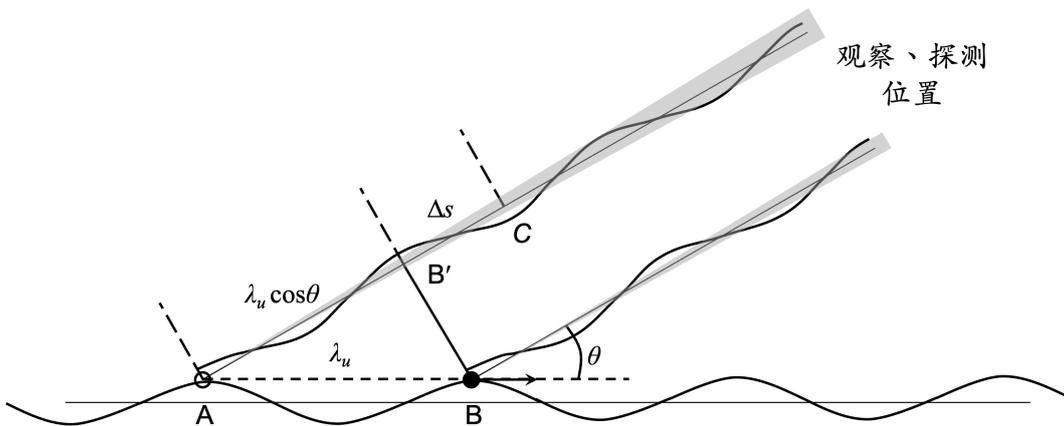


图 5.4: 波荡器辐射共振条件即为建设性干涉条件。

但是，当 K 不再那么小时，即不再能忽略扭摆运动导致 β_z 与 β 之间的差异时，则

需要考虑 $\beta_z < \beta$ 的微小修正。由 $v_x = \frac{dx}{dt} = -\frac{Kc}{\gamma} \sin(k_u z)$, 有

$$v_z = \sqrt{v^2 - v_x^2} \approx v \left(1 - \frac{v_x^2}{2c^2} \right) = v \left[1 - \frac{K^2}{2\gamma^2} \sin^2(k_u z) \right] \quad (5.7)$$

将 $\sin^2(k_u z)$ 项沿波荡器 z 做平均后, 有

$$\bar{v}_z = v \left(1 - \frac{K^2}{4\gamma^2} \right) \quad (5.8)$$

可以看到, $\bar{\beta}_z = \bar{v}_z/c$ 与 $\beta = v/c$ 的微小差异在此体现。对应的洛伦兹相对论因子 γ_z 与 γ 的差别有

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_z &= \frac{1}{\sqrt{1 - \bar{v}_z^2/c^2}} \approx \left[1 - \frac{v^2}{c^2} \left(1 - \frac{K^2}{2\gamma^2} \right) \right]^{-1/2} \approx \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{K^2}{2\gamma^2} \right)^{-1/2} \\ &= \left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{K^2}{2\gamma^2} \right)^{-1/2} = \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \frac{K^2}{2}}} \end{aligned} \quad (5.9)$$

将上式的 $\bar{\gamma}_z$ 替代 Eq. (5.6) 分母的 γ , 则有修正后的共振条件。波荡器辐射共振条件整理如下:

定理 5.1. 波荡器辐射共振条件

电子经过波荡器时, 辐射波长 λ_1 、电子束参数 γ 与波荡器参数满足以下条件时, 则称电子满足共振条件

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K_u^2}{2} + \gamma^2 \theta^2 \right) \quad (5.10)$$

其中,

- λ_1 为辐射场或外加激光场波长,
- λ_u 为波荡器周期,
- γ 为洛伦兹因子,
- K_u 为波荡器参数, 有时也写成 K , 有

$$K = \frac{|e|B_0}{m_e c k_u} = 0.934 \lambda_u [\text{cm}] B_0 [\text{T}] \quad (5.11)$$

其中, B_0 为峰值磁场强度, $k_u = 2\pi/\lambda_u$,

- θ 为观察者位置。一般考虑沿轴 (on-axis), 则 $\theta = 0$ 。

此时, 电子发出的辐射场将建设性干涉。或者, 当外加激光场满足此共振关系时, 电子与激光场能够有效交换能量。

注 以上为基波 ($n = 1$) 的共振条件。如果考虑谐波, 则有

$$\lambda_n = \frac{\lambda_1}{n} = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2 n} \left(1 + \frac{K^2}{2} + \gamma^2 \theta^2 \right) \quad (5.12)$$

其中, n 为谐波数。

注 参考图 5.2, 基于永磁/钢铁混合优化设计后形成的波荡器, 其轴上峰值磁场强

度可写成如下表示式 [又称 Halbach 公式]

$$B_0[T] \approx 3.44 e^{-\frac{g}{\lambda_u} (5.08 - 1.54 \frac{g}{\lambda_u})} \quad \text{钕铁硼合金 (neodymium-iron)} \quad (5.13)$$

$$B_0[T] \approx 3.33 e^{-\frac{g}{\lambda_u} (5.47 - 1.8 \frac{g}{\lambda_u})} \quad \text{钐钴合金 (samarium-cobalt)}$$

其中, g 为磁极间隙 (不是金属真空管道半径), 假设 $g < \lambda_u$ 。基于超导磁铁设计形成的超导波荡器 (superconducting undulator, SCU), 其轴上峰值磁场强度可写成如下表示式

$$B_0 [T] \approx (0.48534 + 0.41611\lambda_u[\text{cm}] - 0.039932\lambda_u^2[\text{cm}]) e^{-\frac{\pi(2g-\lambda_u)}{2\lambda_u}} \quad \text{铌-钛合金 (NbTi)}$$

$$B_0 [T] \approx (0.68115 + 0.64105\lambda_u[\text{cm}] - 0.060986\lambda_u^2[\text{cm}]) e^{-\frac{\pi(2g-\lambda_u)}{2\lambda_u}} \quad \text{铌三锡 (Nb}_3\text{Sn)} \quad (5.14)$$

注 有些文献或教科书将波荡器参数写成 a_u , 并定义成 $a_u = \frac{K_u}{\sqrt{2}}$, 于是, 共振条件写成

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} (1 + a_u^2 + \gamma^2\theta^2) \quad (5.15)$$

练习 5.2 证明波荡器辐射共振条件。 ■

性质 由上可知, 电子在波荡器中的横向振荡位移振幅有 $\frac{qB_0}{m\gamma k_u^2 c} = \frac{K_u}{\gamma k_u}$; 横向振荡张角振幅有 $\frac{qB_0}{m\gamma k_u c} = \frac{K_u}{\gamma}$ 。

上面讨论的共振条件其实是相对论多普勒效应的结果。参考图 5.5, 考虑 $K_u \ll 1$ 情况, 电子发出的辐射场以 c 传播, 电子以 $v < c$ 前进, 沿轴上的观察者接收到的波长为 $\lambda = \frac{\lambda_u}{\beta} - \lambda_u \approx \frac{\lambda_u}{2\gamma^2}$ 。如果不在轴上, 则有 $\lambda \approx \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} (1 + \gamma^2\theta^2)$ 。

注 这里介绍的共振条件除了共振, 还包含干涉的物理图像。同时, 此条件强调在满足共振条件下, 形成电子与光场的净能量转移。注意, 后面第 10 章介绍自由电子激光 (FEL) 理论时, 将得到同样形式的共振条件, 但在那时候我们将更强调光场与电子的滑移 (slip-page) 效应。

以上介绍的周期变化磁场形成的波荡器可以是常温的永磁、电磁铁, 也可以是低温超导磁铁。对行经波荡器的电子而言, 由于洛伦兹变换, 感受到不是静磁场, 而是时变电磁场。从这个角度看, 波荡器在实验室坐标就不再限于周期静磁场, 也可以视为一种特殊的波荡器, 称激光波荡器 (laser undulator)。相应的有等效波荡器参数与共振条件, 总结如下:

定理 5.2. 激光波荡器共振条件

假设激光强度为 I_L [MW/cm²]、激光中心波长 λ_L , 则有等效的波荡器参数 K_L

$$K_L \approx \sqrt{2.3 \times 10^{-5} \lambda_L^2 [\text{cm}^2] I_L [\text{MW}/\text{cm}^2]} \quad (5.16)$$

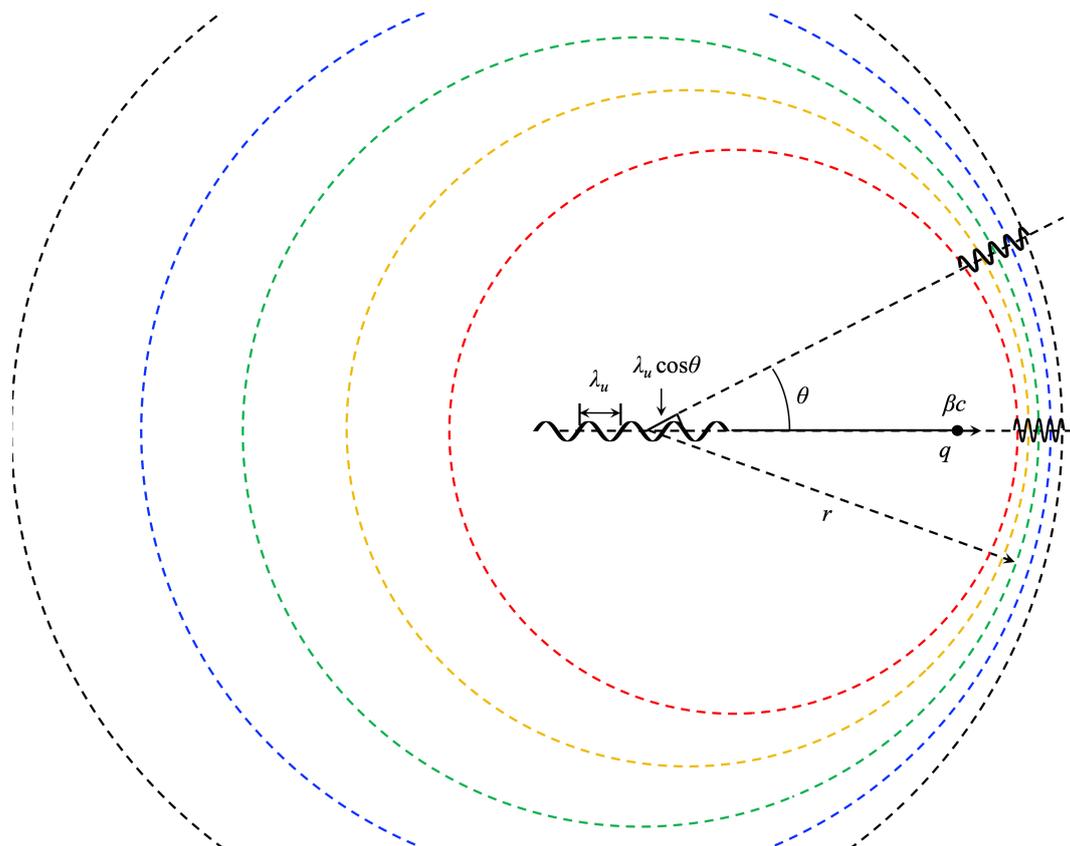


图 5.5: 波荡器辐射的多普勒效应图像。

与共振辐射波长 λ_r

$$\lambda_r \cong \frac{\lambda_L}{4\gamma^2} \left(1 + \frac{K_L^2}{2} \right) \quad (5.17)$$

其中, γ 表征电子能量, 为在实验室静止坐标的洛伦兹因子。

由于激光的中心波长比起磁铁实体的尺寸小得多, 因此, 在同样电子能量情况下, 共振辐射波长将大大减小。

注 共振条件中的分母为 $4\gamma^2$, 不是 $2\gamma^2$ 。这是因为假设激光传播方向与电子束行进方向(反)平行。



笔记 比较这里介绍的激光波荡器与 §1.19 介绍的康普顿散射的物理图像。



练习 5.3 以上分析假设激光场为均匀平面电磁波, §1.22 介绍过定向电磁波的高斯激光场, 试利用高斯光束模型, 推广以上结果。 ■



笔记 形成波荡器的概念能够适当推广, 凡是能产生周期性电磁场的元件或结构或许可以视为一种广义的波荡器。近年有提出一种利用晶体中自然周期形成的库仑场, 将其视为波荡器, 称为晶体波荡器 (crystalline undulator)。电子注入后产生扭摆运动从而产生晶体

波荡器辐射。感兴趣的读者可参考相关文献，如：A. Kostyuk et al., The influence of the structure imperfectness of a crystalline undulator on the emission spectrum, Nucl. Instrum Methods in Phys. Res. B **266**, 972-987(2008). <https://doi.org/10.1016/j.nimb.2007.12.107>。

5.2.2 波荡器辐射像甩动的探照灯，谱宽 $\frac{\Delta\omega}{\omega_1} \approx \frac{1}{N_u}$

波荡器辐射就像甩动的探照灯，甩动的幅度不同，观察者接收到的电磁信号的特性也就不同，参考图 5.6。

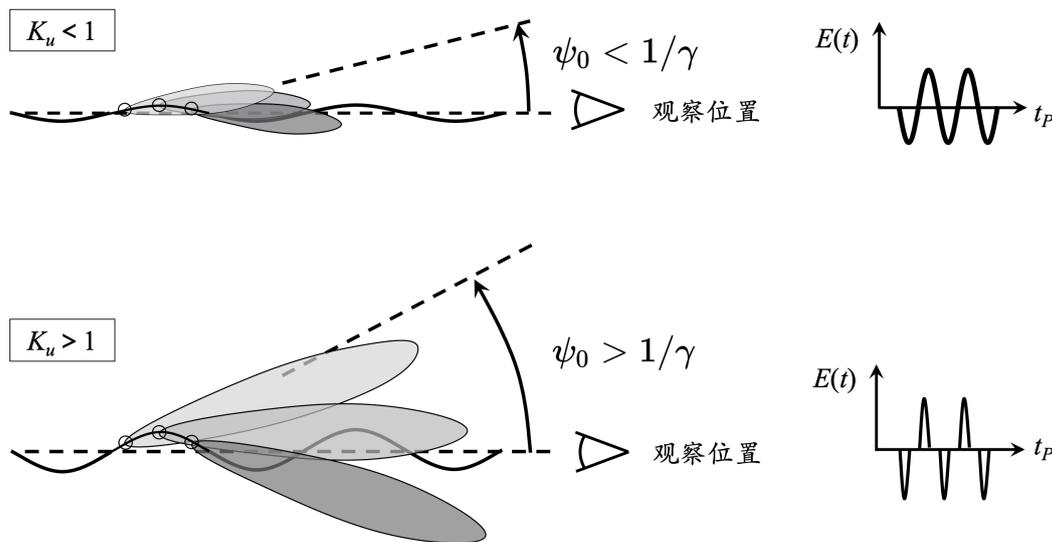


图 5.6: 波荡器辐射像甩动的探照灯。 $K_u < 1$ 的(弱)波荡器，电子扭摆产生的辐射场一直照射轴上的观察者； $K_u > 1$ 的(强)波荡器(或称扭摆器)，电子扭摆幅度较大，产生的辐射场只能断断续续、无法一直照射轴上的观察者。

笔记 同步辐射是“旋转”的探照灯；波荡器辐射是“甩动”的探照灯，“甩动”可以是左右甩(线极化)、旋转甩(圆极化)。

利用实验室坐标与粒子移动坐标间的洛伦兹转换 (Lorentz transformation) 的概念，可以定性得到在两种坐标系下的波荡器辐射分布与对应的频谱。下图 5.7与5.8分别考虑 $K_u \leq 1$ (小幅度甩) 与 $K_u > 1$ (大幅度甩) 的情况。 $K_u \leq 1$ (小幅度甩) 产生的辐射频谱接近单频(在移动坐标系)， $K_u > 1$ (大幅度甩) 的情况则存在谐波。从粒子移动坐标系回到实验室静止坐标系时，在频谱上出现红移 (red shift)，即波长变长，这与前面介绍的共振条件中的 $\gamma^2\theta^2$ 一项有关。

5.2.3 平面型波荡器是线偏振主导

平面波荡器产生线偏振辐射。在观察位置，偏振方向一般是观测角的函数。当观察者在水平面 $\phi = 0, \psi = 0$ 观测时，辐射场沿 x 方向偏振。辐射场的线偏振特性源自每个

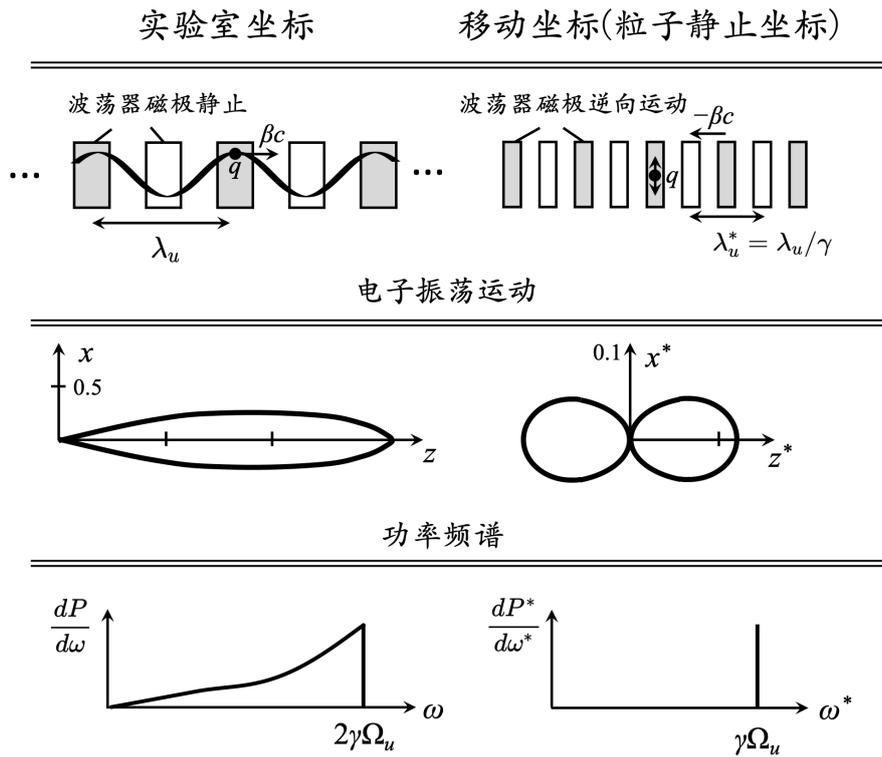


图 5.7: 在实验室静止坐标系与质心移动坐标系的波荡器辐射分布与频谱: $K_u \leq 1$ 。

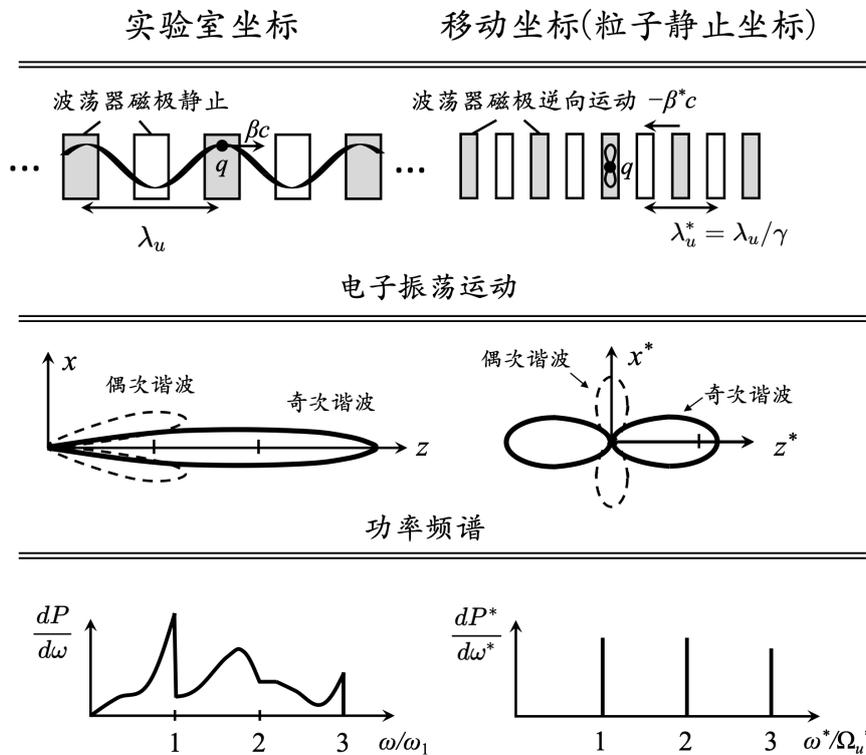


图 5.8: 在实验室静止坐标系与质心移动坐标系的波荡器辐射分布与频谱: $K_u > 1$ 。图例修改自 A. Hofmann 一书的 Fig. 6.6。留意, 该书此图标注的 even 与 odd 不正确, 此处已修正。

波荡器周期内电子轨迹的对称性。

如果观察位置与波荡器平面具有一定垂直距离，则可以看到电子在一个完整扭摆振荡的前半周期内逆时针旋转，产生椭圆偏振，在后半周期内则反向旋转，产生相反的椭圆偏振辐射。由于这两个半周期中的运动是对称的，上述椭圆偏振合成后得到的场仍是线偏振。

由此延伸许多可变偏振 (variable polarization) 的波荡器设计，如：APPLE (advanced planar polarized light emitter)、Delta (Δ) 波荡器等。

注 这里提到的平面型波荡器是线偏振主导，无论在波荡器轴上或偏离轴的观察位置，都是线偏振。如果是螺线型波荡器，产生的辐射场可以是椭圆偏振或线偏振。

5.3 波荡器辐射的定量讨论

与同步辐射的分析方法一样。把握原则：

1. 计算电子运动学物理量，包含 $\beta, \dot{\beta}, \mathbf{r}_P, \mathbf{R}$ 等。
- ⇒ 与同步辐射相比，波荡器辐射的电子运动较复杂，包含横向与纵向振荡。
2. 对 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_P - \mathbf{R}, t_P \equiv t - \frac{r_P}{c}$ 进行必要化简¹，如：远场近似等。
 3. 计算并化简一些关键的复合量，如： $[\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \beta) \times \dot{\beta}]]$ 、 $[\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \beta]]$
- ⇒ 实用近似：

$$\frac{|\beta c t'|}{r_P} \leq \frac{L_u}{2r_P} \ll 1, \quad \frac{K_u}{r_P \beta \gamma k_u} = \frac{L_u K_u}{2\pi r_P \beta \gamma N_u} \ll 1 \quad (5.18)$$

4. 将以上运动学物理量代入 Lienard-Wiechert 场的时域或频域²表示式

$$\mathbf{E}(t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left\{ \frac{[\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \beta) \times \dot{\beta}]]}{r(1 - \mathbf{n} \cdot \beta)^3} \right\}_{\text{ret}} \quad (5.19)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}(\omega) = -\frac{i\omega q}{4\pi\epsilon_0 c r} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \beta]] e^{i\omega \left(t' + \frac{r(t')}{c} \right)} dt' \quad (5.20)$$

此处略去推导细节³，给出 N_u 周期波荡器产生的辐射电磁的时域与频域表示式。在极端相对论近似下，在直角坐标系中， $E_z = B_z = 0$ ，时域横向电场有

$$\mathbf{E}_{\perp}(t_P) = \hat{E}_u \frac{[1 - \gamma^2 \theta^2 \cos(2\phi), -\gamma^2 \theta^2 \sin(2\phi)]}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^3} \cos(\omega_1 t_P), \quad 0 < t_P < N_u \lambda_1 / c \quad (5.21)$$

频域横向电场可以通过对上式做傅里叶变换得到

$$\begin{aligned} \int_{-N_u \pi / \omega_1}^{N_u \pi / \omega_1} \cos(\omega_1 t_P) e^{-i\omega t_P} dt_P &= \frac{\pi N_u}{\omega_1} \left(\frac{\sin((\omega / \omega_1 - 1) \pi N_u)}{(\omega / \omega_1 - 1) \pi N_u} + \frac{\sin((\omega / \omega_1 + 1) \pi N_u)}{(\omega / \omega_1 + 1) \pi N_u} \right) \\ &= \frac{\pi N_u}{\omega_1} \frac{\sin((\Delta\omega / \omega_1) \pi N_u)}{(\Delta\omega / \omega_1) \pi N_u} \left(1 + \frac{\Delta\omega / \omega_1}{2 + \Delta\omega / \omega_1} \right) \end{aligned} \quad (5.22)$$

其中， $\Delta\omega = \omega - \omega_1$ 。 $N_u \lambda_1 / c = 2\pi N_u / \omega_1$ ，这里我们将时间积分从 $0 < t_P < 2\pi N_u / \omega_1$ 平移为 $-\pi N_u / \omega_1 < t_P < \pi N_u / \omega_1$ ，不影响频谱样貌。

考虑 $N_u \gg 1$ 时，上式最后一个等号中括弧里的第二项可以略去，则频域横向电场有

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\perp}(\omega) = \hat{E}_u \frac{[1 - \gamma^2 \theta^2 \cos(2\phi), -\gamma^2 \theta^2 \sin(2\phi)]}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^3} \pi \frac{N_u}{\omega_1} \frac{\sin\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_1} \pi N_u\right)}{\frac{\Delta\omega}{\omega_1} \pi N_u} \quad (5.23)$$

¹留意，这里的 t_P 不是前面介绍的推迟关系 $t = t' + r(t')/c$ 中在观察位置 \mathbf{P} 的 t 时刻。这里的 $t_P = t - r_P/c$ ，为观察位置 \mathbf{P} 在 t 时刻的“平移”，平移了 r_P/c 。在 A. Hofmann 一书中称 t_P 为约化的观察时刻 (reduced observation time)，后面将发现，用 t_P 这个物理量能方便后面辐射场的计算。指数项 $i\omega t_P$ 与 $i\omega t$ 仅差一个不随时间变化的常数相位，不影响对辐射场特性的讨论。

²此处时域与频域表示式不是等价的；频域表示式已经包含上面化简的假设。

³这一节主要为 A. Hofmann 一书 Ch 6 至 Ch 8 的要点浓缩。如读者对细节感兴趣，建议参考 A. Hofmann 一书。

其中，轴上振幅 \hat{E}_u 有

$$\hat{E}_u = c\hat{B}_u = \frac{q\Omega_u K_u \gamma^3}{\pi\epsilon_0 c r_P} = \frac{qk_u K_u \gamma^3}{\pi\epsilon_0 r_P} = \frac{4r_e c B_0 \gamma^3}{r_P} \quad (5.24)$$

从时域表示式可以看到， N_u 周期波荡器辐射电场为有限时间长度的正弦/余弦函数。对应的频谱可以预期为 $\text{sinc}(x)$ 函数，在 $\theta = 0, \omega = \omega_1$ 附近， N_u 周期波荡器辐射频谱分布如图 5.9。根据 $\text{sinc}(x)$ 函数特性，未归一化 $\text{sinc}(x) \equiv \frac{\sin x}{x}$ 函数的根发生在 $k\pi, k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ ，归一化 $\text{sinc}(x) \equiv \frac{\sin \pi x}{\pi x}$ 函数的根发生在 $k, k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ 。可知， N_u 周期波荡器辐射频谱宽（半高全宽）约有 $N_u \Delta\omega/\omega_1 = 1$ ，即 $\Delta\omega/\omega_1 = 1/N_u$ 。波荡器周期数越多，则其辐射频谱越窄 \Rightarrow 即 $K_u < 1$ 的波荡器具有“聚频”效果。由此，波荡器有时又称“聚频磁铁”⁴。当 $\theta > 0$ 时，辐射频谱大致维持如图 5.9 的样貌，频率中心在 θ 角对应的共振频率 $\omega_1(\theta) \approx \frac{2k_u c \gamma^2}{1+\gamma^2 \theta^2} = \frac{\omega_1(\theta=0)}{1+\gamma^2 \theta^2}$ 附近展开约 $\Delta\omega/\omega = 1/N_u$ 宽度。

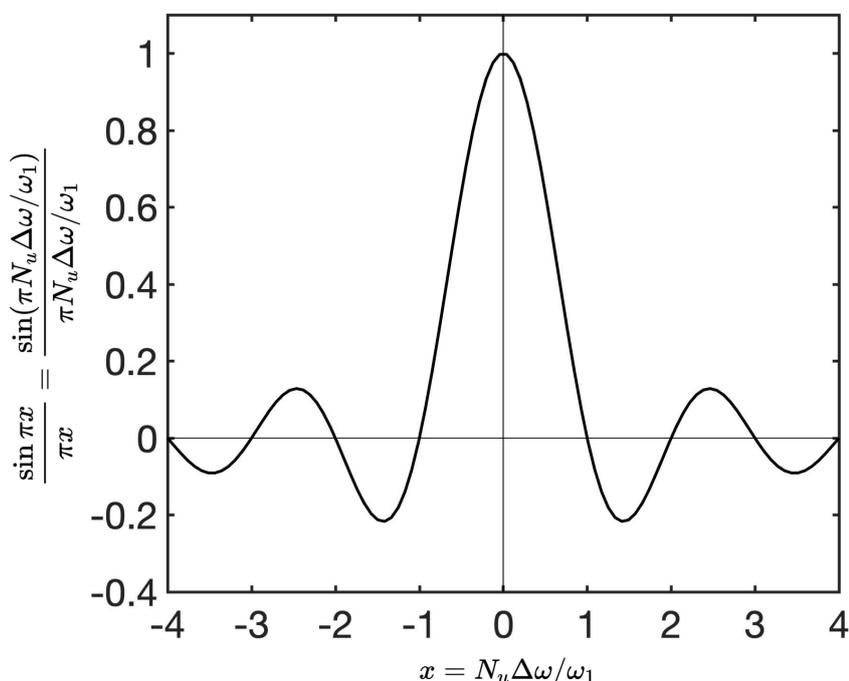


图 5.9: 在 $\theta = 0, \omega = \omega_1$ 附近， N_u 周期波荡器辐射频谱分布。

除时、频域电磁场，其它物理量也有解析解吗？有，但是这里不再介绍推导细节了。定量讨论允许给出更准确的波荡器辐射电磁场的描述，以下总结特性：

性质 5.1. $K_u < 1$ 波荡器辐射场的性质

波荡器辐射由于周期建设性干涉，形成窄谱，有以下特性：

⁴此讲义将 undulator 称波荡器，将 wiggler 称扭摆器。这两个名称有时未必能体现两者在辐射频谱上的差异。另一种关于 undulator 与 wiggler 的名称，称 undulator 为聚频磁铁，称 wiggler 为增频磁铁。相对来说，这种称法比较能体现两者在辐射频谱上的差异。

- 根据观察者位置，波荡器辐射场中心频率为 λ_1 ，由共振关系决定。

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K_u^2}{2} + \gamma^2 \theta^2 \right) \quad (5.25)$$

- 波荡器辐射谱宽 $\frac{\Delta\omega}{\omega_1} \approx \frac{1}{N_u}$ ，由波荡器周期数决定。对 n 次谐波，谱宽变窄 n 倍，有 $\frac{\Delta\omega_n}{\omega_n} \approx \frac{1}{nN_u}$ 。
- 波荡器辐射横向角散 (rms angular divergence) 约有

$$\sigma_{r',n} \approx \sqrt{\frac{\lambda_n}{4L_u}} \quad (5.26)$$

其中，下标 n 表示 n 次谐波， $\lambda_n = \lambda_1/n$ ， $L_u = N_u\lambda_u$ 为波荡器长度。

- 波荡器辐射横向尺寸 (rms size) 约有

$$\sigma_{r,n} = \frac{\epsilon_\gamma}{\sigma_{r',n}} \approx \frac{\sqrt{\lambda_n L_u}}{2\pi} \quad (5.27)$$

其中， $\epsilon_\gamma = \sigma_r \sigma_{r'} = \lambda/(4\pi)$ 称辐射场或光子的发射度 (photon emittance)。留意， E_γ 为光子能量，与 ϵ_γ 符号不要混淆。

- 单电子单次经过波荡器时的能量损失有

$$U_u [\text{eV}] = \frac{P_u L_u}{c} = \frac{e^2 \gamma^2 k_u K_u^2 N_u}{6\epsilon_0} = 0.07257 \frac{E^2 [\text{GeV}] K_u^2}{\lambda_u^2 [\text{m}]} L_u [\text{m}] \quad (5.28)$$

- 包含 N 个电子、平均电流 I_b 的束团单次经过波荡器时的非相干辐射功率有

$$P_u [\text{W}] = \frac{e^2 c \gamma^2 k_u^2 K_u^2}{12\pi\epsilon_0} = \frac{|e| \gamma^2 I_b k_u K_u^2 N_u}{6\epsilon_0} = 0.07257 \frac{E^2 [\text{GeV}] K_u^2 N_u I_b [\text{A}]}{\lambda_u [\text{m}]} \quad (5.29)$$

其中， $P_u = I_b U_u / |e|$ 。

□

5.4 一些辐射物理量的分布函数

同样略去推导细节，这里给出一些波荡器辐射复合物理量的分布函数⁵。

5.4.1 $K_u \leq 1$ 波荡器辐射功率 频谱 角 分布

此为波荡器辐射功率“双谱 (double spectrum)”分布。得到双谱分布后，其它物理量可以在此基础上得到。

$$\frac{d^2 P_u}{d\Omega d\omega} = P_u \gamma^2 [F_{u\sigma}(\theta, \phi) + F_{u\pi}(\theta, \phi)] f_N(\Delta\omega) \quad (5.30)$$

其中，

$$\begin{aligned} F_{u\sigma}(\theta, \phi) &= \frac{3}{\pi} \frac{(1 - \gamma^2 \theta^2 \cos(2\phi))^2}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^5} \\ F_{u\pi}(\theta, \phi) &= \frac{3}{\pi} \frac{(\gamma^2 \theta^2 \sin(2\phi))^2}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^5} \\ F_u(\theta, \phi) &= F_{u\sigma} + F_{u\pi} = \frac{3}{\pi} \frac{[1 - 2\gamma^2 \theta^2 \cos(2\phi) + \gamma^4 \theta^4]}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^5} \end{aligned} \quad (5.31)$$

与

$$\begin{aligned} f_N(\Delta\omega) &= \frac{N_u}{\omega_1} \left(\frac{\sin(\pi N_u \Delta\omega / \omega_1)}{\pi N_u \Delta\omega / \omega_1} \right)^2, \quad \omega_1 = \frac{2\gamma^2 \Omega_u}{1 + \gamma^2 \theta^2}, \quad \Delta\omega = \omega - \omega_1 \\ f_N(\Delta\omega) &\rightarrow \delta(\omega - \omega_1) \text{ for } N_u \rightarrow \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_N(\Delta\omega) d\omega = 1 \end{aligned} \quad (5.32)$$

其中, $\Omega_u = k_u \beta c$ 。图 5.10 与图 5.11 为 $K_u < 1$ 的波荡器辐射功率角分布因子 $F_{u\sigma}(\theta, \phi)$, $F_{u\pi}(\theta, \phi)$ 的大致样貌。建设性干涉导致频谱变窄通过 f_N 因子体现，参考图 5.11。

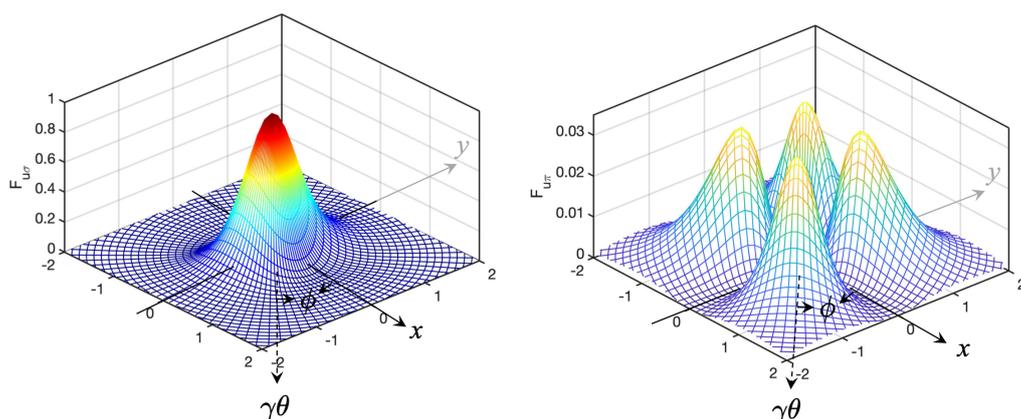


图 5.10: 左图为波荡器辐射功率频谱 $F_{u\sigma}(\theta, \phi)$ 与角的“双谱”分布，右图为波荡器辐射功率频谱 $F_{u\pi}(\theta, \phi)$ 与角的“双谱”分布。

 **练习 5.4** 试着利用 MATLAB 重复图 5.10 结果。 ■

⁵这一节主要为 A. Hofmann 一书 Ch 7 与 Ch 8 的要点浓缩。如读者对细节感兴趣，不妨参考 A. Hofmann 一书的 §7.3-7.4 ($K_u \leq 1$) 与 §8.3 ($K_u > 1$)。

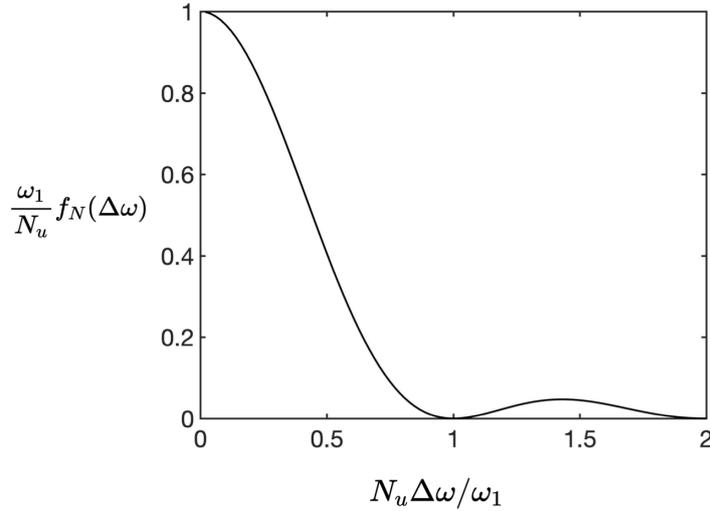


图 5.11: 波荡器辐射的建设性干涉因子 $f_N(\Delta\omega)$ 。

解 在 MATLAB 中，将 $(\gamma\theta, \phi)$ 视为极坐标，在直角坐标系 (x, y) 呈现时，需要坐标变换，可采用 `pol2cart`。留意，此双谱分布的“径向”分布与 $\gamma\theta$ 有关（既不是 γ ，也不是 θ ），“角向”分布则仅与 ϕ 有关。 ■

5.4.2 $K_u \leq 1$ 波荡器辐射功率角分布

对双谱分布的频率进行积分，就有辐射功率角分布。

$$\begin{aligned}
 \frac{dP_u}{d\Omega} &= P_u \gamma^2 [F_{u\sigma}(\theta, \phi) + F_{u\pi}(\theta, \phi)] \int_{-\infty}^{\infty} f_N(\Delta\omega) d\omega \\
 &= P_u \gamma^2 [F_{u\sigma}(\theta, \phi) + F_{u\pi}(\theta, \phi)] \\
 &= P_u \frac{3\gamma^2}{\pi} \frac{[(1 - \gamma^2\theta^2 \cos(2\phi))^2 + (\gamma^2\theta^2 \sin(2\phi))^2]}{(1 + \gamma^2\theta^2)^5} \\
 &= P_u \frac{3\gamma^2}{\pi} \frac{[1 - 2\gamma^2\theta^2 \cos(2\phi) + \gamma^4\theta^4]}{(1 + \gamma^2\theta^2)^5}.
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

参考图 5.1，利用 (θ, ϕ) 与 (ψ, ξ) 的关系，

$$\psi = \theta \sin \phi, \quad \xi = \theta \cos \phi, \quad d\Omega = \theta d\phi d\theta = d\xi d\psi \tag{5.34}$$

改写 $F_{u\sigma}(\theta, \phi), F_{u\pi}(\theta, \phi)$ 为 $F_{u\sigma}(\xi), F_{u\pi}(\psi)$ ，可以分别得到在 xz 平面与 yz 平面上的功率角分布，有

$$\begin{aligned}
 \frac{dP}{d\xi} &= P_u \frac{3\gamma}{32} \left(\frac{12 - 16\gamma^2\xi^2 + 7\gamma^4\xi^4}{(1 + \gamma^2\xi^2)^{9/2}} + \frac{5\gamma^2\xi^2}{(1 + \gamma^2\xi^2)^{7/2}} \right) \\
 \frac{dP}{d\psi} &= P_u \frac{3\gamma}{32} \left(\frac{7}{(1 + \gamma^2\psi^2)^{5/2}} + \frac{5\gamma^2\psi^2}{(1 + \gamma^2\psi^2)^{7/2}} \right)
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

下图 5.12 为 $\frac{dP}{d\xi}$ (xz 平面) 与 $\frac{dP}{d\psi}$ (yz 平面) 的角分布。还可以进一步区分横向水平面上

σ 极化与 π 极化的占比，与横向垂直平面上 σ 极化与 π 极化的占比，其 rms 角散有

$$\begin{aligned} \langle \xi_\sigma^2 \rangle &= \frac{3}{14\gamma^2}, & \langle \xi_\pi^2 \rangle &= \frac{3}{2\gamma^2}, & \langle \xi^2 \rangle &= \frac{3}{8\gamma^2} \\ \langle \psi_\sigma^2 \rangle &= \frac{1}{2\gamma^2}, & \langle \psi_\pi^2 \rangle &= \frac{3}{2\gamma^2}, & \langle \psi^2 \rangle &= \frac{5}{8\gamma^2} \end{aligned} \quad (5.36)$$

将横向水平与垂直分布的 rms 角散其加总后，有

$$\langle \xi^2 \rangle + \langle \psi^2 \rangle = \langle \theta^2 \rangle = \frac{1}{\gamma^2} \quad (5.37)$$

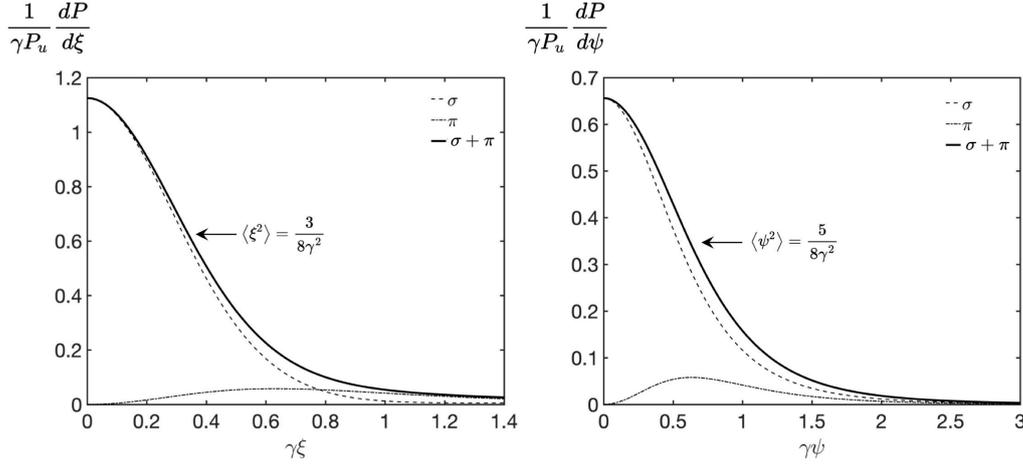


图 5.12: $K_u \leq 1$ 波荡器辐射功率角分布。

以上分析是对所有频率积分后的辐射角分布。如果我们只关心在波荡器共振频率附近的辐射功率角分布，则应回到“双谱”分布，其中，在 $K_u < 1$ 情况下，观察角 θ 与离轴共振频率的关系有

$$\omega_1 = \frac{\omega_{10}}{1 + \gamma^2 \theta^2} \quad (5.38)$$

其中， $\omega_{10} = \omega_1(\theta = 0)$ 为沿波荡器轴上的共振频率。留意，此项修正也要体现在 f_N 因子内，有 $f_N(\Delta\omega) \rightarrow f_N(\omega, \theta; \omega_{10})$

$$\begin{aligned} f_N(\Delta\omega) &= \frac{N_u}{\omega_1} \left(\frac{\sin(\pi N_u \Delta\omega / \omega_1)}{\pi N_u \Delta\omega / \omega_1} \right)^2, & \Delta\omega &= \omega - \omega_1 \neq \omega - \omega_{10} \\ \rightarrow f_N(\omega, \theta; \omega_{10}) &= \frac{(1 + \gamma^2 \theta^2) N_u}{\omega_{10}} \left[\frac{\sin\left(\frac{(\omega(1 + \gamma^2 \theta^2) - \omega_{10})\pi N_u}{\omega_{10}}\right)}{\frac{(\omega(1 + \gamma^2 \theta^2) - \omega_{10})\pi N_u}{\omega_{10}}} \right]^2 \end{aligned} \quad (5.39)$$

此函数意味着：对轴上共振频率 $\omega = \omega_{10}$ 而言，辐射功率存在一个角度分布。同时，对离轴辐射场的偏移了的共振频率 $\omega = \omega_1(\theta)$ 而言，其辐射功率也存在一个角度分布。在球坐标系下，函数 $f_N(\omega, \theta; \omega_{10})$ 像是个在 θ_0 展开的圆锥， θ_0 与其展开角度 $\Delta\theta_0$ 约有

$$\theta_0 = \sqrt{\frac{\omega_{10} - \omega}{\omega}} \frac{1}{\gamma}, \quad \Delta\theta_0 \approx \frac{1}{\gamma^2 \theta N_u} \frac{\omega_{10}}{\omega} \quad (5.40)$$

对用户来说，更感兴趣的可能是 $\omega = \omega_{10}$ 情况，此时

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_{\perp}(\omega) &= \hat{E}_u \frac{[1 - \gamma^2 \theta^2 \cos(2\phi), -\gamma^2 \theta^2 \sin(2\phi)]}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^3} \frac{\pi N_u}{\omega_1} \frac{\sin\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_1} \pi N_u\right)}{\frac{\Delta\omega}{\omega_1} \pi N_u} \\ &= \hat{E}_u \frac{[1 - \gamma^2 \theta^2 \cos(2\phi), -\gamma^2 \theta^2 \sin(2\phi)]}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^3} \frac{\pi N_u}{\omega_1} \frac{\sin(\gamma^2 \theta^2 \pi N_u)}{\gamma^2 \theta^2 \pi N_u} \end{aligned} \quad (5.41)$$

由于 $\gamma\theta \ll 1$ ，几乎主导的为横向 x 分量，有

$$|\tilde{\mathbf{E}}(\omega)| = \tilde{E}_x(\omega) = \hat{E}_u \frac{\pi N_u \sin(\gamma^2 \theta^2 \pi N_u)}{\omega_{10} \gamma^2 \theta^2 \pi N_u} \quad (5.42)$$

对应的辐射功率频谱角分布，有

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P_u}{d\Omega d\omega} &= P_u \gamma^2 \frac{3}{\pi} \frac{N_u}{\omega_{10}} \left(\frac{\sin(\gamma^2 \theta^2 \pi N_u)}{\gamma^2 \theta^2 \pi N_u} \right)^2 \\ &\approx P_u \gamma^2 \frac{3}{\pi} \frac{N_u}{\omega_{10}} e^{-(\gamma^2 \theta^2 \pi N_u)^2 / 3} \end{aligned} \quad (5.43)$$

其中，用到了以下近似关系⁶

$$\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \approx e^{-x^2/3} \quad (5.44)$$

图 5.13 为仅考虑 $\omega = \omega_{10}$ 时的波荡器辐射功率角分布。根据近似表示式，在 $K_u \leq 1$ 波荡器辐射功率在共振频率 $\omega = \omega_{10}$ 时的角分布，其 rms 角散有

$$\theta_{\text{RMS}} = \frac{\sqrt[4]{3\pi}}{\pi} \frac{1}{\gamma\sqrt{N_u}} = \frac{0.5577}{\gamma\sqrt{N_u}} \quad (5.45)$$

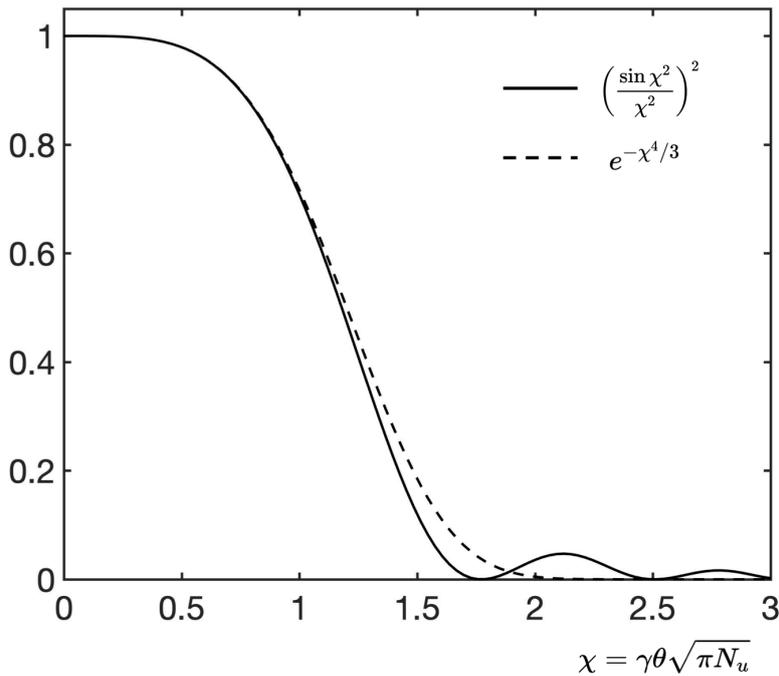


图 5.13: $K_u \leq 1$ 波荡器辐射功率在共振频率 $\omega = \omega_{10}$ 时的角分布。

⁶为什么用这个近似关系？如果按原本的 sinc 函数计算角散，则会发现 $\langle \theta^2 \rangle \rightarrow \infty$ 。目前我们只关心沿波荡器中心轴附近的辐射功率频谱角分布的角散，所以采用此近似。

5.4.3 $K_u \leq 1$ 波荡器辐射功率 频谱 分布

对双谱分布的立体角 $d\Omega$ 进行积分, 就有辐射功率频谱分布。注意, θ 与频率不完全独立, 有 $d\omega_1 = -\frac{2\omega_{10}\gamma^2}{(1+\gamma^2\theta^2)^2}\theta d\theta = -2\omega_{10}\gamma^2\left(\frac{\omega_1}{\omega_{10}}\right)^2\theta d\theta$, 则波荡器辐射功率频谱分布有

$$\begin{aligned}\frac{dP}{d\omega} &= \int_0^{\omega_{10}} \frac{d^2P}{d\omega_1 d\omega} d\omega_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dP}{d\omega_1} f_N(\Delta\omega) d\omega_1 \\ &= \frac{3P_u}{\omega_{10}} \int_0^{\omega_{10}} \frac{\omega_1}{\omega_{10}} \left(1 - 2\frac{\omega_1}{\omega_{10}} + 2\left(\frac{\omega_1}{\omega_{10}}\right)^2\right) f_N(\Delta\omega) d\omega_1\end{aligned}\quad (5.46)$$

当波荡器周期数非常大时, 即 $N_u \rightarrow \infty$ 近似, 则 $f_N(\Delta\omega) \rightarrow \delta(\omega - \omega_1)$, 此时有解析表示式

$$\begin{aligned}\frac{dP_{u\sigma}}{d\omega} &= \frac{3P_u}{\omega_{10}} \frac{\omega}{\omega_{10}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\omega}{\omega_{10}} + \frac{3}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_{10}}\right)^2\right), \quad \omega \leq \omega_{10} \\ \frac{dP_{u\pi}}{d\omega} &= \frac{3P_u}{\omega_{10}} \frac{\omega}{\omega_{10}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\omega}{\omega_{10}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_{10}}\right)^2\right), \quad \omega \leq \omega_{10} \\ \frac{dP_u}{d\omega} &= \frac{3P_u}{\omega_{10}} \frac{\omega}{\omega_{10}} \left(1 - 2\frac{\omega}{\omega_{10}} + 2\left(\frac{\omega}{\omega_{10}}\right)^2\right), \quad \omega \leq \omega_{10}\end{aligned}\quad (5.47)$$

其辐射功率频谱分布样貌如图 5.14。留意, 当 $\omega > \omega_{10}$ 时, 辐射功率频谱为零, 这是由于 $N_u \rightarrow \infty$ 假设导致。前面介绍过, $\omega < \omega_{10}$ 是由于共振条件中 $\gamma^2\theta^2$ 导致的“红移”。

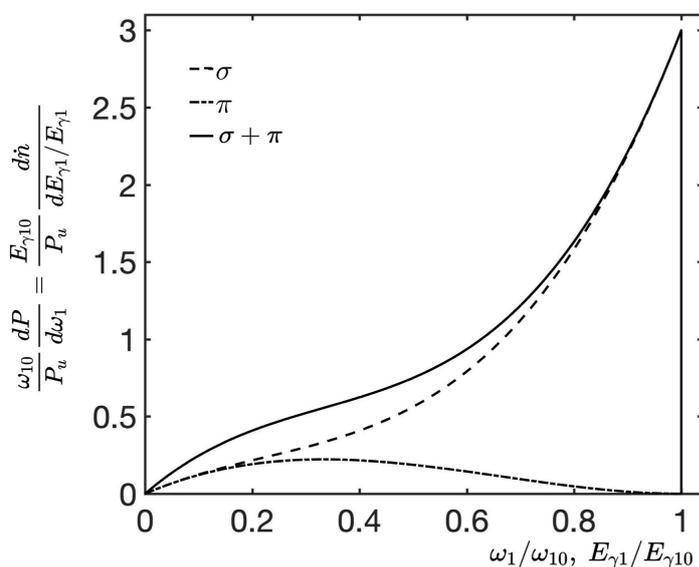


图 5.14: $K_u \leq 1$ 波荡器辐射功率频谱分布。

注 这里介绍波荡器辐射功率频谱。回忆一下 §4.4.2 介绍的同步辐射功率频谱分布样貌, 比较两者区别。

5.4.4 $K_u \leq 1$ 波荡器辐射功率 光量子 分布

思路类似于同步辐射光量子分布的讨论, 此处分析用到了光子的半经典 (semi-classical) 理论, 即, 对单个光子, 有 $E_\gamma = \hbar\omega$ 。假设光子数为 n , 单位时间光子数为 \dot{n} , 由波荡器辐射功率频谱分布, 在基频共振频率附近有单位时间、单位频带内的光子数

$$\frac{d\dot{n}}{d\omega_1/\omega_1} = \frac{1}{\hbar} \frac{dP}{d\omega_1} = \frac{d\dot{n}}{dE_{\gamma 1}/E_{\gamma 1}} \quad (5.48)$$

$$= \frac{3P_u}{E_{\gamma 10}} \frac{E_{\gamma 1}}{E_{\gamma 10}} \left(1 - 2 \frac{E_{\gamma 1}}{E_{\gamma 10}} + 2 \left(\frac{E_{\gamma 1}}{E_{\gamma 10}} \right)^2 \right), \quad E_{\gamma 1} \leq E_{\gamma 10} \quad (5.49)$$

其中, $E_{\gamma 1} = \hbar\omega_1$, $E_{\gamma 10} = \hbar\omega_{10}$ 。

图 5.15 (左) 给出 $K_u \leq 1$ 波荡器辐射功率光量子分布。可以看到, 在共振频率/共振能量附近的波荡器辐射光子数较多。留意, 上式仅适用于当 $N_u \gg 1$ 时。当 N_u 不是太大时, 需要回到对 $f_N(\Delta\omega)$ 的积分式, 有

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{n}}{d\omega_1/\omega_1} &= \frac{1}{\hbar} \frac{dP}{d\omega} = \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dP}{d\omega_1} f_N(\Delta\omega) d\omega_1 \\ &= \frac{3P_u}{E_{\gamma 10}} \int_0^{\omega_{10}} \frac{\omega_1}{\omega_{10}} \left(1 - 2 \frac{\omega_1}{\omega_{10}} + 2 \left(\frac{\omega_1}{\omega_{10}} \right)^2 \right) f_N(\Delta\omega) d\omega_1 \end{aligned} \quad (5.50)$$

图 5.15 (右) 则给出 $K_u \leq 1$ 波荡器辐射功率的另一种光量子分布方式, 为在共振频率率区间内, 波荡器辐射光量子的相对占比

$$\frac{d\dot{n}/\dot{n}_u}{d\omega_1} = \frac{1}{\omega_1} \frac{d\dot{n}/\dot{n}_u}{d\omega_1/\omega_1} = \frac{3}{2\omega_{10}} \left(1 - 2 \frac{\omega_1}{\omega_{10}} + 2 \left(\frac{\omega_1}{\omega_{10}} \right)^2 \right) \quad (5.51)$$

其中, \dot{n}_u 为 $K_u \leq 1$ 波荡器单位时间辐射光子数, 假设 $N_u \gg 1$, 有⁷

$$\dot{n}_u = \frac{3P_u}{E_{\gamma 10}} \int_0^1 (1 - 2x + 2x^2) dx = 2 \frac{P_u}{E_{\gamma 10}}, \quad x = \frac{\omega_1}{\omega_{10}} \quad (5.52)$$

图 5.15 右侧与左侧图比较, 看起来似乎非常不一样。这是因为上式比起 Eq. (5.48), 多除了一项 E_γ 。在相对较低的光子能量区间, 因为除 E_γ 项, 相对占比看起来就大了⁸。

练习 5.5 试画出图 5.15 中有限长波荡器 $N_u = 16$ 的结果。 ■

解 留意, 这里的横轴是 $E_\gamma/E_{\gamma 10}$, 而不是 $E_{\gamma 1}/E_{\gamma 10}$ 。当 N_u 不再 $\gg 1$ 时, $E_\gamma \neq E_{\gamma 1}$ 。

$$f_N(\Delta\omega) = \frac{N_u}{\omega_1} \left(\frac{\sin(\pi N_u \Delta\omega/\omega_1)}{\pi N_u \Delta\omega/\omega_1} \right)^2, \quad \Delta\omega = \omega - \omega_1$$

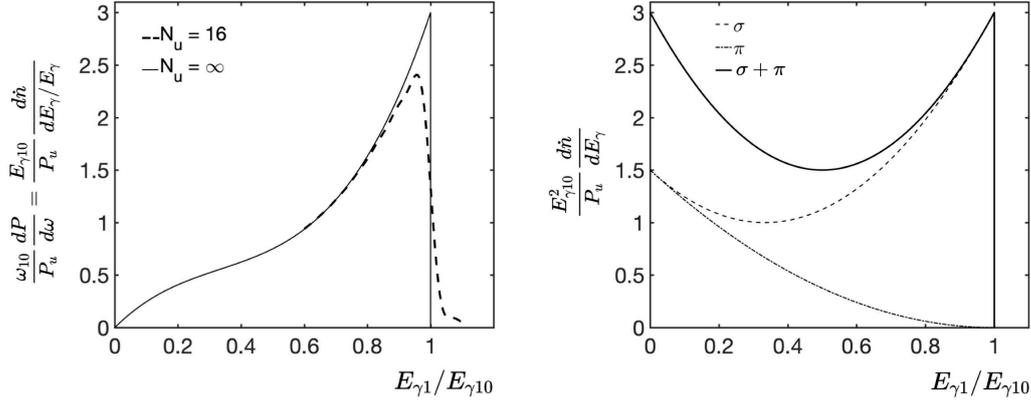
令 $x = \omega_1/\omega_{10}$, 上式 Eq. (5.50) 可以改写为

$$\frac{E_{\gamma 10}}{P_u} \frac{d\dot{n}}{dE_\gamma/E_\gamma} = 3N_u \int_0^1 (1 - 2x + 2x^2) \left(\frac{\sin \pi N_u \left(\frac{1}{x} \left(\frac{\omega}{\omega_{10}} \right) - 1 \right)}{\pi N_u \left(\frac{1}{x} \left(\frac{\omega}{\omega_{10}} \right) - 1 \right)} \right)^2 dx$$

⁷这里用到

$$\frac{d\dot{n}}{d\omega_1/\omega_1} = \frac{\omega_1}{\omega_{10}} \frac{d\dot{n}}{d\omega_1/\omega_{10}}$$

⁸留意, 在 Hofmann 一书中, 其 Fig. 7.12 的纵轴 $\frac{E_{\gamma 10}}{P_u} \frac{d\dot{n}}{dE_\gamma}$ 应为笔误, 应为 $\frac{E_{\gamma 10}^2}{P_u} \frac{d\dot{n}}{dE_\gamma}$ 。

图 5.15: $K_u \leq 1$ 波荡器辐射功率光子分布。

其它相关的光量子频谱物理量与功率频谱角分布的关系有

$$\begin{aligned}
 \frac{d\dot{n}}{d\Omega} &= \frac{1}{E_{\gamma}} \frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{\hbar\omega} \frac{dP}{d\Omega} \\
 \frac{d\dot{n}}{d\omega_1} &= \frac{1}{E_{\gamma 1}} \frac{dP}{d\omega_1} = \frac{1}{\hbar\omega_1} \frac{dP}{d\omega_1} \\
 \frac{d\dot{n}}{d\omega_1/\omega_1} &= \frac{1}{\hbar} \frac{dP}{d\omega_1} \\
 \frac{d^2\dot{n}}{d\Omega d\omega/\omega} &= \frac{1}{\hbar} \frac{d^2P}{d\Omega d\omega}
 \end{aligned} \tag{5.53}$$

注 以上分析假设光子在自由空间传播，没有与其它物质作用，因此光子数守恒。

有了 \dot{n}_u 后，单个电子经历 N_u 个波荡器周期，由于波荡器辐射而发出的光子数就可以计算。此外，一平均电流为 I_b 的电子束经历 N_u 个波荡器周期，由于波荡器辐射而发出的非相干光子数同样可以计算。相关结果一并整理如下：

$$\begin{aligned}
 \dot{n}_u &= \frac{2P_u}{E_{\gamma 10}} = \frac{P_u}{\hbar c k_u \gamma^2} = \frac{r_e m_e c^2 k_u K_u^2}{3\hbar} = \frac{\alpha_f c k_u K_u^2}{3} \\
 n_u &= \frac{\dot{n}_u L_u}{c} = \frac{2U_u}{E_{\gamma 10}} = \frac{2\pi r_e m_e c^2 K_u^2 N_u}{3\hbar c} = \frac{2\pi\alpha_f K_u^2 N_u}{3} \\
 \dot{n}_{uI} &= \frac{n_u I_b}{|e|} = \frac{2U_u I_b}{|e| E_{\gamma 10}} = \frac{2\pi r_e m_e c^2 I_b K_u^2 N_u}{3|e|\hbar c} = \frac{2\pi\alpha_f I_b K_u^2 N_u}{3|e|}
 \end{aligned} \tag{5.54}$$

可以看到，单个电子每次经历一个波荡器周期时，发出的(平均)光子数约有

$$\frac{n_u}{N_u} = \frac{2\pi\alpha_f K_u^2}{3} \tag{5.55}$$

与电子能量洛伦兹因子 γ 无关。比较 §4.4 介绍的单电子每圈绕行圆周运动发出的(平均)光子数有

$$n_s = \dot{n}_s \times T_0 = \dot{n}_s \times \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{5\pi\sqrt{3}}{3} \alpha_f \gamma = 0.0662\gamma \approx \frac{\gamma}{15} \tag{5.56}$$

5.4.5 $K_u \geq 1$ 波荡器辐射分析的两个区别

1. 对 $K_u \geq 1$ 波荡器，电子扭摆幅度与张角较大，因此辐射频谱包含谐波成分。为方便分析，定义如下的比例变量

$$\beta^* = \beta \left(1 - \frac{K_u^2}{4\beta^2\gamma^2} \right), \quad \gamma^* = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^{*2}}} \approx \frac{\gamma}{\sqrt{1 + K_u^2/2}} \quad (5.57)$$

$$K_u^* = \frac{K_u}{\sqrt{1 + K_u^2/2}} \approx \psi_0 \gamma^*, \quad K_u = \frac{K_u^*}{\sqrt{1 - K_u^{*2}/2}} \quad (5.58)$$

这么定义的好处是 $0 \leq K_u^* \leq \sqrt{2}$ ，利用定标变量分析，在 $K_u^* < 1$ 时，泰勒展开在很大范围内仍适用。

2. $K_u \geq 1$ 波荡器存在谐波成分，时域总辐射电场写成

$$\mathbf{E}(t_p) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_m e^{-im\omega_1 t_p} \quad \text{其中} \quad \mathbf{E}_m = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_p} \mathbf{E}(t_p) e^{im\omega_1 t_p} dt_p \quad (5.59)$$

其中，

$$\mathbf{E}_m = -\frac{iqm\omega_1^2}{8\pi^2\epsilon_0 cr_p} \int_0^{T_0} [\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}]] \times e^{im\omega_1(t' + (r(t') - r_p)/c)} dt' \quad (5.60)$$

5.4.6 $K_u \geq 1$ 波荡器辐射功率 频谱 角 分布

对于 $K_u \geq 1$ 情况，由于包含谐波成分，分析更为复杂，此处不论。以辐射功率频谱角分布为例，其一般形式可写为谐波成分加总

$$\frac{d^2 P}{d\Omega d\omega} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d^2 P_m}{d\Omega d\omega}, \quad \text{其中} \quad \frac{d^2 P_m}{d\Omega d\omega} = \frac{2r_p^2 |\tilde{\mathbf{E}}_m(\omega)|^2}{2\pi\mu_0 L_u} \quad (5.61)$$

其中，各别谐波可将 §5.4.1 结果推广，有

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P_m}{d\Omega d\omega} &= P_u \gamma^{*2} [F_{m\sigma}(\theta, \phi) + F_{m\pi}(\theta, \phi)] f_N(\Delta\omega_m) \\ &= \frac{dP_m}{d\Omega} f_N(\Delta\omega_m) \end{aligned} \quad (5.62)$$

略去推导细节，其中，

$$\begin{aligned} F_{m\sigma}(\theta, \phi) &= \frac{3m^2}{\pi (1 + K_u^2/2)^2 K_u^{*2}} \frac{(2\Sigma_{m1}\gamma^*\theta \cos\phi - \Sigma_{m2}K_u^*)^2}{(1 + \gamma^{*2}\theta^2)^3} \\ F_{m\pi}(\theta, \phi) &= \frac{3m^2}{\pi (1 + K_u^2/2)^2 K_u^{*2}} \frac{(2\Sigma_{m1}\gamma^*\theta \sin\phi)^2}{(1 + \gamma^{*2}\theta^2)^3} \end{aligned} \quad (5.63)$$

其函数图像参考图 5.16, 上式中的其它项有

$$\begin{aligned}\Sigma_{m1} &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_{\ell}(ma_u) \mathcal{J}_{m+2\ell}(mb_u) \\ \Sigma_{m2} &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_{\ell}(ma_u) [\mathcal{J}_{m+2\ell+1}(mb_u) + \mathcal{J}_{m+2\ell-1}(mb_u)] \\ a_u &= \frac{K_u^{*2}}{4(1+\gamma^{*2}\theta^2)}, \quad b_u = \frac{2K_u^*\gamma^*\theta \cos\phi}{1+\gamma^{*2}\theta^2} \\ f_N(\Delta\omega_m) &= \frac{N_u}{\omega_1} \left(\frac{\sin\left(\frac{\Delta\omega_m}{\omega_1} \pi N_u\right)}{\frac{\Delta\omega_m}{\omega_1} \pi N_u} \right)^2, \quad \omega_m = m\omega_1 = m \frac{2\gamma^{*2}\Omega_u}{1+\gamma^{*2}\theta^2} \\ \frac{\Delta\omega_m}{\omega_1} &= \frac{\omega - m\omega_1}{\omega_1}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_N(\Delta\omega_m) d\omega = 1\end{aligned}\tag{5.64}$$

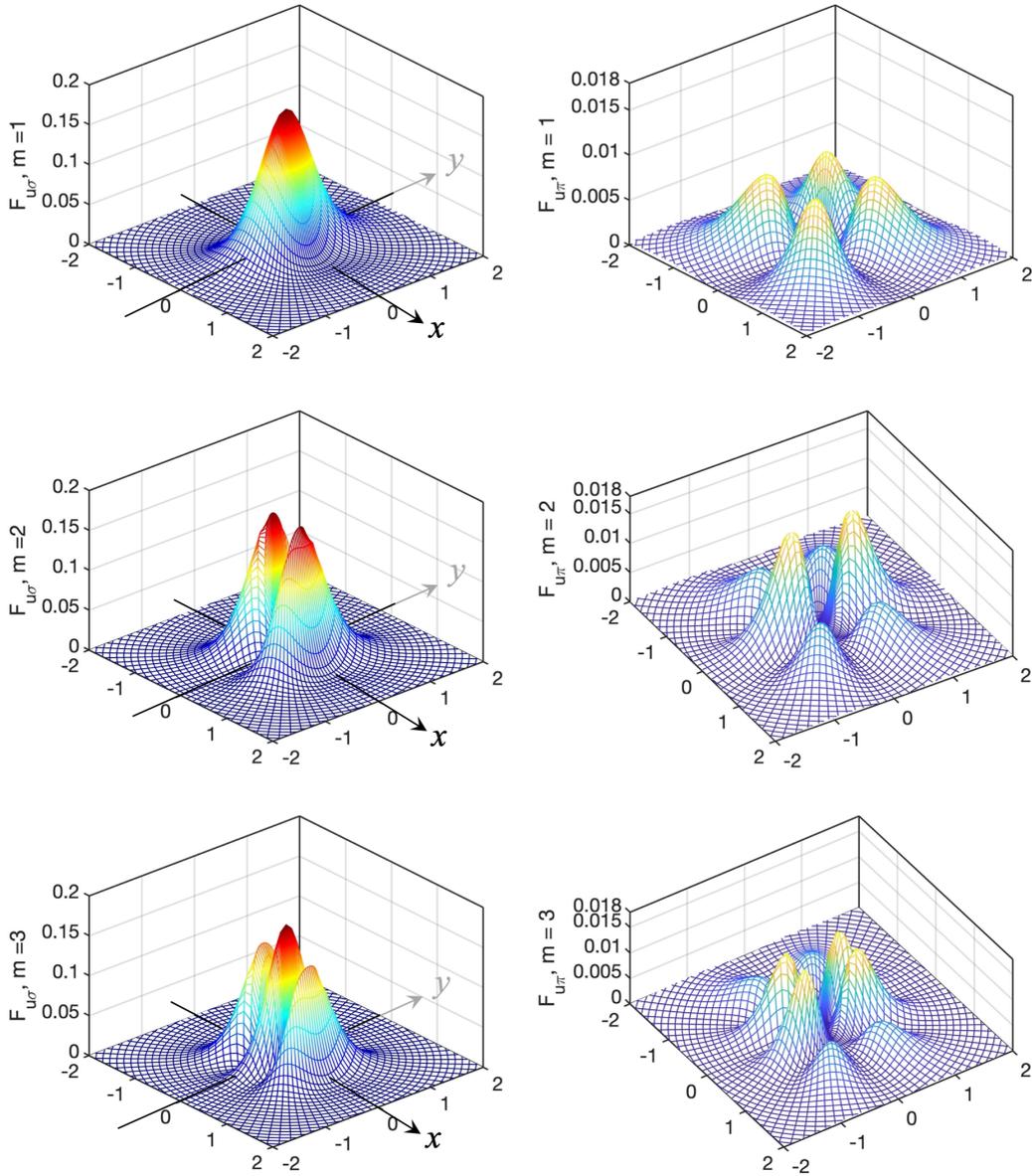


图 5.16: $K_u \geq 1$ 波荡器辐射功率频谱角分布。此图 $K_u^* = 1$ 或 $K_u = \sqrt{2}$ 。

类似地，也有对应的频谱分布、光子分布等。感兴趣的读者可参考 Hofmann §8.3，细节此处不论。图 5.17 给出上一章介绍的弯转磁铁同步辐射与这一章介绍的波荡器 ($K \leq 1$)、扭摆器 ($K > 1$) 辐射功率频谱样貌的示意图。更多讨论可参考第 10 章。

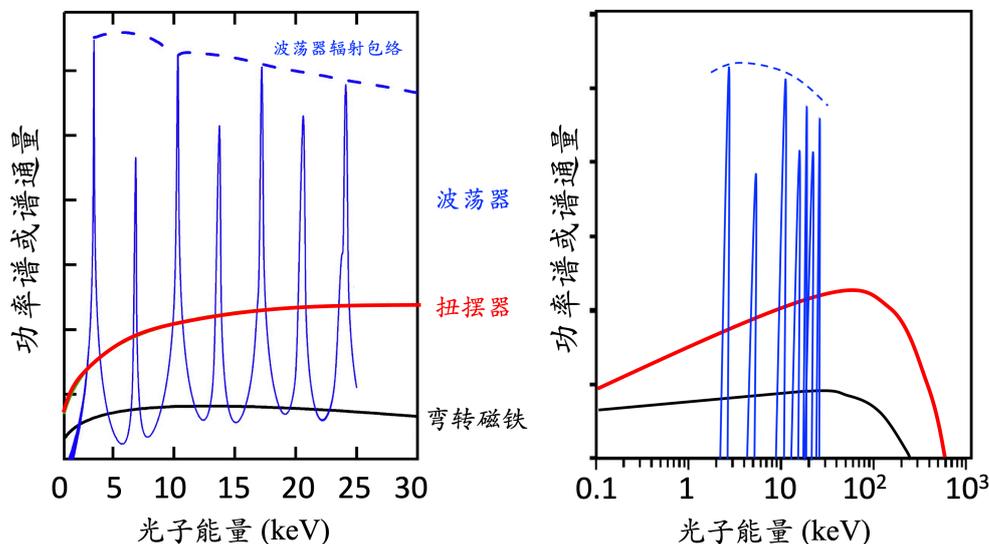


图 5.17: 弯转磁铁、扭摆器、波荡器辐射功率频谱样貌示意图。左图为线性图 (linear plot)，右图为双对数图 (log-log plot)。此讲义将 undulator 称波荡器，将 wiggler 称扭摆器。有时候 undulator 又称聚频磁铁，wiggler 又称增频磁铁。通过此图体现两者在辐射频谱上的差异。

5.4.7 $K_u \geq 1$ 波荡器辐射功率角分布、形成长度

略去分析细节，这里仅给出定性结果。图 5.18 给出 $K_u \leq 1$ 波荡器与 $K_u \gg 1$ (> 20) 扭摆器辐射功率角分布的大致样貌。可以看到，两者区别在于：波荡器由于电子小角度扭摆运动，产生的辐射场相干叠加且张角较小，而扭摆器中的电子扭摆角度较大，辐射张角也相对较大。

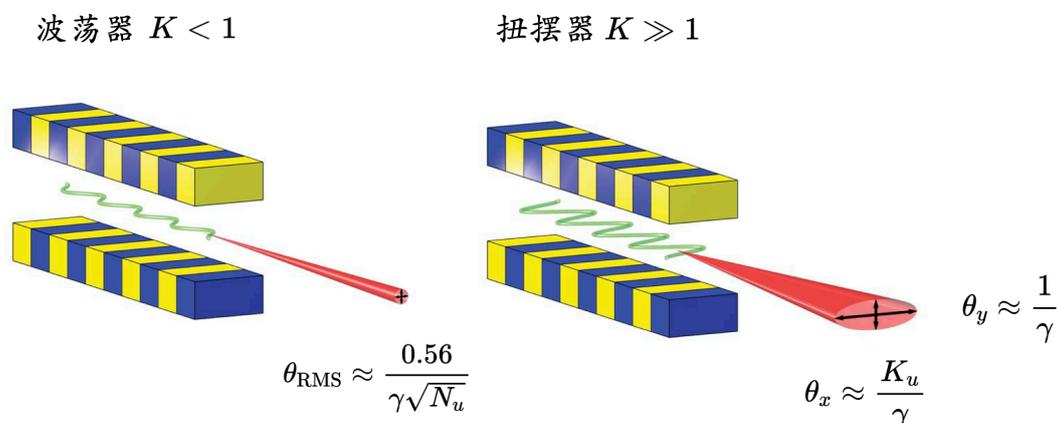


图 5.18: $K_u \leq 1$ 波荡器与 $K_u \gg 1$ 扭摆器辐射功率角分布。图例修改自 Jens Als-Nielsen and Des McMorrow, Elements of Modern X-ray Physics, 2nd Ed., John Wiley & Sons (2011)。

这一节将以图 5.19 作为结尾，此为实测的波荡器辐射影像，为基于 240 MeV 的 ACO 二代储存环插入节波荡器得到。比较图 (a,b) 可以看到，中心处的颜色不一样，表征两者中心共振波长不同，即对应不同 K 值：(a) 的中心波长接近绿光，(b) 的中心波长为蓝光。中心部分对应 σ 极化模式。远离中心轴后，由于 $\gamma^2\theta^2$ ，辐射波长产生“红移”，仍为 σ 极化模式主导。更远离中心轴后，四周出现四个花瓣，强度减弱，对应 π 极化模式。这些观察与理论计算结果的对应可参考图 5.10。

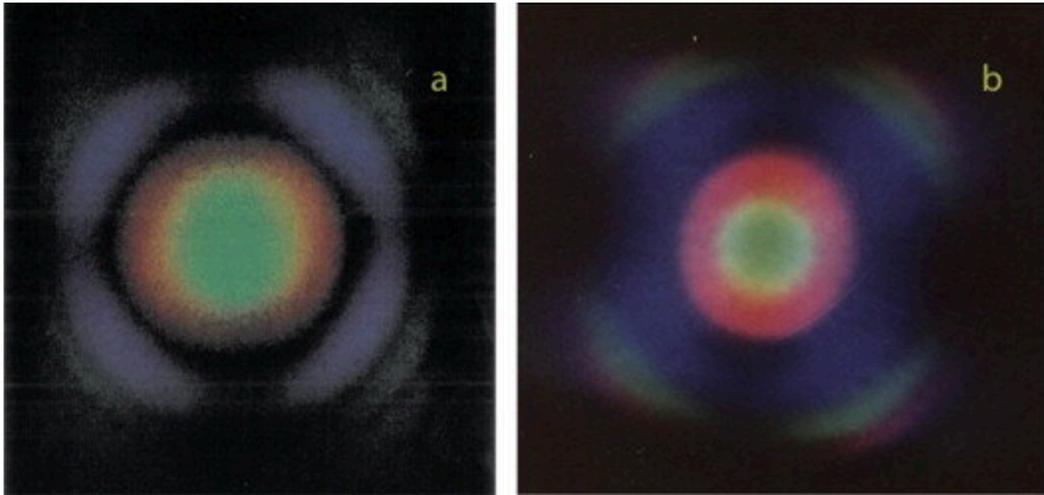


图 5.19: 基于 ACO 储存环插入节测到的波荡器辐射影像。左右两张图对应两个不同波荡器开口高度，即对应不同 K 值，因此共振波长不同。图例取自 M.E. Couprie, New generation of light sources: Present and future, *Journal of Electron Spectroscopy and Related Phenomena* **196**, 3-13 (2014). <https://doi.org/10.1016/j.elspec.2013.12.007>。

 **笔记** 这里注记一下，还有一种特殊波荡器，称激光波荡器。其等效波荡器参数与波荡器周期可与激光束参数关联，在 §1.19.3 给出。

类似于同步辐射场，波荡器辐射也有横向与纵向形成长度 (formulation length)。但是，波荡器辐射形成长度的概念相对简单地多。

定理 5.3. 波荡器辐射脉冲形成长度

分纵向与横向。电子进入波荡器时，需要走一段 L_u 的距离，才能形成一个完整的辐射脉冲。这个距离称为纵向辐射脉冲形成长度，有

$$\ell_f \approx L_u = N_u \lambda_u \quad (5.65)$$

其中，辐射脉冲长度有 $N_u \lambda_r$ 。辐射波长 λ_r 与波荡器周期长度 λ_u 满足共振关系。波荡器辐射的横向形成长度即光束的横向尺寸，对应电子束的横向尺寸，有

$$\ell_{\perp} \sim \sigma_{x,y} \quad (5.66)$$

适用于当电子束发射度比辐射光束的发射度大时。留意，辐射光束的最小发射度有 $\lambda_r/4\pi$ ，与辐射波长有关。当电子束的束团发射度小于辐射光束的最小发射度

时, 电子束的尺寸、角散等不再影响辐射光子束, 此时称辐射场已经达到衍射极限 (diffraction limit), 有 $l_{\perp} \sim k_{\perp}^{-1}$ 。 □

上一章末尾介绍 n 个同步辐射光子的能量概率分布满足中心极限定理 (central limit theorem, CLT)。由于波荡器辐射的本质与同步辐射无异, 波荡器辐射光子的能量概率分布同样满足中心极限定理。结论相同, 同样满足爱因斯坦关系, 总结如下:

定理 5.4. 中心极限定理

令在能量 u 时发出单个光子的概率密度为 $P(u)$, 假设不同时刻放出光子事件彼此为独立, 且高频成分发出光子 (或高能量光子) 的概率密度随之快速衰减, 则当发出的光子数 n 足够多时, $n \gg 1$, 这些 n 个光子的能量概率分布将满足高斯分布 (Gaussian distribution) 或正态分布 (normal distribution), 称中心极限定理 (central limit theorem, CLT)。

数学上, n 个光子的能量概率分布 $\mathcal{P}_n(w)$ 可写为

$$\mathcal{P}_n(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-(w-w_n)^2/2\sigma_n^2} \quad (5.67)$$

其中, n 个光子的中心能量 w_n 与能量方差 σ_n^2 写成

$$w_n = n\langle u \rangle, \quad \sigma_n^2 = n\sigma_u^2 \quad (5.68)$$

又称爱因斯坦关系 (Einstein relation), 波荡器辐射单个光子的平均能量与能量方差分别定义为

$$\langle u \rangle = \int uP(u)du, \quad \sigma_u^2 = \int (u - \langle u \rangle)^2 P(u)du \quad (5.69)$$

注 此关系 $w_n \propto n$ 与 $\sigma_n \propto \sqrt{n}$ 表征物理上的扩散 (diffusion) 效应。§8.5 将介绍, 此波荡器辐射的扩散效应将与其它阻尼效应相抗衡, 从而得到稳态解。 □

5.5 整理：波荡器辐射实用公式

此处假设平面型静磁场结构波荡器。对激光波荡器，需要修正共振条件与相关项。

- 波荡器参数 K

$$K = \frac{|e|B_0}{m_e c k_u} = 0.934 \lambda_u [\text{cm}] B_0 [\text{T}] \quad (5.70)$$

其中， B_0 为峰值磁感应强度。

- 波荡器辐射共振波长 λ_1

$$\lambda_1 [\text{\AA}] = \frac{13.056 \lambda_u [\text{cm}]}{E^2 [\text{GeV}]} \left(1 + \frac{K^2}{2} + \gamma^2 \theta^2 \right) \quad (5.71)$$

沿轴 (on-axis) 波荡器辐射共振波长为 $\theta = 0$ 代入上式。对 n 次谐波，有 $\lambda_n = \lambda_1/n$ 。

- 沿轴 (on-axis, $\theta = 0$) 波荡器辐射共振光子能量

$$E_{\gamma 10} [\text{eV}] = 9509 \times \frac{E^2 [\text{GeV}]}{\lambda_u [\text{mm}] \left(1 + \frac{K^2}{2} \right)} \quad (5.72)$$

对 n 次谐波，有 $E_{\gamma n 0} = n E_{\gamma 10}$ 。

- 离轴 (off-axis) 波荡器辐射共振光子能量

$$E_{\gamma 1}(\theta) = E_{\gamma 10} \left[1 - \left(\frac{\gamma \theta}{K} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (5.73)$$

其中， $E_{\gamma 10}$ 为沿轴波荡器辐射共振光子能量。

- 波荡器辐射谱宽 $\frac{\Delta \omega}{\omega_1} \approx \frac{1}{N_u}$ ，由波荡器周期数决定。对 n 次谐波，谱宽变窄 n 倍，有 $\frac{\Delta \omega_n}{\omega_n} \approx \frac{1}{n N_u}$ 。

- 波荡器辐射横向角散 (rms angular divergence) 约有

$$\sigma_{r',n} \approx \sqrt{\frac{\lambda_n}{4L_u}} \quad (5.74)$$

其中，下标 n 表示 n 次谐波， $\lambda_n = \lambda_1/n$ ， $L_u = N_u \lambda_u$ 为波荡器长度。

- 波荡器辐射横向尺寸 (rms size) 约有

$$\sigma_{r,n} = \frac{\epsilon_\gamma}{\sigma_{r',n}} \approx \frac{\sqrt{\lambda_n L_u}}{2\pi} \quad (5.75)$$

其中， $\epsilon_\gamma = \sigma_r \sigma_{r'} = \lambda/(4\pi)$ 称辐射场或光子的几何发射度 (photon emittance)。留意，不要与辐射光子能量 E_γ 搞混。

- 单电子单次经过波荡器时的能量损失有

$$U_u [\text{eV}] = \frac{P_u L_u}{c} = \frac{e^2 \gamma^2 k_u^2 K^2 N_u}{6\epsilon_0} = 0.07257 \frac{E^2 [\text{GeV}] K^2}{\lambda_u^2 [\text{m}]} L_u [\text{m}] \quad (5.76)$$

$$\approx 0.633 E^2 [\text{GeV}] \langle B^2 \rangle [\text{T}] L_u [\text{m}]$$

- 包含 N 个电子、平均电流 I_b 的束团单次经过波荡器时的非相干辐射功率有

$$P_u [\text{W}] = \frac{N e^2 c \gamma^2 k_u^2 K^2}{12\pi \epsilon_0} = \frac{e \gamma^2 I_b k_u K^2 N_u}{6\epsilon_0} = 0.07257 \frac{E^2 [\text{GeV}] K^2 N_u I_b [\text{A}]}{\lambda_u [\text{m}]} \quad (5.77)$$

其中， $P_u = I_b U_u / |e|$ 。

- 单个电子单位时间由于 $K \leq 1$ 波荡器辐射而发出的光子数，包含水平极化 (σ) 与

垂直极化 (π) 光子数, 根据经典电动力学图像, 单个电子产生的波荡器辐射平均能量与方均能量有

$$\begin{aligned} \dot{n}_{u\sigma} &= \frac{3}{2} \frac{P_u}{E_\gamma}, & \dot{n}_{u\pi} &= \frac{1}{2} \frac{P_u}{E_\gamma}, & \dot{n}_u &= 2 \frac{P_u}{E_\gamma} \\ \langle E_{\gamma\sigma} \rangle &= \frac{7}{12} E_\gamma, & \langle E_{\gamma\pi} \rangle &= \frac{3}{12} E_\gamma, & \langle E_\gamma \rangle &= \frac{6}{12} E_\gamma \\ \langle E_{\gamma\sigma}^2 \rangle &= \frac{26}{60} E_\gamma^2, & \langle E_{\gamma\pi}^2 \rangle &= \frac{6}{60} E_\gamma^2, & \langle E_\gamma^2 \rangle &= \frac{21}{60} E_\gamma^2 \end{aligned} \quad (5.78)$$

- 沿波荡器轴、单位截面积、单位立体角内的辐射能量谱, 以光子数表示, 又称光子通量, 在 h 次谐波共振频率有

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathcal{F}_h}{d\omega d\Omega} \right|_{\phi=0, \omega=h\omega_1} &= 1.74 \times 10^{14} N_u^2 (\gamma mc^2)^2 [\text{GeV}] I_b [\text{A}] \times \\ &\frac{h^2 K^2 [\text{JJ}]_h^2}{\left(1 + \frac{K^2}{2}\right)^2} \frac{\text{photons}}{\text{s} \cdot \text{mrad} \cdot (0.1\% \text{BW})} \end{aligned} \quad (5.79)$$

其中, $h = 1, 3, 5, \dots$, 采用 0.1% 带宽是同步辐射领域的标准惯例。

$$[\text{JJ}]_h \equiv (-1)^{(h-1)/2} \left[\mathcal{J}_{(h-1)/2} \left(\frac{hK^2}{4 + 2K^2} \right) - \mathcal{J}_{(h+1)/2} \left(\frac{hK^2}{4 + 2K^2} \right) \right] \quad (5.80)$$

与 $K, [\text{JJ}]_h$ 相关的因子参考图 5.20。

- 承上, 对立体角积分, 则中心锥形区域内, 在 h 次谐波共振频率的光子通量有

$$\frac{d\mathcal{F}_h}{d\omega/\omega} = \frac{1}{2} \times 1.43 \times 10^{14} N_u I_b [\text{A}] \frac{h [\text{JJ}]_h^2}{1 + K^2/2} \frac{\text{photons}}{\text{s} \cdot (0.1\% \text{BW})} \quad (5.81)$$

其中, 与 $K, [\text{JJ}]_h$ 相关的因子参考图 5.20。

如果考虑特征带宽内 $\Delta\omega/\omega \approx 1/N_u$ 的光子数, 则上式等式两边同乘 $1/N_u$ 后, 会发现, 光子数与 N_u 无关。

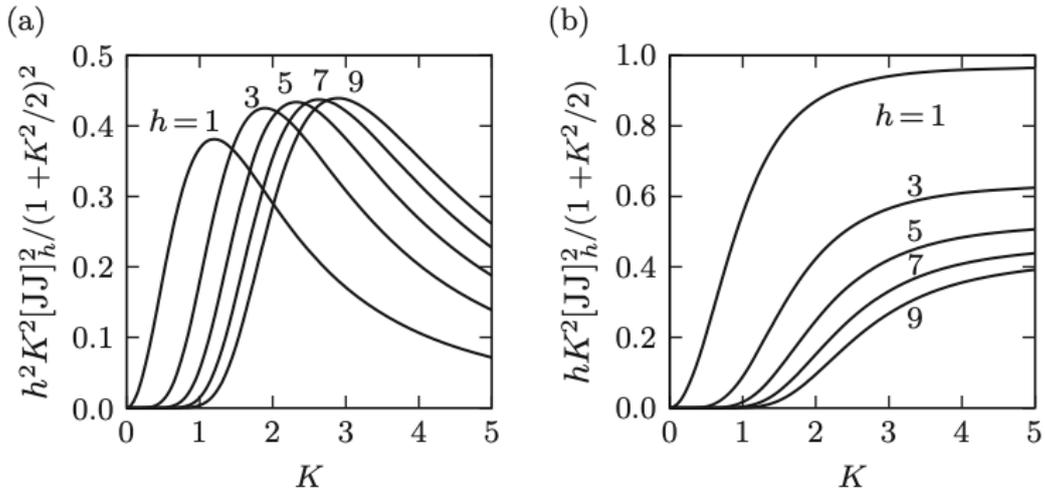


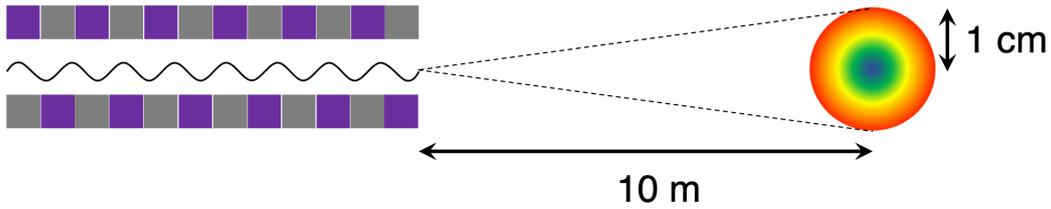
图 5.20: 波荡器辐射光子通量公式中的因子。

第五章 补充习题

1. 参考下图，假设辐射成像中心处波长为 400 nm，外围为 405 nm。忽略辐射衍射效应，估算以下几个物理量：

- a) 波荡器周期 λ_u 、波荡器总长度。
- b) 电子能量 $\gamma_0 m_e c^2$ 、波荡器参数 K 。

提示：这里波荡器仅是示意图，周期数未必是 6。作为估算，不妨取 $\theta_{\text{RMS}} \approx (\text{全张角})/2$ 。



解

$$\lambda_u \approx 0.25 \text{ cm}, \quad L_u \approx 0.2 \text{ m} (N_u \approx 80), \quad \gamma_0 \approx 62, \quad K_u \approx 0.68$$

2. 以振幅 P_0 、频率 ω 振荡的电偶极矩，置于理想导电平面上方 $a/2$ 处，且与该平面平行，求辐射电磁场坡印廷向量 \mathbf{S} 。
3. 以振幅 P_0 、频率 ω 振荡的电偶极矩，置于理想导电平面上方 $a/2$ 处，且与该平面垂直，求辐射电磁场坡印廷向量 \mathbf{S} 。

总结：第一部分

到目前为止，我们已经完成了第一部分关于相对论带电粒子产生电磁辐射的讨论。第一部分再细分两部分：在电磁部件内的时变电磁场动力学（第1章）与粒子在真空中产生的电磁辐射（第2章至第5章）。对电气专业的读者，时变电磁场应相对熟悉，在大二电磁学课堂应该已经接触过大部分内容。

相对陌生的可能是电磁辐射理论，描述带电粒子经历加速运动时产生的电磁辐射的特性，这里我们着重讨论了同步辐射与波荡器辐射。对于相对论电子产生的其它类型的辐射，可以沿用类似的分析套路。

此讲义开篇提到，大抵上说，粒子加速器用电场加速带电粒子，用磁场使粒子偏转。第2章至第5章讨论到的几种电磁辐射，包含第10章的自由电子激光（free electron laser, FEL），对高能相对论电子而言，加速过程产生的辐射电场、磁场的大小相比于外部提供的加速电场、弯转磁场等，辐射场的等效幅值都要小得多，可视为微扰量。从洛伦兹力方程看，即

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \delta\mathbf{E}) + q\mathbf{v} \times (\mathbf{B} + \delta\mathbf{B})$$

其中， $|\delta\mathbf{E}| \ll |\mathbf{E}|$, $|\delta\mathbf{B}| \ll |\mathbf{B}|$ 。如果我们关心束团中的许多粒子各自、独立的运动轨迹，则在最低阶的分析中，省略上式的微扰量是合理的。

作为以下即将介绍的第二部分，我们将先暂时把重心从“场”转移到“粒子”。先研究加速器中的粒子在一些常见电磁部件中的行为，包含横向运动与纵向运动。此时不妨先忽略 $\delta\mathbf{E}$, $\delta\mathbf{B}$ 对粒子的影响。然后，介绍将着重于电子——一种容易产生电磁辐射的基本粒子——在加速器中由于同步辐射效应导致的粒子动力学问题。此即考虑电子加速器中，辐射场 $\delta\mathbf{E}$, $\delta\mathbf{B}$ 反过来对电子的影响。分析由简至繁，先从单粒子开始，再到多粒子形成的束团（beam）。多粒子形成的束团作为一种特殊的等离子体——非中性等离子体（non-neutral plasma）——存在，当考虑这些微扰量反过来对束团动力学的影响时，在加速器中展现多姿多彩的集体效应（collective effects），将是第二部分后半段与第三部分的重头戏。

