

# 电磁辐射与加速器束流动力学导论

**Introduction to Accelerator Beams, Collective Dynamics,  
Electromagnetic Radiation and Free-electron Lasers**

作者：蔡承颖 (Cheng-Ying Tsai, C.-Y. Tsai)

## 特别声明

此笔记/讲义非最终版，内容可能存在笔误、谬误，仍在迭代修改中。此讲义不定期更新。

# 第一章 电磁场基础：复习

## 内容提要

- Maxwell 方程、本构关系
- 静场基本方程、分界面边界条件
- 无源电磁场方程、趋肤效应、推迟效应、能量守恒定律
- 波动问题：复传播常数
- 波形问题：TM, TE, TEM 波
- 色散关系、波速、折射率
- 波导、截止概念
- 谐振腔、品质因数、分路阻抗
- 高梯度金属结构击穿
- Slater 定理
- 洛伦兹变换、相对论多普勒效应
- 康普顿散射
- 镜像法
- 电磁超材料
- 平面波、高斯束模型

这一章是关于电磁场基础知识的复习，涵盖了从静电场到电磁波的各个方面。它回顾了 Maxwell 方程组、本构关系、边界条件等重要概念，并详细介绍了系统求解电磁波方程的方法，包括波动问题和波形问题。作为标准电磁理论涵盖内容，这一章探讨了电磁波的传播特性，例如色散关系、波速、偏振、波导与谐振腔等。作为与粒子加速器相关内容，这一章进一步讨论金属加速结构的梯度极限、谐振腔微扰理论、相对论坐标的洛伦兹变换、激光与电子相互作用的康普顿散射、电磁超材料等，为后续理解加速器束流动力学奠定了基础。

这一章不包含电磁辐射部分。电磁辐射将在下一章开始介绍。

## 1.0 问答预览

### 1. Maxwell 方程组如何描述电磁现象？

⇒ Maxwell 方程组描述了电场、磁场和源之间的关系，是电磁学的基本方程组。

### 2. 什么是本构关系？它在电磁场理论中有什么作用？

⇒ 本构关系描述了材料对电场、磁场的响应，比如：电位移矢量、电流密度和磁感应强度与电场、磁场的关系。引入本构关系可以简化 Maxwell 方程组在材料中的分析。

### 3. 什么是简单介质？

⇒ 简单介质是指各向同性、线性、均匀的介质。各向同性意味着极化强度和磁化强度与电场和磁场方向一致；线性意味着它们与电场和磁场强度成正比；均匀意味着它们不随空间位置改变。

### 4. 什么是极化电荷和磁化电流？

⇒ 极化电荷是电场极化介质产生的等效电荷，磁化电流是磁场磁化媒质产生的等效电流。它们分别对应电场和磁场中的源项。

5. 什么是趋肤效应? 它对电磁波在导体中的传播有什么影响?  
⇒ 趋肤效应是指电磁波在导体中传播时, 能量主要集中在导体表面附近的现象。频率越高, 趋肤深度越小, 电磁波透入导体越浅。还有反常趋肤效应, 在正文中将介绍。
6. 什么是超导体? 它有哪些特殊的电磁特性?  
⇒ 超导体具有零电阻且完全抗磁的特性。
7. 什么是位函数? 它在电磁场分析中有什么作用?  
⇒ 位函数是描述电场和磁场的辅助函数, 比如: 标量位函数  $\varphi$  和向量位函数  $\mathbf{A}$ 。有时候, 利用位函数可以简化电磁场方程的求解。
8. 什么是坡印廷向量? 它与电磁能量有什么关系?  
⇒ 坡印廷向量是描述电磁能量流动方向的向量, 为能流密度, 表示单位时间内通过单位面积的能量。坡印廷向量与电磁能量的关系称坡印廷定理, 在正文中将介绍。
9. 什么是电磁波? 它有哪些基本特性?  
⇒ 电磁波是由电场和磁场随时间、空间交替变化而产生的波动。它具有传播、反射、折射和偏振等特性。
10. 什么是电磁波传播常数  $\Gamma$ ,  $k$  和截止波数  $K_c$ ?  
⇒ 电磁波传播常数描述了电磁波在介质中的传播特性,  $\Gamma = \alpha - i\beta$  或  $k = i\Gamma = \beta + i\alpha$ , 包括衰减常数  $\alpha$  和相位常数  $\beta$ 。截止波数  $K_c$  是电磁波能够传播的最低波数。
11. 什么是电磁波的偏振?  
⇒ 电磁波的偏振是指电场向量的振荡方向。常见的偏振形式有线偏振和椭圆偏振。
12. 什么是波导?  
⇒ 波导是引导电磁波传播的装置, 常见的有矩形波导和圆柱形波导。电磁波在波导内为行进波。
13. 什么是谐振腔?  
⇒ 谐振腔是储存电磁场能量的装置, 常见的有矩形谐振腔和圆柱形谐振腔。电磁波在谐振腔内为驻波。
14. 什么是谐振腔的品质因数?  
⇒ 谐振腔的品质因数是量化谐振腔储能能力的参数, 表征谐振腔中电磁能量能够维持的时间长度。
15. 什么是分路阻抗?  
⇒ 分路阻抗是描述谐振腔中加速粒子或与粒子能量交换能力的参数, 表征单位时间内粒子获得的能量增益。
16. 什么是金属击穿?  
⇒ 金属击穿是指电磁场强度超过金属材料所能承受的最大值, 导致材料失去原先特性的现象。
17. 什么是 Slater 定理?  
⇒ Slater 定理属于谐振腔微扰理论, 描述谐振腔腔体或填充材料参数受到微小扰动或改变时, 谐振频率和品质因数的变化规律。
18. 什么是四向量? 什么是四向量的洛伦兹变换?

- ⇒ 四向量是基于相对论洛伦兹变换前提下，一对物理量组成的四维向量。四向量的洛伦兹变换是描述惯性系之间时空坐标变换的公式，满足光速不变原理和相对性原理。
19. 什么是相对论多普勒效应？
- ⇒ 相对论多普勒效应描述光或辐射场由于波源和观察者的相对运动而导致的频率或波长的变化。
20. 什么是康普顿散射？
- ⇒ 康普顿散射是指光子与电子碰撞后，在考虑整体系统能量与动量守恒前提下，光子能量和波长发生变化的现象。
21. 什么是激光波荡器？
- ⇒ 激光波荡器是一种利用激光与电子相互作用产生电磁辐射的装置。留意，波荡器 (undulator) 不是振荡器 (oscillator)，将在讲义后面章节介绍。
22. 什么是超材料？
- ⇒ 超材料是一种由人工构造的特殊电磁结构，也许更合适的称呼为超结构。它具有自然界中不存在的电磁特性，比如：负介电常数和负磁导率。通过精心设计的周期性结构，超材料可以控制电磁波的传播方向、速度和频率，并实现诸如超透镜、隐身技术等应用。
23. 什么是电磁高斯束的瑞利长度与古依相移？
- ⇒ 瑞利长度用来描述高斯光束聚焦程度的参数，表征光束从初始聚焦状态到发散至一定程度的距离。古依相移则是描述高斯光束相对于平面波传播时，在波前产生的额外相移，与光束的聚焦程度有关，即与瑞利长度有关。

## 1.1 基本方程

首先，简要回顾经典电磁场理论的发展里程碑：

- 1800 年之前，电与磁是独立的两门学科，互不交集。
- 1819 年，丹麦物理学家奥斯特 (Oersted) 发现通有电流的导线可使附近小磁针偏转，即周围存在磁场。
- 1820 年，法国物理学家毕奥 (Biot) 与沙伐 (Savart) 通过实验建立了磁通密度与电流之间的关系，经法国数学家拉普拉斯 (Laplace) 提炼、量化。
- 1820 年，安培 (Ampere) 建立了封闭回路上磁感应强度的线积分与通过回路的电流之间的关系，有安培环路定律。
- 1831 年，法拉第 (Faraday) 总结发现变化的磁场会产生电场，为电磁感应理论提供“原材料”。
- 1861 年，麦克斯韦 (Maxwell) 根据对称性的考虑，首次提出位移电流假设，建立电磁理论体系，从理论上预言电磁波的存在。
- 1888 年，赫兹 (Hertz) 实验上证实电磁波存在，“点亮”电磁理论的大厦。
- 1885 年，目前见到的 Maxwell 方程组以四个向量方程呈现是由 Gibbs 与 Heaviside 写出的形式。
- 1905 年，爱因斯坦 (A. Einstein) 提出的特殊相对论彻底改变了经典电动力学。在特殊相对论中，证明电磁理论 Maxwell 方程组在洛伦兹变换 (Lorentz transformation) 下形式不变。空间、时间彼此独立的经典概念被时空 (spacetime) 框架所取代。尽管特殊相对论在修改麦克斯韦方程组方面并没有直接影响，但它为电磁学和力学提供了一个统一的框架，并在高速情况下修正了经典观念。

大二电磁学课程介绍过的 Maxwell 方程组即用来描述惯性坐标系中的电磁现象，其中，场有电场  $\mathbf{E}$ 、磁场  $\mathbf{B}$ ，源有电荷  $\rho$ 、电流  $\mathbf{J}$ 。在自由空间或真空中，即使在没有源电荷或源电流的区域，随时间变化的电场  $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ 、磁场  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  也可视为一种产生电磁场的源。因此有电生磁、磁生电。

### 定律 1.1. 自由空间 Maxwell 方程组

自由空间 (free space) 或真空中微分形式的 Maxwell 方程组为

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.4)$$

此外，源的连续方程有

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.5)$$

可以通过对全电流定律等式两边求散度得到。这里的  $\rho$  为(体)电荷密度,  $\mathbf{J}$  为(体)电流密度。

自由空间或真空中积分形式的 Maxwell 方程组为

$$\oiint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1.6)$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \iint_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.7)$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \iint_A \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.8)$$

$$\oiint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.9)$$

与源的连续方程

$$\oiint_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \frac{\partial q}{\partial t} = 0 \quad (1.10)$$

电荷在电磁场中受力有洛伦兹力方程 (Lorentz force equation)  $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ 。

□

以上为自由空间的 Maxwell 方程组。如果要描述物质中的电磁现象, 上面形式的 Maxwell 方程组也适用, 只是分析将会变得非常不方便, 因为外部电荷源  $\rho$  或电流源  $\mathbf{J}$  会在物质中引起极化或磁化现象, 产生极化电荷与磁化电流, 贡献一部分额外的电场与磁场, 从而使叠加后的总体电场与磁场的计算变得非常复杂。为了简化分析, 一个标准做法是先引入以下几个本构关系 (constitutive relations), 将有助于列写更简洁且容易分析的 Maxwell 方程组。

### 定义 1.1. 本构关系 (constitutive relations)

在电介质中, 有电位移向量 (electric displacement vector)

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (1.11)$$

其中,  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  为介电系数 (dielectric constant, permittivity)<sup>a</sup>。在导电媒质中, 有(体)电流密度

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (1.12)$$

其中,  $\sigma$  为电导率 (conductivity)<sup>b</sup>。在磁媒质中, 有磁感应强度 (magnetic induction)

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (1.13)$$

其中,  $\mu = \mu_0 \mu_r$  为磁导率 (permeability)<sup>c</sup>。在自由空间中, 电磁波有波(相)速

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (1.14)$$

**注** 根据定义, 在自由空间中, 有  $\epsilon = \epsilon_0, \mu = \mu_0, \sigma = 0$ 。

<sup>a</sup>有时, 相对介电系数  $\epsilon_r$  写为  $\epsilon_r = 1 + \chi_e$ ,  $\chi_e$  称极化率 (electric susceptibility)。

<sup>b</sup>有时,  $\sigma$  写为  $\sigma = 1/\rho$ , 其中  $\rho$  为电阻率。注意, 不要与后面介绍的体电荷密度  $\rho$  或是第 10 章将介绍的 FEL/Pierce 参数  $\rho$  搞混。

<sup>c</sup>有时, 相对磁导率  $\mu_r$  写为  $\mu_r = 1 + \chi_m$ ,  $\chi_m$  称磁化率 (magnetic susceptibility)。 $\chi_m \gg 0$  或  $\mu_r \gg 1$  的磁媒质称铁磁 (ferromagnetic) 媒质;  $\chi_m > 0$  或  $\mu_r > 1$  的磁媒质称顺磁 (paramagnetic) 媒质;  $-1 < \chi_m < 0$  或  $0 < \mu_r < 1$  的磁媒质称反磁或逆磁或抗磁 (diamagnetic) 媒质。一种特殊情况:  $\chi_m < -1$  或  $\mu_r < 0$  的材料自然界几乎不存在, 称超材料 (metamaterial)。关于超材料的简短介绍可参考 §1.21。

□

**注** 一般泛指电场为  $\mathbf{E}$ , 磁场为  $\mathbf{B}$ , 但当描述物质中的电磁场时, 有时需要更准确地描述一些物理量,  $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}$  的正式名称为:

- $\mathbf{E}$ : 电场 (electric field)
- $\mathbf{D}$ : 电位移向量 (electric displacement vector)
- $\mathbf{H}$ : 磁场 (magnetic field)
- $\mathbf{B}$ : 磁感应强度 (magnetic induction)

### 定律 1.2. 物质 Maxwell 方程组

物质中微分形式的 Maxwell 方程组为

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad (1.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.16)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.18)$$

此外, 源的连续方程有

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_f + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0 \quad (1.19)$$

可以通过对全电流定律等式两边求散度得到。这里的  $\rho_f$  为自由 (体) 电荷密度,  $\mathbf{J}_f$  为自由 (体) 电流密度。在整体呈电中性的载流导体中 (如: 导线、金属导体管),  $\rho_f = 0$ , 传导电流密度与载流导体中的电场能相互关联, 可以写成  $\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E}^a$ 。留意,  $\mathbf{J}_f = \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_{\text{ext}} \neq \mathbf{J}_c$ , 其中,  $\mathbf{J}_{\text{ext}}$  导体外部加入的电流。

物质中积分形式的 Maxwell 方程组为

$$\oiint_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_f \quad (1.20)$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\iint_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.21)$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = I_f + \iint_A \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.22)$$

$$\oiint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.23)$$

与源的连续方程

$$\oiint_A \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{S} + \frac{\partial q_f}{\partial t} = 0 \quad (1.24)$$

以上  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  一项称位移电流密度 (displacement current density), 其中

$$\mathbf{J}_D \equiv \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}_P \quad (1.25)$$

- 等式右边第一项的  $\partial \mathbf{E} / \partial t$  贡献不是一定要在物质中, 在自由空间中的时变电场也贡献非零的  $\partial \mathbf{E} / \partial t$ 。这里的时变电场自然也将产生感应磁场。
- 留意, 有些教科书定义等式右边仅第一项为位移电流密度, 如 D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics* 一书, 即  $\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ , 而不是  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$  两项的和为位移电流密度。此讲义对位移电流密度的定义  $\mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  与 Jackson 一致。
- 等式右边第二项称极化电流密度 (polarization current density), 极化发生在物质置于外部电场环境, 当外部电场随时间改变时, 就可能有非零  $\mathbf{J}_P = \partial \mathbf{P}(t) / \partial t$ 。

<sup>a</sup>当在绝缘的电介质或自由空间时,  $\sigma = 0$ 。

□

**性质** 比较自由空间的全电流定律  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  与物质中的全电流定律  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ , 其中, 在物质中如果用  $\mathbf{B}$  表示, 即

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.26)$$

等式右边的体电流密度项  $\mathbf{J}$  应写为

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \quad (1.27)$$

类似地, 物质中电的高斯定律如果用  $\mathbf{E}$  表示, 即

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.28)$$

则等式右边的体电荷密度项  $\rho$  应写为

$$\rho = \rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P} \quad (1.29)$$

在直角坐标  $(x, y, z)$  中, Maxwell 方程组与 Poisson 方程如下分量形式:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f &\Rightarrow \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho_f \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\partial D_x}{\partial t} + J_x \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{\partial D_y}{\partial t} + J_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial D_z}{\partial t} + J_z \end{cases} \\ \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_f}{\epsilon} &\Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho_f}{\epsilon} \\ \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

练习 1.1 写下圆柱坐标系  $(\rho, \phi, z)$  的 Maxwell 方程组与泊松 (Poisson) 方程。  
解

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f &\Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho D_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (D_\phi)}{\partial \phi} + \frac{\partial (D_z)}{\partial z} = \rho_f \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 &\Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho B_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (B_\phi)}{\partial \phi} + \frac{\partial (B_z)}{\partial z} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial (E_z)}{\partial \phi} - \frac{\partial (E_\phi)}{\partial z} = -\frac{\partial B_\rho}{\partial t} \\ \frac{\partial (E_\rho)}{\partial z} - \frac{\partial (E_z)}{\partial \rho} = -\frac{\partial B_\phi}{\partial t} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho E_\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (E_\rho)}{\partial \phi} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial (H_z)}{\partial \phi} - \frac{\partial (H_\phi)}{\partial z} = \frac{\partial D_\rho}{\partial t} + J_\rho \\ \frac{\partial (H_\rho)}{\partial z} - \frac{\partial (H_z)}{\partial \rho} = \frac{\partial D_\phi}{\partial t} + J_\phi \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho H_\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (H_\rho)}{\partial \phi} = \frac{\partial D_z}{\partial t} + J_z \end{cases} \\ \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_f}{\epsilon} &\Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho_f}{\epsilon} \\ \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0 &\Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho J_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (J_\phi)}{\partial \phi} + \frac{\partial (J_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

练习 1.2 写下球坐标系  $(r, \theta, \phi)$  的 Maxwell 方程组与泊松 (Poisson) 方程。 ■

解

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f &\Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 D_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta D_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (D_\phi)}{\partial \phi} = \rho_f \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 &\Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 B_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta B_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (B_\phi)}{\partial \phi} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial (\sin \theta E_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial (E_\theta)}{\partial \phi} \right] = -\frac{\partial B_r}{\partial t} \\ \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial (E_r)}{\partial \phi} - \frac{\partial (r E_\phi)}{\partial r} \right] = -\frac{\partial B_\theta}{\partial t} \\ \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r E_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial (E_r)}{\partial \theta} \right] = -\frac{\partial B_\phi}{\partial t} \end{cases} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial (\sin \theta H_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial (H_\theta)}{\partial \phi} \right] = \frac{\partial D_r}{\partial t} + J_r \\ \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial (H_r)}{\partial \phi} - \frac{\partial (r H_\phi)}{\partial r} \right] = \frac{\partial D_\theta}{\partial t} + J_\theta \\ \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r H_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial (H_r)}{\partial \theta} \right] = \frac{\partial D_\phi}{\partial t} + J_\phi \end{cases} \\ \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_f}{\epsilon} &\Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = -\frac{\rho_f}{\epsilon} \\ \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0 &\Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 J_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta J_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (J_\phi)}{\partial \phi} + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

对静态场或随时间恒定的场，上式中  $\partial/\partial t = 0$ ，结合本构关系，于是 Maxwell 方程组可写成独立的三组方程，分别对应静电场、恒定电场、恒定磁场。这三组独立方程构成大二电磁学课程的主要内容。

### 1.1.1 静电场基本方程

#### 定理 1.1. 静电场基本方程

在电介质中，静电场基本方程有

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_f \\ \nabla \times \mathbf{E} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{J} = \mathbf{0}$$

自由空间或真空可视为  $\epsilon = \epsilon_0$  的电介质。利用向量恒等式  $\nabla \times \nabla u = \mathbf{0}$ ，引入位函数  $\varphi$ ，使  $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ ，则有泊松方程

$$\nabla \cdot (-\epsilon \nabla \varphi) = \rho_f \xrightarrow{\text{简单介质}} \nabla^2 \varphi = \nabla_{\mathbf{r}}^2 \varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho_f}{\epsilon} \quad (1.31)$$

其中，简单介质 (simple medium) 的定义为各向同性、线性、均匀。

在没有自由电荷分布的区域，泊松方程退化为拉普拉斯方程 (Laplace equation)

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.32)$$

拉普拉斯方程在大二高等数学介绍过。以下总结该方程的一些特性：

### 性质 1.1. 拉普拉斯方程解的一些特性

在真空中无源区域封闭边界面  $S$  与包围的  $\mathcal{V}$ ，满足拉普拉斯方程解  $\varphi$  有如下特性：

- $\varphi$  在  $\mathcal{V}$  区域的极大或极小值必发生在边界  $S$  上。
- 若  $\varphi$  在  $S$  上的值皆为一固定值  $\varphi_0$ ，则在  $\mathcal{V}$  区域内恒有  $\varphi = \varphi_0$ 。
- 若  $\varphi$  在  $S$  上的值已知， $\varphi(S)$ ，则在  $\mathcal{V}$  区域内的位函数  $\varphi$  解具唯一性。□

电介质 (dielectric) 通常指绝缘体，带有束缚电荷、但没有自由电荷或少到可以忽略的物质。存在外加电场情况下，电介质会有极化 (polarization) 现象<sup>1</sup>。仅用点电荷模型不足以定量描述该现象，因此我们需要定义电矩 (electric moment)。除了最低阶的电偶极矩 (dipole moment)，还有四极矩 (quadrupole moment) 或其它高阶矩，这些形式是依电位势以球谐 (spherical harmonics) 形式展开而定义的。细节此处不论，此分析方式在探讨由于局部电荷分布在空间产生电位势时具有一般性。简化起见，考虑电偶极矩，如果将电介质内的第  $i$  个分子的电偶极矩写成  $\mathbf{p}_i$ ，即

$$\mathbf{p} = q\boldsymbol{\ell} \quad (1.33)$$

其中  $\boldsymbol{\ell}$  为自  $-q$  指向  $+q$  的位移向量。则单位体积的总电偶极矩有  $\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\Delta V}$ ， $\mathbf{P}$  称极化强度或极化向量 (polarization vector)。分子内束缚电荷的运动对外界电场的响应体现在极化强度上，其一般形式可写为

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \left( \chi_e^{(1)} \cdot \mathbf{E} + \chi_e^{(2)} : \mathbf{E}\mathbf{E} + \dots \right) = \epsilon_0 \chi_e(\mathbf{E})\mathbf{E} \quad (1.34)$$

其中， $\chi_e^{(1)}$  为主要影响因子，体现在物质折射率与衰减因子。 $\chi_e^{(2,3,\dots)}$  为高阶、非线性效应。 $\chi_e$  通称极化率 (susceptibility)。忽略非线性效应，极化向量与电场的关系可写成

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e^{(1)} \mathbf{E} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (1.35)$$

留意， $\mathbf{P}$  为考虑了物质受外部电场极化后的极化强度。同时， $\mathbf{E}$  也包含除了外部电场之外，还有  $\mathbf{P}$  的贡献。换句话说，上式应该在自洽的物理图景下考虑。一般来说，外部电场强度  $\gg$  电介质极化产生的电场强度。

<sup>1</sup>这里的“极化”指的是在外部静电场环境中，物质中的分子四周电荷局域不平衡的现象，与 §1.11 即将介绍的电磁波的“极化” (时变电场振荡方向，又称偏振) 其物理图像不一样，宜留意。

**定义 1.2. 各向同性、线性、均匀  $\Rightarrow$  简单介质**

定义电介质的几种电磁响应特性：

- 各向同性 (isotropic)  $\Rightarrow \mathbf{P}$  与  $\mathbf{E}$  方向一致 ( $\mathbf{P} \parallel \mathbf{E}$ )、 $\chi_e$  为标量
- 线性 (linear)  $\Rightarrow \mathbf{P} \propto \mathbf{E}$ ，与  $\mathbf{E}^2$  或高阶场无关、 $\chi_e$  与电场无关
- 均匀 (homogeneous)  $\Rightarrow \chi_e$  不随空间位置改变<sup>a</sup>
- 互易 (reciprocal)  $\Rightarrow \chi_{e,ij} = \chi_{e,ji}$
- 色散 (dispersive)  $\Rightarrow \chi_e$  随电场振荡频率而变

**注** 简单介质  $\Leftrightarrow$  各向同性、线性、均匀的介质。

**注** 当外界电磁场强度足够大时，物质的电磁响应不再是简单的线性关系，研究非线性响应与物质特性的学科称为非线性光学 (nonlinear optics)。注意，此时叠加原理未必适用。

<sup>a</sup>更精确地说，为介电系数或电极化率随空间变化的尺度远小于电磁场的空间变化尺度，即长波极限。□

**定理 1.2. 极化电荷  $\rho_P, \sigma_P$** 

一个具有极化向量  $\mathbf{P}$  的电介质，可以用其极化体电荷密度

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (1.36)$$

与极化面电荷密度

$$\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (1.37)$$

表征，其中  $\hat{\mathbf{n}}$  方向指向外。

**注** 由上可知，具有均匀极化向量的电介质内， $\rho_P = 0$ 。对被均匀极化的电介质，如果存在  $\rho_P$ ，则  $\rho_P$  出现在电介质内部  $\mathbf{P}$  不均匀处。□

**练习 1.3** 试证明， $\sum Q_P = \iiint_V \rho_P dV + \iint_A \sigma_P dS = 0$ ，无论电介质是否为电中性。 ■

**注** 当极化发生在物质置于外部电场环境且电场随时间改变时，则以极化电流密度  $\mathbf{J}_P = \partial \mathbf{P} / \partial t$  等效描述。

电介质存在的场域中，空间中任一点电位与电场可以如下方式求得

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \iiint_V \frac{(\rho_f + \rho_P)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \iint_S \frac{(\sigma_f + \sigma_P)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \right] \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \iiint_V \frac{(\rho_f + \rho_P)(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' + \iint_S \frac{(\sigma_f + \sigma_P)(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS' \right] \end{aligned} \quad (1.38)$$

## 1.1.2 恒定电场基本方程

以上为静电场，电荷作为产生电场的源，相对于实验室坐标的观察者而言静止不动。如果电荷相对于实验室坐标的观察者移动，则移动的电荷形成电流，当移动电荷可视为匀速运动时，此时产生的电场称恒定电场，又称恒定电流场。以下我们约定

电介质载电荷，导电媒质载电流

且其中一种媒质环境出现时，暂时不考虑另一种。逻辑体系上，从静电荷过渡到移动电荷的过程，存在一个实用并能简化的理论体系，即考虑电荷移动形成的电流随时间缓变的情况，此类电流称为恒定电流或稳态电流 (steady current)。在此情况下，产生的电场与磁场可以各自分开、独立研究。以下先考虑电场。

## 定理 1.3. 恒定电场基本方程

在载流导电媒质中，恒定电场基本方程有

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{J} &= 0 \\ \mathbf{J} &= \sigma \mathbf{E}, \quad \rho = 0\end{aligned}\tag{1.39}$$

 **笔记** 此处的电流密度  $\mathbf{J}$  为传导电流密度。对电气专业的读者，以上恒定电场基本方程应该不陌生。在加速器束流动力学研究中，带电粒子束为已经游离的自由粒子在真空中运动，形成的电流为运流电流，而不是在导体中的载流电流。因此，恒定电场方程组在后面讨论将较少涉及。

 **练习 1.4** 静止电荷的电场为保守场。试论证恒定电流产生的电场也是保守场。 ■

**解** 根据安培定律  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$  知，若  $\mathbf{J}$  不含时，则  $\mathbf{B}$  不含时。再由法拉第定律知， $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}$ ，故恒定电(流)场为保守场。 ■

 **练习 1.5** 由以上恒定电场基本方程，可以得到电路理论中的两个重要定律：基尔霍夫电压定律 (Kirchhoff voltage law)、基尔霍夫电流定律 (Kirchhoff current law)。 ■

**解**

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \Rightarrow \text{任一条恒定电流形成的电流回路, 有 } \Sigma V = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \Rightarrow \text{当闭合曲面缩为电路的一个节点, 有 } \Sigma I = 0$$

## 定理 1.4. 焦耳定律 (Joule's law of heating)

传导电流通过导电媒质将产生热能损耗。热功率密度(单位时间单位体积产生的热

能) 可以写为

$$p = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \sigma E^2 = \frac{J^2}{\sigma} \quad (1.40)$$

或写成积分形式, 有

$$P = \iiint pdV = IV \quad (1.41)$$

**证明** 传导电流产生的电场使媒质荷电粒子 ( $dq = \rho dV$ ) 运动 ( $\mathbf{v} = d\ell/dt$ ), 场做功  $dW = \mathbf{F} \cdot d\ell = \mathbf{E}dq \cdot d\ell$ 。然后, 荷电粒子与媒质中邻近的原/分子碰撞。当形成 (宏观) 动态平衡时, 荷电粒子动能全部转为原/分子热振动能  $d\mathcal{E} = dW$ 。于是, 热功率密度  $p = \frac{d^2\mathcal{E}}{dVdt}$  即为上式, 得证。 □

### 1.1.3 静磁场或恒定磁场基本方程

移动的电荷形成电流, 除了有恒定电场, 1820 年丹麦物理学家 Oersted 的发现: 载流导线可以产生磁场。可以预见, 当电荷移动时, 完整的分析必须同时考虑电场和磁场, 又称时变电磁场, 其分析相对复杂地多。但是, 一步一步来, 先讨论直流电流产生的恒定磁场。当电流不再直流, 而包含交变电流成分后, 将有时变电磁场或电磁波。

#### 定理 1.5. 静磁场或恒定磁场基本方程

在磁媒质中, 静磁场或恒定磁场基本方程有

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}_f \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \end{aligned} \quad (1.42)$$

自由空间或真空可视为  $\mu = \mu_0$  的磁媒质。利用向量恒等式  $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$ , 引入位函数  $\mathbf{A}$ , 使  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , 则有泊松方程

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}_f \quad (1.43)$$

在没有自由电流分布的区域, 泊松方程退化为拉普拉斯方程 (Laplace equation)

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0 \quad (1.44)$$

有时候会遇到的一种情况是分析的区域不存在电流, 即  $\mathbf{J}_f = \mathbf{0}$ 。此时有  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$ 。该情况类似静电场, 可引入标量磁位函数  $\varphi_m$  以简化分析, 于是  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{H} = -\nabla \varphi_m$ , 由此建立标量磁位的拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \varphi_m = 0 \quad (1.45)$$

以上假设磁媒质为各向同性、线性、均匀。按此思路, 可定义磁场中两点间的标量磁位差为磁压, 有

$$V_{m,AB} = \varphi_{mA} - \varphi_{mB} = \int_A^B -d\varphi_m = \int_A^B \mathbf{H} \cdot d\ell \quad (1.46)$$

**注** 由  $\varphi_m$  及其分界面特性可知, 对铁磁媒质 ( $\mu \rightarrow \infty$ ) 而言, 等标量磁位面即为磁媒质物质表面, 形同静电场中的金属导体面为等电位面。□

类似于电介质的极化, 磁媒质在外部磁场中也会被“磁化”(magnetization)。讨论媒质物质在外部静磁场环境时, 从相对微观的角度看, 媒质中的原子大体上可视为一正电荷静止在中央, 外围环绕运动的负电荷。运动负电荷可以视为一个封闭球面环路电流。类似于电介质在静电场的极化分析, 我们可定义磁偶极矩 (magnetic dipole moment) 为对在平面上单连封闭曲线 (所围面积  $\mathcal{S}$ ) 之细导线, 流经其上的恒定电流  $i_0$  形成磁偶极矩, 单位法向方向由右手定则决定, 定义磁偶极矩为

$$\mathbf{m} = i_0 \mathcal{S} = i_0 \mathcal{S} \hat{\mathbf{n}} \quad (1.47)$$

类似地, 并非任何原/分子在外加磁场下都仅呈现磁偶极矩。还可以定义四极矩  $\mathbb{Q}_{\alpha, \beta}$  (quadrupole moment) 或其它高阶矩, 这些形式是依向量位函数展开而定义的。接着定义磁化向量或磁化强度  $\mathbf{M}$  (magnetization vector) 为磁媒质中单位体积的磁偶极矩和, 即  $\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i}{\Delta V}$ 。磁媒质对外界磁场达平衡时的响应体现在磁化向量强度上, 其一般形式可写为

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\chi_m}{1 + \chi_m} \mathbf{B} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \mathbf{H} \quad (1.48)$$

其中, 媒质磁化率  $\chi_m$  为无量纲, 完整的描述以张量形式呈现, 一般简化起见, 对简单媒质, 可假设  $\chi_m$  为标量。

### 定义 1.3. 各向同性、线性、均匀磁媒质 $\Rightarrow$ 简单媒质

定义磁媒质的几种电磁响应特性:

- 各向同性 (isotropic)  $\Rightarrow \mathbf{M}$  与  $\mathbf{H}$  方向一致 ( $\mathbf{M} \parallel \mathbf{H}$ )、 $\chi_m$  为标量
- 线性 (linear)  $\Rightarrow \mathbf{M} \propto \mathbf{H}$ , 与  $\mathbf{H}^2$  或高阶场无关
- 均匀 (homogeneous)  $\Rightarrow \chi_m$  不随空间位置改变<sup>a</sup>
- 互易 (reciprocal)  $\Rightarrow \chi_{m,ij} = \chi_{m,ji}$

**注** 简单媒质  $\Leftrightarrow$  各向同性、线性、均匀的磁媒质。

**注** 不像电介质, 多数情况下可以假设为简单介质。常见磁性材料并不都是线性磁媒质, 如: 铁的  $\mathbf{M}$  与  $\mathbf{H}$  就不是线性关系。

<sup>a</sup>更精确地说, 为媒质磁化率或磁导率随空间变化的尺度远小于电磁场的空间变化尺度, 即长波极限。□

### 定理 1.6. 磁化电流 $\mathbf{J}_m, \mathbf{K}_m$

一个具有磁化强度  $\mathbf{M}$  的磁媒质, 可以用其磁化体电流密度

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} \quad (1.49)$$

与磁化面电流密度

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}} \quad (1.50)$$

表征。其中， $\hat{\mathbf{n}}$  方向为自磁媒质指向外。总磁化电流有  $\Rightarrow I_m = \oint_C \mathbf{K}_m \cdot d\mathbf{l} + \iint_A \mathbf{J}_m \cdot d\mathbf{S}$ 。

**注** 也有用等效磁化电荷  $\rho_m = -\nabla \cdot \mathbf{M}$  描述磁媒质在磁场环境中的特性，此处不论。感兴趣的读者可参考电磁学教科书。 □

磁化媒质存在的场域中，空间中任一点向量位函数与磁场函数可以如下方式求得

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \iiint_V \frac{\mathbf{J}_f + \mathbf{J}_m}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \iint_S \frac{\mathbf{K}_f + \mathbf{K}_m}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \right] \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \iiint_V \frac{(\mathbf{J}_f + \mathbf{J}_m) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' + \iint_S \frac{(\mathbf{K}_f + \mathbf{K}_m) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS' \right] \end{aligned} \quad (1.51)$$

对电介质或磁媒质材料中的电磁场特性，其物理图像可定性总结如下：

- 磁通量倾向于穿过磁导率较大的物质，类似于电流倾向于穿过电导率较大的物质。
- 电介质一般减弱外界的  $\mathbf{E}$  场。按分界面边界条件，在部分以串接方式填充电介质的平行板电容器中，电介质-真空分界面  $\mathbf{D}_\perp$  场相同 (假设分界面没有外部加进来的自由面电荷  $\sigma_f = 0$ )， $\mathbf{E}$  场可能不同。
- 磁媒质一般减弱外界的  $\mathbf{H}$  场。按分界面边界条件，在含有气隙的磁路 (magnetic circuit) 中， $\mathbf{B}_\perp$  场相同， $\mathbf{H}$  场可能不同。

### 1.1.4 电磁场分界面边界条件

以上讨论了 Maxwell 理论在静场或恒定场情况下的三组独立方程组，分别对应静电场、恒定电场、恒定磁场。以下总结电磁场分界面边界条件。这些分界面边界条件也适用于时变电磁场。

#### 定理 1.7. 电磁场分界面边界条件

对一般情况，有

- 电场的边界条件

$$\textcircled{1} E_{1t} = E_{2t} \text{ 或 } \hat{\mathbf{n}}_{1 \rightarrow 2} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0}$$

$$\textcircled{2} D_{2n} - D_{1n} = \sigma_f \text{ 或 } \hat{\mathbf{n}}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma_f$$

- 磁场的边界条件

$$\textcircled{1} B_{1n} = B_{2n} \text{ 或 } \hat{\mathbf{n}}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$$

$$\textcircled{2} H_{2t} - H_{1t} = K_f \text{ 或 } \hat{\mathbf{n}}_{1 \rightarrow 2} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}_f$$

- 传导电流的边界条件

$$\textcircled{1} J_{2n} - J_{1n} = -\frac{\partial \sigma_{\text{面电荷}}}{\partial t} \text{ 或 } \hat{\mathbf{n}}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = -\frac{\partial \sigma_{\text{面电荷}}}{\partial t}$$

**注** 上面符号中, 下标  $t, n$  分别表示切向 (tangential) 与法向 (normal)。 $\frac{\partial}{\partial t}$  则是对时间坐标的偏微分。 □

**注** 此讲义一般将电导率写成  $\sigma$ , 在导体中, 有  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ 。有些教科书为了避免与面电荷密度  $\sigma$  混淆, 可能将电导率写成  $\gamma$ 。但是, 在加速器理论中,  $\gamma$  这个符号太“热门”, 已经被其它不止一个物理量占用。因此, 这里将电导率写成  $\sigma$ 。宜留意, 避免与洛伦兹因子  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$  或第 7 章介绍的 Courant-Snyder 函数  $\gamma = (1 + \alpha^2)/\beta$  搞混。

**笔记** 对静电场或恒定场而言, 以上边界条件都是独立的。对时变场而言, 除传导电流的边界条件外, 其它知道切线方向边界条件, 则法向边界条件可以获得 (反之亦同)。

**定理 1.8. 电磁场分界面边界条件: 一侧为理想导体、一侧为理想电介质**

设 1 为理想导体 ( $\sigma_1 = \infty$ ), 2 为理想介质 ( $\sigma_2 = 0$ ), 则  $\mathbf{E}_1 = \mathbf{D}_1 = \mathbf{B}_1 = \mathbf{H}_1 = \mathbf{0}$ , 有

• 电场的边界条件

$$\textcircled{1} E_{2t} = 0 \text{ 或 } \hat{\mathbf{n}}_{1 \rightarrow 2} \times \mathbf{E}_2 = \mathbf{0}$$

$$\textcircled{2} D_{2n} = \sigma_f \text{ 或 } \hat{\mathbf{n}}_{1 \rightarrow 2} \cdot \mathbf{D}_2 = \sigma_f$$

• 磁场的边界条件

$$\textcircled{1} B_{2n} = 0 \text{ 或 } \hat{\mathbf{n}}_{1 \rightarrow 2} \cdot \mathbf{B}_2 = 0$$

$$\textcircled{2} H_{2t} = K_f \text{ 或 } \hat{\mathbf{n}}_{1 \rightarrow 2} \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{K}_f$$
 □

**笔记** 在理想导体表面, 时变电场必须垂直导体表面, 而时变磁场必须与其表面相切, 且垂直面电流方向。

**练习 1.6** 考虑一侧为理想导体、一侧为理想电介质情况, 试证明对时变场而言, 知道切线方向边界条件, 则法向边界条件可以获得。 ■

**证明** 理想导体内部无电场, 由切向电场连续条件, 在导体表面或导体-介质分界面有<sup>2</sup>

$$\mathbf{E}_t = 0$$

不失一般性, 假设关心的导体表面附近可用直角坐标系描述, 则根据法拉第定律, 有

$$\left. \frac{\partial B_z}{\partial t} \right|_{z=0} = - \left( \left. \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \right|_{z=0} = 0$$

其中,  $(x, y)$  为导体表面附近的平面,  $z$  垂直于  $(x, y)$  平面。由于考虑的是时变场, 忽略 DC 成分, 有  $B_n = \text{常数} = 0$ 。 ■

<sup>2</sup>如果不是理想导体, 则导体表面或导体-介质分界面的电场就不为零, 见 §1.3 关于趋肤效应的讨论或 Leontovich 边界条件。

结束这一节前，以下总结 Maxwell 电磁理论的一般普适结论。

#### 定理 1.9. Maxwell 方程组的普适结论

由以上介绍，知

1. 由静电场与恒定磁场(静磁场)的基本方程知，其求解可彼此独立。
2. 连续方程与全电流定律不完全独立，前者可由后者等式两边取散度得到。

这一章后面将介绍，

3. Maxwell 方程组隐含电磁波的存在。
4. 波速有  $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ 。
5. 电磁波是横波，还可细分横电波、横磁波、横电磁波。
6. 电磁波中的电场与磁场比值称阻抗，为频率的函数。

□

这一章以下主要复习的内容为时变场，将为第2章至第5章做准备。静磁场的应用主要在设计、分析加速器磁铁时用到。静电场的应用，如镜像电荷法，可应用至分析电子经过金属结构表面的场分析。目前来说，静电、静磁不是此讲义重点，我们的重点将大部分放在时变电磁场。

## 1.2 无源电磁场方程

在经典力学中，满足具有物理意义的物理量都可以以实数呈现。但是，分析或简化问题则未必限于实数。适当引入复数的概念能够简化分析<sup>3</sup>。

首先，定义时谐场<sup>4</sup>为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \equiv \operatorname{Re}[\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)e^{-i\omega t}] \quad (1.52)$$

其中， $\operatorname{Re}[\dots]$  表示取实部。则所有对时间的微分可以用  $-i\omega t$  取代，即

$$\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow -i\omega \quad (1.53)$$

在自由空间中，无源即  $\mathbf{J} = \mathbf{0}, \rho = 0$ ，则麦克斯韦方程组可简化为

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot \tilde{\mathbf{D}} = 0 \quad (1.54)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = i\omega\mu\tilde{\mathbf{H}} \quad (1.55)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = -i\omega\epsilon\tilde{\mathbf{E}} \quad (1.56)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0 \quad (1.57)$$

对法拉第定律与全电流定律等式两边取旋度，得无源电磁场方程(又称波方程)

$$\nabla^2 \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^2 \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{E}} \\ \tilde{\mathbf{H}} \end{Bmatrix} + \omega^2\mu\epsilon \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{E}} \\ \tilde{\mathbf{H}} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (1.58)$$

后面 §1.9 将介绍，如果对自由空间情况，以上波方程的一个(非唯一)最简单、最常用的解，称均匀平面电磁波解，可以写为

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \\ \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_0 \\ \tilde{\mathcal{H}}_0 \end{Bmatrix} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad \text{或} \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \end{Bmatrix} = \operatorname{Re} \left[ \begin{Bmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_0 \\ \tilde{\mathcal{H}}_0 \end{Bmatrix} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t} \right] \quad (1.59)$$

其中， $k = |\mathbf{k}| = \omega/c$ 。

**注** 有些教科书 — 与绝大多数文献 — 将上式右边的  $\operatorname{Re}$  省去，宜留意。

注意到，当分析的对象不是自由空间，而是导体的时候，无源即  $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}, \rho = 0$ ，对

<sup>3</sup>复数的概念起源甚早，在 16 世纪由意大利数学家 Cardano 提出，但符号  $i = \sqrt{-1}$  则一直到 18 世纪才由德国数学家 Gauss 提出。将复数用平面上的点表示，即  $z = x + iy$ ，是由 18 世纪挪威-丹麦数学家 Wessel 提出，有时称 Argand 图。而后法国数学家 de Moivre 进一步与极坐标联系起来，写成  $z = x + iy = re^{i\theta}$ ，而后有著名的 de Moivre 定理 (de Moivre formula)

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta), \quad \text{其中, } n \in \mathbb{N}$$

之后瑞士数学家 Euler 更将其结果推广到  $n \in \mathbb{R}$  情况。

<sup>4</sup>注意，大二电磁学学到的时谐定义为  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Im}[\sqrt{2}\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)e^{j\omega t}]$ ，留意其区别。除了  $j = -i$  外，区别体现在  $\sqrt{2}$  导致的均方根表示式、复坡印廷向量、电场能量、磁场能量表示式等。

有些教科书采用  $j = -i$  惯例，则  $\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow j\omega$ 。

法拉第定律与全电流定律等式两边取旋度，则波方程将有如下形式

$$\nabla^2 \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \nabla^2 \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{E}} \\ \tilde{\mathbf{H}} \end{Bmatrix} + \omega^2 \mu\epsilon_c \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{E}} \\ \tilde{\mathbf{H}} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (1.60)$$

其中，定义复介电系数为

$$\epsilon_c = \epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} = \epsilon \left( 1 + i \frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right) \quad (1.61)$$

对自由空间或理想电介质， $\sigma = 0$ ，则上式退化到前面的结果。对良导体，有  $\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \gg 1$ ；对不良导体，有  $\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \ll 1$ 。此处，虚部物理量表示金属导体中的自由电子的弛豫损耗。一般材料中，除了自由电子，还有一部分的束缚电子 (bound charge)，束缚电子的弛豫损耗不包含在此项中。

#### 定义 1.4. 损耗正切 (loss tangent)

更一般的复介电系数的定义为

$$\epsilon_c = \epsilon \left( 1 + i \tan \delta_E + i \frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right) \quad (1.62)$$

其中，带有  $i$  的项均与损耗有关

- $\epsilon$  为物质的介电系数；
- $\sigma$  为电导率，表征金属中自由电子的弛豫损耗；
- $\tan \delta_E$  称电损耗正切 (electric loss tangent)，表征束缚电子的弛豫损耗。

类似地，还有复磁导率，定义为

$$\mu_c = \mu (1 + i \tan \delta_M) \quad (1.63)$$

其中， $\tan \delta_M$  称磁损耗正切 (magnetic loss tangent)。

这里简单介绍一下上式波方程对时间微分的两项的物理意义：

- $\left( \nabla^2 - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)$  表征电磁场是一种波，存在推迟效应 (retardation effect)。第2章将介绍；
- $\left( \nabla^2 - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \right)$  表征趋肤效应，根源为电磁感应，是时变场在导体中传播时具有的一般现象。下一节将介绍。

 **练习 1.7** 上面先假设了无源而得到无源电磁波方程。试着从麦克斯韦方程组出发，保留源项，推导有源电磁波方程。 ■

求解无源电磁波方程有许多方法，其中一个最常见的方法采用分离变量法 (separation of variables)，应用在求解波导中的电磁场，将在这一章后面介绍。采用分离变量法需要列写边界条件，如果对无界空间，此法不好处理，一般引入位函数，采用积分法。

时变电磁场的几个一般特性：

- **弛豫**现象  $\Leftarrow$  导体内的电荷倾向于往导体表面转移。可以由全电流定律或电荷-电流连续方程估算弛豫时间  $\tau = \epsilon/\sigma \approx 10^{-19}$  s。
- 展现**波**动现象  $\Leftarrow$  麦克斯韦方程组经过整理，能够写出波方程形式，有  $\nabla^2 - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}$  形式。
- **推迟**效应  $\Leftarrow$  承上， $\mu\epsilon = \frac{1}{c^2}$  表征波速，波速为有限大  $c < \infty$ 。即，源产生的场需要有限时间才能传到观察者位置，有推迟关系式  $t' = t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v}$  §1.4。
- **趋肤**效应  $\Leftarrow$  时谐场或交变电流在良导体中的分布呈现集中在导体表面的趋势。麦克斯韦方程组经过整理，能够写出扩散方程形式  $\nabla^2 - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t}$ 。物理根源：电磁感应。
- 分界面上存在**反射与透射**。

### 1.3 趋肤效应

这里介绍趋肤效应 (skin effect)。考虑一个半无限大良导体 ( $x > 0$ ), 如下图 1.1

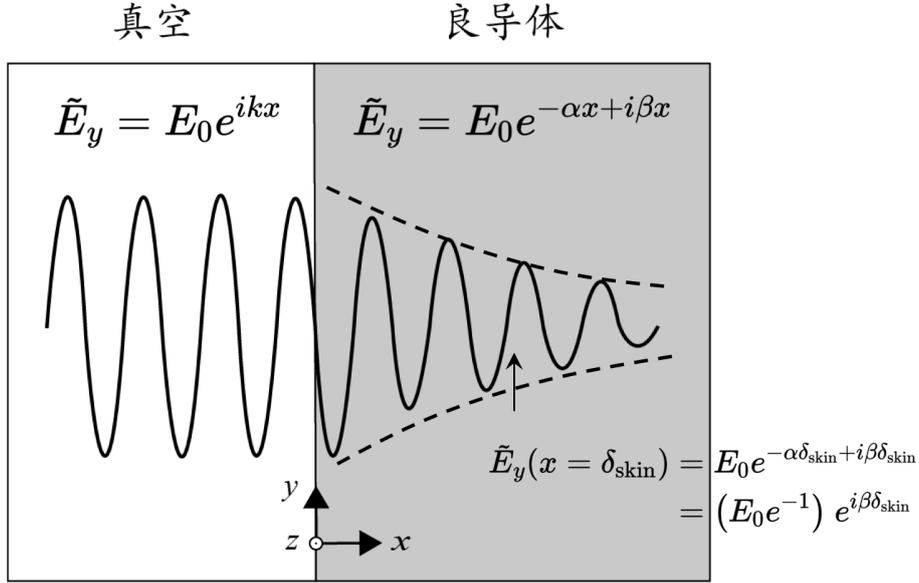


图 1.1: 半无限大良导体 ( $x > 0$ )。默认  $+y$  方向为纸面朝上,  $+z$  方向按右手定则为出纸面方向。

由时谐相量形式的 Helmholtz 方程, 有

$$\nabla^2 \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{E}} \\ \tilde{\mathbf{H}} \end{Bmatrix} + \omega^2 \mu \epsilon_c \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{E}} \\ \tilde{\mathbf{H}} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (1.64)$$

在良导体中,  $\sigma/\omega\epsilon \gg 1$ , 忽略束缚电子的弛豫损耗, 因此

$$\epsilon_c = \epsilon \left(1 + i\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right) \approx i\frac{\sigma}{\omega} \quad (1.65)$$

代入上式, 则有

$$\begin{aligned} \nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} - \Gamma^2 \tilde{\mathbf{E}} &= \mathbf{0} \\ \nabla^2 \tilde{\mathbf{H}} - \Gamma^2 \tilde{\mathbf{H}} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.66)$$

其中,

$$\Gamma = \sqrt{-i\omega\mu\sigma} = \sqrt{\omega\mu\sigma} e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} - i\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \alpha - i\beta \quad (1.67)$$

若采用  $j = -i$  惯例, 则

$$\Gamma = \sqrt{j\omega\mu\sigma} = \alpha + j\beta \quad (1.68)$$

考虑一维情况, 拉普拉斯算子可以简化为  $\nabla^2 \rightarrow d^2/dx^2$ , 边界条件有  $E_y(x \rightarrow +\infty) = 0$ 。在良导体中, 有

$$\begin{cases} \tilde{E}_y = \frac{J_0}{\sigma} e^{-(\alpha-i\beta)x} = E_0 e^{-\alpha x + i\beta x} \\ \tilde{H}_z = \frac{i\Gamma}{\omega\mu} E_0 e^{-\alpha x + i\beta x} \end{cases} \quad (1.69)$$

利用  $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ , 可得到良导体中沿  $x$  指数衰减的传导电流。容易发现, 时变电磁场与电流场沿  $x$  方向皆有  $e^{-\alpha x + i\beta x}$  因子。

**定义 1.5. 趋肤效应 (skin effect)、趋肤深度 (skin depth)**

在时谐场中的良导体，内部无净电荷，但允许有电流，电流的分布呈现集中在导体表面的趋势，即沿导体纵深方向逐渐衰减，该现象称为集肤效应。物理根源为电磁感应现象。理想导体无此效应。

趋肤深度定义为场振幅衰减至其表面的  $e^{-1} \approx 0.36$  时的深度  $\delta$ ，即  $e^{-\alpha\delta} = 1/e$ ，有

$$\delta(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{\pi f\mu\sigma}} \quad (1.70)$$

其中，

- $\mu$  为良导体磁导率 (对非磁性材料，一般为  $\mu_0$ )，SI 单位为 Henry/m
- $f > 0$  为时谐场频率，SI 单位为 Hz
- $\omega = 2\pi f$ ，SI 单位为 rad/sec
- $\sigma$  为电导率，SI 单位为 1/Ohm/m

**注** 利用 §0.5 单位制转换，CGS/高斯单位制的趋肤深度可写成

$$\delta(\omega) = \frac{c}{\sqrt{2\pi\omega\mu_r\sigma}} \quad (1.71)$$

其中， $\mu_r$  为相对磁导率。 □

室温情况下，常见金属的电导率有 (SI/MKS 单位制)

$$\sigma = \begin{cases} 3.5 \times 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}, & \text{铝 (aluminum)} \\ 5.9 \times 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}, & \text{铜 (copper)} \\ 1.4 \times 10^6 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}, & \text{不锈钢 (stainless steel)} \end{cases}$$

当时变电磁场或电磁波不是太高频的情况下，比如：射频、微波频段，金属电导率可视为定值，称直流电导率 (DC conductivity)<sup>5</sup>，与频率无关。但是当时变电磁场或电磁波的频率再高时，或是金属处于低温环境时，金属电导率将不再是定值，而与电磁波频率有较明显的函数依存关系，称交流电导率 (AC conductivity)。在这里，导体的电导率被视为一给定的材料参数。较令人满意的金属导体模型需要结合量子力学与统计力学才能完整描述。目前有些利用经典电磁场理论构造物质电导率的理论模型，如：Drude 模型 (Drude model)，尽管非基于第一原理的模型，但在结合部分实验量测参数后，仍能够给出差强人意的关于直流电导率的表示式与其修正的交流电导率表示式。更多讨论可参考 §11.3.2。

<sup>5</sup>这里的“直流”并不是指电导率只适用于直流电流，只是说电导率可视为定值，与电磁波的频率无明显的函数依存关系。

**性质 1.2. 趋肤深度实用公式**

对一般常见金属管壁，当电磁波频率为  $f$  时，有

$$\delta_{\text{skin}}[\text{mm}] = \frac{1}{\sqrt{f[\text{MHz}]}} \times \begin{cases} 0.066, & \text{铜 (copper)} \\ 0.086, & \text{铝 (aluminum)} \\ 0.43, & \text{不锈钢 (stainless steel)} \end{cases}$$

**注** 当金属材料的纵深度不足金属中的“电子平均自由径”(mean free path) 时，在一些分析时，采用以上趋肤深度公式将不再合适。更多讨论可参考 §11.3.2。 □

由以上趋肤效应的讨论知，在电导率仍可视为与频率无明显关系的常数情况下，频率越高的电磁波，趋肤深度越小，即电磁场透入金属越浅层，入射的电磁场几乎都反射了，此时的金属就像是理想的“镜子”。在微波或射频波段，金属是一种良好的反射镜。对可见光，一般铝或银可形成一良好反射表面。但是，对更高频的电磁波，如：紫外光或更短波长的 X 射线，金属就不一定还是良好的反射镜。一般来说，当电磁波的频率高于金属所表征的等离子体频率 (plasma frequency) 时，对高频电磁波而言，金属就像是透明物体，电磁波能几乎毫无障碍穿透它 (除了几个特殊频率上由于共振吸收导致的衰减外)。

**注** 以上讨论的趋肤效应又称寻常趋肤效应 (normal skin effect, NSE)，假设金属中电子的“平均自由程”很短，相比于趋肤深度而言。金属中电子的平均自由程 (mean free path) 指的是电子在材料中与材料内的其它相对静止的粒子碰撞时，相邻两次碰撞之间的时间内经过的路程的统计平均值。当金属中的电子平均自由程比上面计算的 (寻常) 趋肤深度大时，趋肤深度的概念就不太适用了，此效应称反常趋肤效应 (anomalous skin effect, ASE)。

反常趋肤效应总结如下：

**定义 1.6. 反常趋肤效应 (anomalous skin effect, ASE)**

当金属中的电子平均自由程比寻常趋肤深度大时，意味着金属中的电子流较难在金属表层附近流动，电磁场在金属表面的行为不同于先前介绍的寻常趋肤效应。一般来说，此时金属管壁的表面阻抗将增加。反常趋肤效应主要发生在高频、低温时，或当金属导体厚度与寻常趋肤深度相当时。关于反常趋肤效应的讨论，可参考 §11.3.2。 □

等离子体频率定义如下：

**定义 1.7. 等离子体频率 (plasma frequency)  $\omega_p$** 

忽略电子热运动，等离子体频率定义为

$$\begin{aligned}\omega_p &= \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0}} \quad [\text{rad/s}] \quad (\text{SI units}) \\ \omega_p &= \sqrt{\frac{4\pi n_e e^2}{m_e}} \quad [\text{rad/s}] \quad (\text{CGS units})\end{aligned}\tag{1.72}$$

其中， $n_e$  为电子体密度。以上的定义假设存在的背景离子为静止，即背景离子其质量无穷大。

**注** 对金属铝或银或一些碱金属 (alkali) 而言， $n_e \sim 10^{23} \text{ cm}^{-3}$  或  $10^{29} \text{ m}^{-3}$ ，对应的  $\omega_p \sim 10^{16} \text{ rad/s}$  约在紫外光 (ultraviolet, UV) 区间。对地表电离层 (ionosphere)， $n_e \sim 10^{18\sim 22} \text{ m}^{-3}$ ，对应的  $\omega_p \sim 10^{10\sim 12} \text{ rad/s}$ 。

**注** 当块材内电子彼此间距远大于电子的物质波 (或德布罗伊) 波长时，即  $n_e^{-1/3} \gg \lambda = h/p$  时，此等离子体又称经典等离子体。

时变场在金属物体表面的效应除了用趋肤深度量化外，还有一个相关的概念，称表面电阻，定义如下：

**定义 1.8. 表面电阻 (surface resistivity)**

定义为

$$\rho_s \equiv \frac{\rho_v}{\delta_{\text{skin}}} = \frac{1}{\sigma \delta_{\text{skin}}}\tag{1.73}$$

其中， $\rho_v = 1/\sigma$  为电路理论学过的体电阻 (bulk resistivity)。

**注** 由于时变场主要存在导体表面的趋肤深度内，因此才有此表面电阻的定义。注意，体电阻与表面电阻量纲不同。如采用 SI/MKS 单位制，体电阻的单位为  $\Omega\text{m}$ ，表面电阻为  $\Omega$ 。

**注** 明显地，表面电阻为频率的函数。留意，表面电阻与如下定义的表面阻抗 (surface impedance) 有些许差别。更一般性的定义为表面阻抗。

前面 §1.1 总结的分界面边界条件讨论了一侧为理想导体的情况。如果考虑一侧为自由空间，一侧为良导体，则对有限电导率的电磁场分界面边界条件，可总结为以下 Leontovich 边界条件。

**定理 1.10. 电磁场分界面边界条件：有限电导率情况**

又称 Leontovich 边界条件。当一侧为理想电介质，一侧为有限电导率  $\sigma$  的金属导体时，导体侧不再是  $\mathbf{E} = \mathbf{H} = \mathbf{0}$ 。在分界面两侧，切向电场与切向磁场皆连续。在

包含分界面上与导体侧内，切向电场与切向磁场满足以下 Leontovich 边界条件

$$\tilde{\mathbf{E}}_t = \zeta(\omega)\tilde{\mathbf{H}}_t \times \mathbf{n} \quad (1.74)$$

其中，

- $\mathbf{n}$  为理想介质指向导体的单位向量
- $\zeta(\omega) = -\frac{ik}{\sigma} = [1 - i \operatorname{sgn}(\omega)] \sqrt{\frac{Z_0|\omega|}{2c\sigma}}$  称表面阻抗 (surface impedance)<sup>a</sup>
- $\operatorname{sgn}(\omega)$  为符号函数 (sign function)，根据宗量正负，取值分别为  $\pm 1$

**证明** 参考 G. Stupakov and G. Penn, *Classical Mechanics and Electromagnetism in Accelerator Physics*, Springer (2018), §12.1.

**注** 对于理想导体情况， $\sigma \rightarrow \infty$ ，则  $\zeta \rightarrow 0$ ，有  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ 。

**注** 这里的 Leontovich 边界条件是在频域表示的时谐形式，在时域的瞬时表示需要连同场一起做逆傅里叶变换。前面 §1.1 介绍的理想导体的分界面边界条件则是在时域或频率都适用。

**注** 以上 Leontovich 边界条件为 SI/MKS 单位制表示。如果是 CGS/高斯单位制，则写成  $\tilde{\mathbf{E}}_t = \zeta(\omega)\tilde{\mathbf{H}}_t \times \mathbf{n}$ ，其中， $\zeta(\omega) = [1 - i \operatorname{sgn}(\omega)] \sqrt{\frac{|\omega|}{8\pi\sigma}}$ 。

<sup>a</sup>表面阻抗与表面电阻都是频率的函数，区别在于阻抗为复数，包含实部与虚部。更一般性的定义为表面阻抗。 □

### 1.3.1 浅谈：超导体的电磁特性

由前面关于趋肤效应的介绍，直观来看，读者或许会猜想当导体的电导率越大，或者电阻率越小，即越接近理想导体时，趋肤效应将逐渐消失或趋肤深度将趋近于零。又知道，有些金属物质在当温度持续降低后，达到某一临界温度时，电导率将骤降至零，形成超导体 (superconductor)。接下来读者或许会有个疑问：当导体为超导体时，是否存在趋肤效应？先买个关子，以下先简短介绍超导体的电磁特性。

超导体  $\neq$  理想导体。

超导体是丹麦物理学家 H.K. Onnes<sup>6</sup>在 1911 年首次发现，观察到当汞或水银 (mercury) 冷却时，其电阻降低，当温度<sup>7</sup>下降到 4.2 K 附近时，电阻完全消失。随后陆续发现锡、铅也有类似的超导特性。把这种电阻率为零的性质归类为超导特性之一，而满足超导特性的导体就称超导体。不打算详细介绍，这里总结一下超导体的电磁特性：

<sup>6</sup>Heike Kamerlingh Onnes (1853-1926) 为荷兰物理学家，由于其对低温条件下物质性质的研究，最终导致了液态氮的成功制备，获得 1913 年诺贝尔物理学奖。

<sup>7</sup>关于“低温”，在加速器领域对应的英文名词为 cryogenic temperatures，而不是笼统地称 low temperatures。一般指  $-150^\circ\text{C}$  (或 123 K) 至绝对零度  $-273.15^\circ\text{C}$  (或 0 K) 的温度范围。 $-150^\circ\text{C}$  以上一般不视为“低温”，因为金属在高于  $-150^\circ\text{C}$  环境下处理时，一般不发生明显结晶结构变化。一般通过液氮 (liquid nitrogen, 77.4 K)、液氦 (liquid helium, 4.2 K) 等达到这样的温度。目前来说，如果不使用低温系统，就无法实现超导。

**性质 1.3. 超导体的电磁特性**

同时包含:

- 零电阻  $\Rightarrow$  当温度下降到某一定值  $T_c$  时, 金属失去电阻, 称温度  $T_c$  为临界温度 (critical temperature)。在电磁场理论中, 电阻为零的导体定义为理想导体 (perfect conductor 或 ideal conductor), 因此, 超导体这种电阻率为零的特性与理想导体一致。但并不是说超导体就是理想导体。超导体还需满足以下特性。
- 完全抗磁  $\Rightarrow$  当样品处于超导态, 则外加磁场时, 磁场将无法进入样品内。当样品处于正常态, 外加磁场将进入样品内部。然后, 降低温度使样品低到  $T_c$  进入超导状态后, 样品中的磁场将全部被排斥出来, 称抗磁 (magnetic expulsion), 又称迈斯纳效应 (Meissner effect 或 Meissner-Ochsenfeld effect)。

**注** 理想导体内部  $\partial B/\partial t = 0$  或  $B = \text{常数}$ , 但超导体内部  $B = 0$ 。两者有所差别。

**注** 面向加速器社群的超导基础介绍, 可参考 Peter Schmuser, Superconductivity in high energy particle accelerators, Prog. Part. and Nucl. Phys. **49**, 155-244 (2002). [https://doi.org/10.1016/S0146-6410\(02\)00145-X](https://doi.org/10.1016/S0146-6410(02)00145-X) 或 <https://www.desy.de/~pschmues/Superconductivity.pdf>

随着超导材料陆续被发现, 根据其对外部磁场的截然不同的反应, 超导体再细分两类, 称第一类超导体与第二类超导体, 定义如下:

**定义 1.9. 第一类、第二类超导体**

分两类:

- 第一类超导体 (type-I superconductor)  $\Rightarrow$  当施加的外部磁场的强度超过一个临界值  $H_c$  时, 超导性会通过一级相变突然被破坏而回到非超导的正常态。这种超导性通常由纯金属展现, 如: 铅和汞等。
- 第二类超导体 (type-II superconductor)  $\Rightarrow$  为一种在中间温度和磁场强度下, 表现出普通和超导两种性质的混合态 (mixed state) 的超导体。此时还具有在施加外部磁场时形成磁场涡旋的特征。此一现象发生在高于临界场强  $H_{c1}$  之上, 但在  $H_{c2}$  之下。随着磁场强度的增加, 涡旋密度也会上升。在更高的临界场  $H_{c2}$  时, 超导性就会被破坏而回到非超导的正常态。第二类超导体不会表现出上述的完全迈斯纳效应。

回到问题, 当导体为超导体时, 是否存在趋肤效应? 答案是否定的, 因为在理想情况下, 超导体的电阻为零或电导率为无穷大。意思是, 在完美、无缺陷、无杂质的超导体中, 理论上在临界温度  $T_c$  以下时, 电阻应为零。然而, 在实际的超导体中, 总是存在一些缺陷 (defects) 和杂质 (impurities), 这些缺陷和杂质可以散射库珀对 (Cooper pair), 因此, 即使在超导状态下也会引入有限的电阻。因此, 如果查文献, 将发现目前仍有关于超导体趋

肤效应的研究。虽然超导体不存在熟悉的、经典的趋肤效应，但在极高频情况下，在超导体表面附近可能由于上述原因而表现出非均匀电流分布。深入了解超导体的电磁特性为对于设计和优化在高频工作的超导装置，比如：粒子加速器超导谐振腔 (superconducting radiofrequency cavity, SRF cavity) 等至关重要。对此感兴趣的读者，可参考应用于粒子加速器的射频超导教科书 Hasan Padamsee, RF Superconductivity — Science, Technology, and Applications, Wiley-VCH (2009) 或 Hasan Padamsee, Jens Knobloch, and Tom Hays, RF Superconductivity for Accelerators, John Wiley & Sons, Inc. (1998)。

超导体的分析仅用经典电磁场理论无法完整、自洽描述，必须用到量子力学理论才行。绕开复杂的量子力学理论，在工程实际中，基于“现象学”的超导理论模型有时候更受青睐，有二流体模型 (two-fluid model)、伦敦方程 (London equations)、金兹堡-朗道方程 (Ginzburg-Landau equation, GL) 等。真正从量子力学出发的微观理论一直到 1957 年才由 J. Bardeen、L. Cooper 与 J.R. Schrieffer 提出，称 BCS 超导理论。从 BCS 理论出发，能够复现现象学的伦敦方程、金兹堡-朗道方程等，且预测了约瑟夫森效应 (Josephson effect)，是一个成功的低温超导理论。细节此处不论，感兴趣的读者可自行参考相关文献。

#### 定义 1.10. BCS 电阻

也称 BCS 表面电阻 (BCS surface resistance) 或残余电阻 (residual resistance)，是由于电荷载流子，又称库珀对 (Cooper pair)，在材料内部与杂质、缺陷或晶格振动 (即声子) 发生散射而导致的在超导体中的电阻。

**注** BCS 电阻通常比临界温度以上的常态电阻小，但它仍可能会限制超导器件和应用的性能。这种电阻随温度的降低而减小，当温度低于临界温度时，电阻会进一步降低。为最小化 BCS 电阻，需要使用纯度高、缺陷少的超导材料，同时通过精心设计的材料加工和制造工艺，以减少引入杂质或结构缺陷。 □

## 1.4 位函数

前面提过, 对自由空间这类没有边界的情况, 分析电磁场可采用位函数, 有时称积分法。基本思路是, 先找到位函数满足的波方程, 写出其通解, 再根据电磁场与位函数的关系得到场的解。利用位函数分析的一个好处是其解已经包含推迟关系。此外, 标量与向量位函数一共四个函数, 比起各自三个分量的电场与磁场函数, 有时候求解位函数相对简单些。

在引入电磁理论的位函数前, 略去证明细节, 先介绍几个数学结果。根据微分方程理论, 以下形式的 Poisson 方程与其三维通解(称格林函数解), 假设  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ , 有

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= -f(\mathbf{r}) \\ \Leftrightarrow \Phi &= \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{f(\mathbf{r}')}{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} dV' \\ \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{f(\mathbf{r}')}{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_A \left[ \frac{1}{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} \frac{\partial \Phi(S')}{\partial n} - \Phi(S') \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} \right] dS' \end{cases} \end{aligned} \quad (1.75)$$

**注** 上式的物理意义: 等式右边第一项表示  $V$  内包含的场源  $f(\mathbf{r})$  对  $\Phi$  的贡献  $\Rightarrow$  叠加原理 (superposition principle)。等式右边第二项则表示  $V$  外场源  $f(\mathbf{r})$  对  $\Phi$  的贡献, 集总在边界上  $\Rightarrow$  惠更斯原理 (Huygens principle)。

以下形式的 Helmholtz 方程与其三维通解(称格林函数解), 假设  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ , 有

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -f(\mathbf{r}, t) \Leftrightarrow \Phi = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{f(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} dV' \\ \dots \end{cases} \quad (1.76)$$

**注** 上式的物理意义: 推迟效应, 当  $c \rightarrow \infty$  时,  $f(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}) \rightarrow f(\mathbf{r}')$ , 退化为以上 Poisson 方程解。



**笔记** 细心的读者会发现, 以上解都包含  $1/4\pi R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  项。此项称三维格林函数  $G_{3D}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 。对二维、一维情况, 其形式不再是  $1/4\pi R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , 而是

$$G_{2D}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|}, \quad \boldsymbol{\rho} = (x, y)$$

$$G_{1D}(x, x') = xH(x' - x) + x'H(x - x')$$

其中,  $H(x)$  为 Heaviside step function; 当  $x \geq 0$  时,  $H = 1$ ; 当  $x < 0$  时,  $H = 0$ 。关于格林函数的更多讨论, 此处不论, 感兴趣的读者可参考 Jon Mathews and R.L. Walker, *Mathematical Methods of Physics*, Addison-Wesley (1970) 一书的 §9.4、§9.5 或余恬、雷虹编著的“电磁场分析中的应用数学”一书的第十章。

下面介绍位函数时，将直接应用上面给出的格林函数解的结果。如果电磁波在空间传播过程遇到障碍物，则在障碍物附近将产生衍射 (diffraction) 效应。此时，惠更斯项就要列入分析。以下简单起见，只考虑无界情况，因此忽略惠更斯项。

### 定义 1.11. 标量位函数 $\varphi$ 、向量位函数 $\mathbf{A}$

位函数有标量位函数 (scalar potential)  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  与向量位函数 (vector potential)  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ 。与电场、磁场的关系按如下定义：

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.77)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.78)$$

**注** 对于静电场、静磁场， $\partial/\partial t = 0$ ，上面定义仍然适用。

**注** 对自由带电粒子，其产生的电磁场与对应的位函数有如下关系：

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi - \frac{\beta}{c} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial t} \quad (1.79)$$

证明参考下面讨论。 □

既然电场、磁场有需要满足的分界面边界条件，那么位函数也有对应的分界面边界条件，总结如下：

### 定理 1.11. 位函数 $\varphi, \mathbf{A}, \varphi_m$ 的分界面边界条件

对一般情况，有

- 电场的边界条件 (这里下标  $t$  表切向、 $n$  表法向、 $\partial/\partial n$  为法向微分)

$$\textcircled{1} E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$$

$$\textcircled{2} D_{2n} - D_{1n} = \sigma_f \Rightarrow \epsilon_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \epsilon_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = \sigma_f$$

- 磁场的边界条件 (这里下标  $t$  表切向、 $n$  表法向、 $\partial/\partial n$  为法向微分、 $\partial/\partial t$  为切向微分)

$$\textcircled{1} B_{1n} = B_{2n} \Rightarrow \mu_1 \frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n}, \text{ 其中, } \varphi_m \text{ 为标量磁位函数}$$

$$\textcircled{2} H_{2t} - H_{1t} = K_f \Rightarrow \hat{\mathbf{n}}_{1 \rightarrow 2} \times \left( \frac{1}{\mu_2} \nabla \times \mathbf{A}_2 - \frac{1}{\mu_1} \nabla \times \mathbf{A}_1 \right) = \mathbf{K}_f$$

$$\textcircled{3} \text{ 若引入标量磁位函数, 则 } \varphi_{m1} = \varphi_{m2} \text{ (若 } K_f = 0), \frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial t} - \frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial t} = K_f \text{ (若 } K_f \neq 0)$$

$$\textcircled{4} \text{ 对平面平行场 } \mathbf{A} = A\mathbf{e}_z, A_1 = A_2, \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_1}{\partial n} - \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_2}{\partial n} = K_f$$

- 传导电流的边界条件 (电导率  $\sigma_{1,2}$  为有限值且不为零、此处  $\partial/\partial n$  为法向微分、 $\partial/\partial t$  为时间微分)

$$\textcircled{1} J_{2n} - J_{1n} = -\frac{\partial\sigma_{\text{面电荷}}}{\partial t} \Rightarrow \sigma_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \sigma_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = \frac{\partial\sigma_{\text{面电荷}}}{\partial t} \quad \square$$

利用上面位函数定义，可以将麦克斯韦方程组表示为  $\varphi$  与  $\mathbf{A}$  的标量-向量耦合方程

组, 有

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu \mathbf{J} \end{cases} \quad (1.80)$$

求解电磁场问题, 可以通过求解  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$  的六个物理量 (电场、磁场各三个分量) 的场方程, 也可以通过求解  $\varphi$ 、 $\mathbf{A}$  的四个物理量 (一个标量位函数、三个分量的向量位函数) 的位方程, 如上给出。留意, 无论求解六个分量的场方程或四个分量的位方程, 方程本身包含的信息与求解得到的信息一样多。有些读者或许会问, 既然这样, 那求解位方程不是更省事? 为什么还特地介绍场方程?  $\Rightarrow$  解场或位哪一种形式的方程组比较省事还要视问题而定, 不同问题的场或位可能具有不同程度的对称性, 也就会不同程度简化分析, 无法一概而论。

在库仑规范 (Coulomb gauge)<sup>8</sup>下, 要求  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , 有

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu\epsilon \frac{\partial \nabla \varphi}{\partial t} = -\mu \mathbf{J} \end{cases} \quad (1.81)$$

可以看到, 库仑规范下, 标量位函数满足的方程式与静电场时的泊松方程的形式一样, 但这时候等式右边的  $\rho$  允许时间依存关系。

再来看在洛伦兹规范 (Lorenz gauge) 下, 要求  $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ , 有<sup>9,10</sup>

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} \end{cases} \quad (1.82)$$

可以看到, 洛伦兹规范下, 标量位函数与向量位函数要满足的方程式的形式一样, 都是波方程形式。

<sup>8</sup>又称辐射规范 (radiation gauge)、横向规范 (transverse gauge)。

<sup>9</sup>此处的洛伦兹 (Ludvig V. Lorenz) 为丹麦物理学家, 非彼处洛伦兹力的荷兰物理学家洛伦兹 (Hendrik A. Lorentz), 虽然中文翻译没有区别。关于规范变换的原始论文, 是 1867 年由 L.V. Lorenz 发表, 题为 *On the identity of the vibrations of light with electrical currents*, 内容探讨了推迟势、波方程与上述的洛伦兹规范。如今许多文献、教科书误写为 Lorentz gauge, 部分原因起于一篇探讨 Lorenz 与 Lorentz 文章的错误: J. Van Bladel, *Lorenz or Lorentz*, IEEE Antennas and Propagation Magazine, 33, 2, April 1991, p.69。另一个可能的原因或许是在 1880 年时, 两位物理学家 Lorenz (1829-1891) 与 Lorentz (1853-1928) 分别在同一期刊、同一时间段发表了类似议题的论文。并且在那之后, Lorentz 持续保持高产的电磁理论的论文发表, 如后来人们熟知的洛伦兹力方程、狭义相对论的 Lorentz contraction, Lorentz invariance, Lorentz transformation 等。而 Lorenz 的规范变换则是一直到他死后才被人们意识到其重要性。值得一提的是, 在 H.A. Lorentz 的一篇早期的探讨材料折射的论文中确实提到了 Lorenz 的工作。但是, 在 Lorentz 往后的经典论文 *La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants*, Arch. Neerl. Sci. Exactes Nat., 25, 1892, pp. 363-552 (p. 497) 及其后来发表的著作 *The Theory of Electrons* 中, 便未再提及 L.V. Lorenz 的论文。从现在角度看, 或许 H.A. Lorentz 应该意识到这个问题, 但当时并没有。一直到 1963 年, Mogens Pihl 在哥本哈根大学举办的电磁理论与天线的会议 (Symposium on Electromagnetic Theory and Antennas) 上才正名了规范变换的工作是由 Ludvig V. Lorenz 首次提出。

<sup>10</sup>除了 Hendrik A. Lorentz 与 Ludvig V. Lorenz 外, 在科研领域还有一个 Lorenz, 称 Edward N. Lorenz, 为数学与气象学家, 为混沌理论开创者之一, 提出后来被称为 Lorenz attractor 的概念。

上述的两个规范可以视为是对位函数  $\varphi, \mathbf{A}$  的约束条件；言下之意即是说，位函数的解的弹性太大，多组位函数的解  $(\varphi_1, \mathbf{A}_1)$ 、 $(\varphi_2, \mathbf{A}_2)$  将对应同一组电磁场解  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ 。容易验证，只要  $(\varphi_1, \mathbf{A}_1)$ 、 $(\varphi_2, \mathbf{A}_2)$  彼此满足如下关系，

$$\varphi_2 = \varphi_1 - \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 + \nabla \lambda \quad (1.83)$$

其中， $\lambda$  为任意可微分函数，则它们都对应同样的电磁场解  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ 。因此，只要设定位函数的约束条件不影响得到的解所对应的电磁场解，即设定的约束条件不影响物理本质，则这么做是允许的。前面介绍了场方程要求解六个分量或位方程要求解四个分量。有些读者或许会好奇，为什么约束条件落在位方程，而不是场方程？根本原因是我们承认的事实是：在经典力学中，电场、磁场才是实验上能够量测的物理量。

又 称  
 $(\varphi_1, \mathbf{A}_1) \rightarrow$   
 $(\varphi_2, \mathbf{A}_2)$  的  
规范变换  
(gauge trans-  
formation)。

**练习 1.8** 试着推导任意可微分函数  $\lambda$  在库仑规范与洛伦兹规范下应满足的关系。 ■

**解** 对库仑规范，函数  $\lambda$  满足

$$\nabla^2 \lambda = -\nabla \cdot \mathbf{A} \quad (1.84)$$

对洛伦兹规范，函数  $\lambda$  满足

$$\nabla^2 \lambda - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} = -\nabla \cdot \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (1.85)$$

**练习 1.9** 可以证明，洛伦兹规范 (Lorenz gauge) 满足洛伦兹不变性 (Lorentz invariant)。关于洛伦兹不变性的讨论，可参考 §1.16。 ■

在洛伦兹规范 (Lorenz gauge) 下，由于这里的  $\varphi, \mathbf{A}$  满足的方程具有如上带激励源项的 Helmholtz 方程形式，其通解可以写成积分形式。对于一般形式的电荷与电流分布， $\varphi, \mathbf{A}$  有以下解形式

$$\begin{cases} \varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c})}{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} d\mathcal{V}' \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}_{\text{ext}}(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c})}{R} d\mathcal{V}' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{\varphi} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_V \frac{\tilde{\rho}(\mathbf{r}') e^{i\beta R}}{R} d\mathcal{V}' \\ \tilde{\mathbf{A}} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\tilde{\mathbf{J}}_{\text{ext}}(\mathbf{r}') e^{i\beta R}}{R} d\mathcal{V}' \end{cases} \quad (1.86)$$

这些解又称  
非齐次格林  
函数。

其中， $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ 。可以看到，在观察位置  $R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ 、时刻  $t$  看到的时变电磁场由源  $\mathbf{r}'$  在过去时刻  $t' = t - \frac{R}{c}$  贡献。推迟效应可以表示成

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v} \quad (1.87)$$

推迟条件在  
后面几章将  
会重点讨论。

这个简单的式子包含的物理意义是深刻的。比较静电场与恒定磁场中的标量与向量位

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} d\mathcal{V}' \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}_{\text{ext}}(\mathbf{r}')}{R} d\mathcal{V}' \end{aligned} \quad (1.88)$$

可以发现, 对时变场, 有额外的时间依存关系  $t - \frac{R}{c}$  项或  $e^{i\beta R}$  项。此处, 电荷密度的体积分  $\rho dV'$  可换成面积分  $\sigma dS'$  或线积分  $\tau dl'$ , 电流密度的体积分  $\mathbf{J} dV'$  也可以换成  $\mathbf{K} dS'$  或  $I dl'$ 。

**练习 1.10** 上面讨论直接给出位函数  $\varphi, \mathbf{A}$  的解。对细节感兴趣的读者, 不妨试着自行推导。提示: 查找关键词“非齐次时变格林函数”。 ■

对无源均匀平面电磁波, 在库仑规范下, 假设  $\varphi = 0$ , 或者在洛伦兹规范下, 向量位函数满足的方程有

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad \text{或} \quad \nabla^2 \mathbf{A} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (1.89)$$

其通解可写成<sup>11</sup>

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, \omega) = \tilde{\mathbf{A}}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad \text{或} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[ \tilde{\mathbf{A}}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t} \right] \quad (1.90)$$

其中,  $k = |\mathbf{k}| = \omega/c$ 。对应的电场

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{或} \quad \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \tilde{\mathbf{A}} \quad (1.91)$$

与磁场

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{或} \quad \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) = i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}}{\omega} \quad (1.92)$$

留意,  $\nabla \leftrightarrow i\mathbf{k}$ 。

上面给出了无源均匀平面电磁波的位函数解。有时候分析需要考虑有源的电磁场。此讲后面关心的源是加速器里的自由带电粒子。

回忆一下, 大二电磁学课程学过, 电流分两类:

- 传导电流, 满足欧姆定律, 即  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ 。传导电流的概念与电荷的概念可以独立考虑, 比如, 静电场仅与电荷概念有关, 恒定电场或静磁场仅与传导电流有关。
- 运流电流, 为自由电荷运动产生, 满足  $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$ 。运流电流是由于电荷运到引起, 因此, 运流电流的概念与电荷概念相互关联。

加速器里的带电粒子为自由空间中的粒子, 因此带电粒子束团的电流属于运流电流。由此, 上面的标量位函数  $\varphi$  与向量位函数  $\mathbf{A}$  可按如下关系相互关联。对恒定速度  $\mathbf{v} = \beta c$  的粒子, 有  $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} = \rho \beta c$ , 于是

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t') \beta c}{R} dV' = \frac{\mu_0 c \beta}{4\pi} \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{R} dV' \\ &= \frac{\beta}{4\pi \epsilon_0 c} \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{R} dV' = \frac{\beta}{c} \varphi(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (1.93)$$

因此,

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi - \frac{\beta}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (1.94)$$

可以看到, 只要求得时变标量位函数  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  或向量位函数  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  之一, 则可求得时变

<sup>11</sup>在洛伦兹规范下, 标量位函数的通解自然有  $\varphi(\mathbf{r}, t) = \text{Re} [\tilde{\varphi}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t}]$ 。

电场，不需要分别独立求解  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  与  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ 。

 **练习 1.11** 证明此时的时变标量位函数  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  满足如下相对论泊松方程

$$\nabla_{\perp}^2 \varphi + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

当  $\gamma \rightarrow \infty$  时，方程退化为二维泊松方程  $\nabla_{\perp}^2 \varphi = -\rho/\epsilon_0$ 。 ■

**解** 证明过程用到了  $z = s - ct$  与  $1 - \beta^2 = 1/\gamma^2$ 。 ■

结束本节之前，应注意，以上具有时间推迟项的标量“位”与向量“位”和静电场及恒定磁场的对比关系很漂亮，就是把时间推迟项纳入源分布函数  $t \rightarrow t' = t - \frac{R}{c}$  或是多了额外的  $e^{i\beta R}$  项<sup>12</sup>。但是，这并不表示对电“场”与磁“场”也有类似关系，也就是说，在静电场有库仑定律或恒定磁场有 Biot-Savart 定律

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}') \mathbf{e}_R}{R^2} dV' \quad (1.95)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}_{\text{ext}}(\mathbf{r}') \times \mathbf{e}_R}{R^2} dV' \quad (1.96)$$

但是，对应的时变电磁“场”不能只是单纯地做如上代换，即<sup>13</sup>

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \neq \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{R}{v}) \mathbf{e}_R}{R^2} dV' \quad (1.97)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \neq \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}_{\text{ext}}(\mathbf{r}', t - \frac{R}{v}) \times \mathbf{e}_R}{R^2} dV' \quad (1.98)$$



**笔记** 学到这里，读者也许会提出一个问题：静场与时变场的位函数形式一致，时变场仅需代换推迟时刻或加  $e^{i\beta R}$  项，那怎么场函数就不能也有类似代换，根本原因是什么？首先，这个  $t \rightarrow t' = t - \frac{R}{c}$  或是  $e^{i\beta R}$  的代换是源于 Helmholtz 方程的格林函数解的特性。回到写出位函数解的方程，具有类似 Helmholtz 方程波方程的形式

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}_{\text{ext}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla^2 \tilde{\varphi} + \beta^2 \tilde{\varphi} = -\frac{\tilde{\rho}}{\epsilon} \\ \nabla^2 \tilde{\mathbf{A}} + \beta^2 \tilde{\mathbf{A}} = -\mu \tilde{\mathbf{J}}_{\text{ext}} \end{cases} \quad (1.99)$$

但是，如果按 Maxwell 方程组，写出自由空间中“场”的方程，将得到

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \rho + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \\ \nabla^2 \mathbf{H} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} &= -\nabla \times \mathbf{J} \end{aligned} \quad (1.100)$$

等式右边不是 Helmholtz 方程的标准形式。那么，场的解自然也不能从  $t \rightarrow t' = t - \frac{R}{c}$  或是  $e^{i\beta R}$  代换就能得到。

<sup>12</sup>根据此讲义采用的惯例， $k = \beta + i\alpha$ ，对无损耗情况， $k = \beta$ 。

<sup>13</sup>这里  $\neq$  的意思是，等式并不总是成立。与“等式总是不成立”意义不同。

## 1.5 电磁场能量守恒定律

在静电场中, 有电场能量密度  $w_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$ 。在静磁场中, 有  $w_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$ 。在时变电磁场中, 实验上证实了  $w_{EM} = w_e + w_m$ 。如果我们想知道动态的能量流动, 即功率, 可以将闭合区域  $\mathcal{V}$  内的电磁场 (总) 能量对时间偏微分, 结合 Maxwell 方程组, 从而获得功率平衡方程。



**笔记** 思考一下, 为什么是偏微分而不是全微分?

### 定义 1.12. 坡印廷向量 (Poynting vector) $\mathbf{S}$

定义 (瞬时) 坡印廷向量为

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (1.101)$$

SI 单位:  $\text{W}/\text{m}^2$  或  $\text{J}/(\text{m}^2\text{sec})$ 。坡印廷向量又称能流密度 (density of energy flow)。顾名思义, 能流即单位时间的能量, 即  $\text{J}/\text{sec}$ ; 密度即单位面积, 即  $\text{m}^{-2}$ 。

**注** 对辐射源, 常用单位立体角内的辐射功率描述, 可写成

$$\frac{dP_p}{d\Omega} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} r^2 \quad (1.102)$$

其中,  $\mathbf{n}, r$  分别为源至观察者的单位方向向量与距离,  $\Omega$  为立体角 (留意, 不要与电阻或阻抗单位混淆)。

**注** 准确地说, 这里定义的量  $dP_p/d\Omega$  为“观察者”的辐射功率角分布, 即远处一位置相对于源在方向角  $\Omega \rightarrow \Omega + d\Omega$  范围内接收到的辐射功率  $dP_p$ , 与“源”发出的辐射功率角分布  $dP/d\Omega$  未必总是一致。当“源”与“观察者”没有相对运动时, 两者  $dP/d\Omega = dP_p/d\Omega$  相等; 当“源”与“观察者”存在相对运动时, 如: 一般假设观察者不动, 源移动, 则  $dP/d\Omega \neq dP_p/d\Omega$ 。更多讨论可参考 §3.2。

### 定义 1.13. 立体角 (solid angle) $d\Omega$

参考图 1.2, 立体角的定义有

$$d\Omega \equiv \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{A}}{r^2} \Rightarrow \Delta\Omega = \frac{\Delta A_1}{r_1^2} = \frac{\Delta A_2 \cos \theta}{r_2^2} \quad (1.103)$$

对于以球坐标圆心的立体角, 有  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ 。

### 性质 1.4. 坡印廷向量与辐射功率的关系

坡印廷向量与“源”的辐射功率有如下关系

$$P = \iint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{S} = \iint (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \iint (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} \quad (1.104)$$

以上定义的坡印廷向量为时域量, 其电场、磁场为时域瞬时量。转换到频域之后, 有

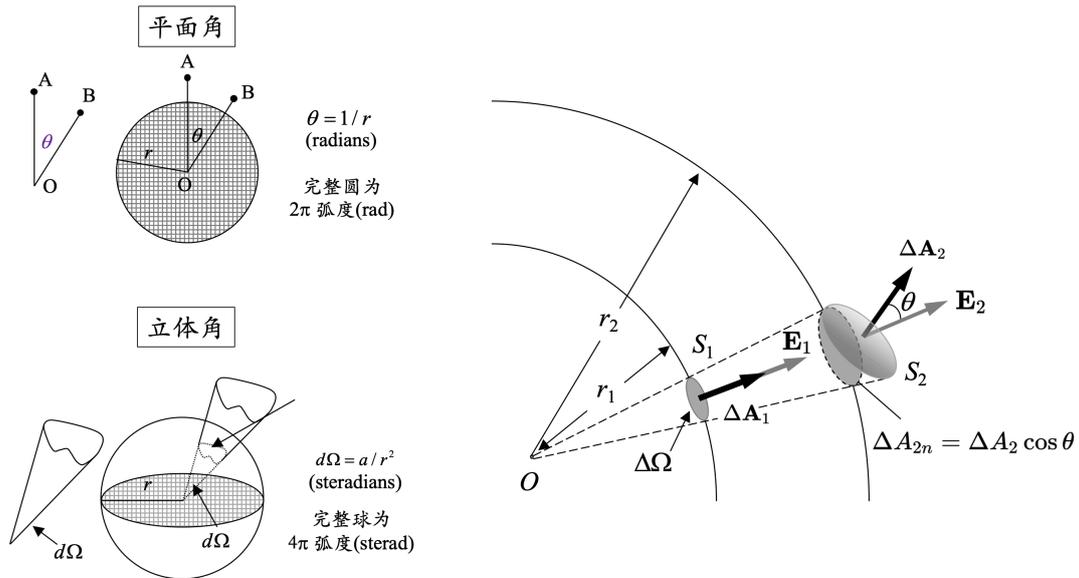


图 1.2: (上) 平面坐标系的极角 (polar angle)  $\theta$ , 又称顶角 (zenith angle); (下) 球坐标的立体角 (solid angle)  $d\Omega$ 。

对应的复坡印廷向量, 定义如下。

#### 定义 1.14. 复坡印廷向量 (complex Poynting vector) $\tilde{\mathbf{S}}$

定义复坡印廷向量为

$$\tilde{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^* \quad (1.105)$$

注 可以证明, 对时谐电磁场, 平均能流密度有

$$\mathbf{S}_{\text{ave}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) dt = \text{Re} \tilde{\mathbf{S}} \quad (1.106)$$

复坡印廷向量的实部表示时变电磁场在一个周期内的平均能流密度。这里  $\tilde{\mathbf{S}}$  本身不是时谐量。注意, 有些教科书写  $\mathbf{S}_{\text{ave}} = \text{Re}(\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^*)$ 。少了  $\frac{1}{2}$  的差异是由于对相量定义多了  $\sqrt{2}$  差异造成。

注  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} [\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t}]$ ,  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} [\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t}]$

练习 1.12 试通过证明  $\mathbf{S}_{\text{ave}} = \text{Re} \tilde{\mathbf{S}}$  熟悉时谐相量。

#### 定义 1.15. 电磁场能量体密度、动量体密度

能量体密度 (energy density) 定义为

$$w_{\text{EM}} = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) = \frac{\epsilon_0}{2} (E^2 + c^2 B^2) \quad (1.107)$$

其中, 电场能量密度为

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \int_{\mathbf{D}_0}^{\mathbf{D}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} \quad (1.108)$$

一般选  $\mathbf{D}_0 = 0$ 。

磁场能量密度为

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \int_{\mathbf{B}_0}^{\mathbf{B}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \quad (1.109)$$

一般选  $\mathbf{B}_0 = 0$ 。

动量体密度 (momentum density) 定义为

$$\mathbf{g}_{\text{EM}} = \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (1.110)$$

**注** 类似地, 一个周期内能量体密度平均有

$$w_{e,\text{ave}} = \frac{1}{2} \overline{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}} = \frac{1}{T} \int_0^T w_e(\mathbf{r}, t) dt = \frac{\epsilon}{4} \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}^* \quad (1.111)$$

$$w_{m,\text{ave}} = \frac{1}{2} \overline{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}} = \frac{1}{T} \int_0^T w_m(\mathbf{r}, t) dt = \frac{\mu}{4} \tilde{\mathbf{H}} \cdot \tilde{\mathbf{H}}^* \quad (1.112)$$

其中, 假设  $\tilde{\mathbf{E}} = \mathcal{E}(\mathbf{r})e^{-i\varphi_E}$ ,  $\tilde{\mathbf{H}} = \mathcal{H}(\mathbf{r})e^{-i\varphi_H}$ 。

**注** 有些教科书写  $w_{e,\text{ave}} = \frac{\epsilon}{2} \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}^*$ 、 $w_{m,\text{ave}} = \frac{\mu}{2} \tilde{\mathbf{H}} \cdot \tilde{\mathbf{H}}^*$ 。  $\frac{1}{2}$  的差异是由于对相量定义多了  $\sqrt{2}$  差异造成。 □

定义了坡印廷向量后, 根据 Maxwell 方程组, 对单位体积  $\mathcal{V}$  内的电磁场 (总) 能量对时间微分, 结合 Maxwell 方程组, 可以得到功率/能量平衡方程:

### 定理 1.12. 坡印廷定理 (Poynting theorem)

积分形式:

$$\frac{\partial W_{\text{EM}}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V w_{\text{EM}} d\mathcal{V} = - \oiint_A (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} - \iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\mathcal{V} \quad (1.113)$$

微分形式:

$$\frac{\partial w_{\text{EM}}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (1.114)$$

其中,

- $p = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$  称焦耳 (热) 功率密度。
- $\frac{\partial W_{\text{EM}}}{\partial t}$  的正负表征体积  $V$  内单位时间的电磁能量增加 ( $> 0$ ) 或减少 ( $< 0$ )。
- $\oiint_A (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$  为电磁能量从闭合面  $A$  流向外的功率 ( $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  又称能流密度)。
- $\iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\mathcal{V}$  为  $V$  内电场对电荷所做的功。
- 在导体中, 有  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \mathbf{E} / \rho_v$ , 则

$$\iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\mathcal{V} = \iiint_V \frac{J^2}{\sigma} d\mathcal{V} = \iiint_V \rho_v J^2 d\mathcal{V} \quad (1.115)$$

为体积  $V$  内传导电流产生的热功率 (恒  $\geq 0$ ), 其中,  $\rho_v$  为体电阻。

- 承上, 对时变场, 可利用表面电阻  $\rho_s$  估算功率损耗, 此时  $\mathbf{K} = \sigma_s \mathbf{E} = \mathbf{E} / \rho_s$ ,

有

$$\iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV = \rho_s \iint K^2 dS \geq 0 \quad (1.116)$$

其中,  $\iint(\dots)dS$  为表面积分。 □

### 性质 1.5. 坡印廷向量取值不具唯一性

对任意向量  $\mathbf{X}$ , 按如下方式定义坡印廷向量

$$\mathbf{S} = (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \nabla \times \mathbf{X} \quad (1.117)$$

仍然不影响以上定理结果, 说明坡印廷向量取值不具唯一性。

坡印廷向量的物理图像仍在, 但是绝对数值未必完全确立。事实上, 坡印廷向量不是实验上能直接观察到的物理量。

**证明** 感兴趣的读者可参考 U. Backhaus and K. Schafer, On the uniqueness of the vector for energy flow density in electromagnetic fields, AJP **54**, 279 (1986). <https://doi.org/10.1119/1.14646> □



**笔记** 在许多电磁学教科书中, 可以看到许多基于 Maxwell 方程得到的定理或结果。这些结果的形式各异, 但是推导不外乎有以下套路。首先, 先写下(微分形式的)麦克斯韦方程组。再来一般离不开以下几种数学操作:

- 等式两边取散度  $\nabla \cdot$
- 等式两边取旋度  $\nabla \times$
- 等式两边点乘 ( $\cdot$ ), 即  $\mathbf{E} \cdot$  或  $\mathbf{B} \cdot$ , 或在时谐向量中  $\tilde{\mathbf{E}} \cdot$  或  $\tilde{\mathbf{B}} \cdot$
- 等式两边叉乘 ( $\times$ ), 即  $\mathbf{E} \times$  或  $\mathbf{B} \times$ , 或在时谐向量中  $\tilde{\mathbf{E}} \times$  或  $\tilde{\mathbf{B}} \times$

举几个例子,

1. 对全电流定律等式两边取散度, 可得电荷-电流连续方程。
2. 对法拉第定律与全电流定律等式两边取旋度, 经过化简, 可得电磁波方程。
3.  $\mathbf{H} \cdot$ (法拉第定律)  $\pm \mathbf{E} \cdot$ (全电流定律), 可得坡印廷定理、Slater 定理等。

**练习 1.13** 作为复习, 试从 Maxwell 方程组推导坡印廷定理。

$$\frac{\partial W_{EM}}{\partial t} = - \oiint_A (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} - \iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV$$

■

坡印廷定理源于能量守恒, 在加速器束流动力学中可能应用在:

- 以“束团 + 真空区域(不包含管壁, 仅真空区域)”为系统, 等式左边为束团总能量与真空管内电磁场能量(包含射频场、库仑场等)之和; 等式右边第一项为真空管内束团产生的电磁场与外部馈入射频场,  $\mathbf{S}$  在金属管壁边界自真空区域指向金属管壁;

等式右边第二项为束团电流与周遭 (非自身产生的) 电磁场耦合携带的能量。参考图 1.3 (左)。

- 以“束团”为系统, 等式左边为束团中所有粒子总能量; 等式右边第一项为束团由于某些原因产生或导致的场 (包含电场、磁场、电磁辐射等),  $\mathbf{S}$  自束团边界指向外; 等式右边第二项为束团内 (非辐射) 空间电荷场携带的能量。
- ⇒ 等式右边第二项也可以移到等式左边, 重新定义束团总能量为束团粒子总能量与库仑场能量之和。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \sum_i^N \gamma_i m c^2 + \iiint_V dV \left( \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right) \right] = - \oiint_S \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dS$$

- 以“金属真空管壁”为系统, 等式左边为随时间损耗的电磁能量; 等式右边第一项为金属导体内能流, 由于趋肤效应, 当封闭面取较大时, 能流密度将趋近于零; 等式右边第二项为金属管壁上由于磁场/电场引起的传导电流 (不是束团电流) 与管壁表面附近的电场一起导致的焦耳热效应。参考图 1.3 (右)。

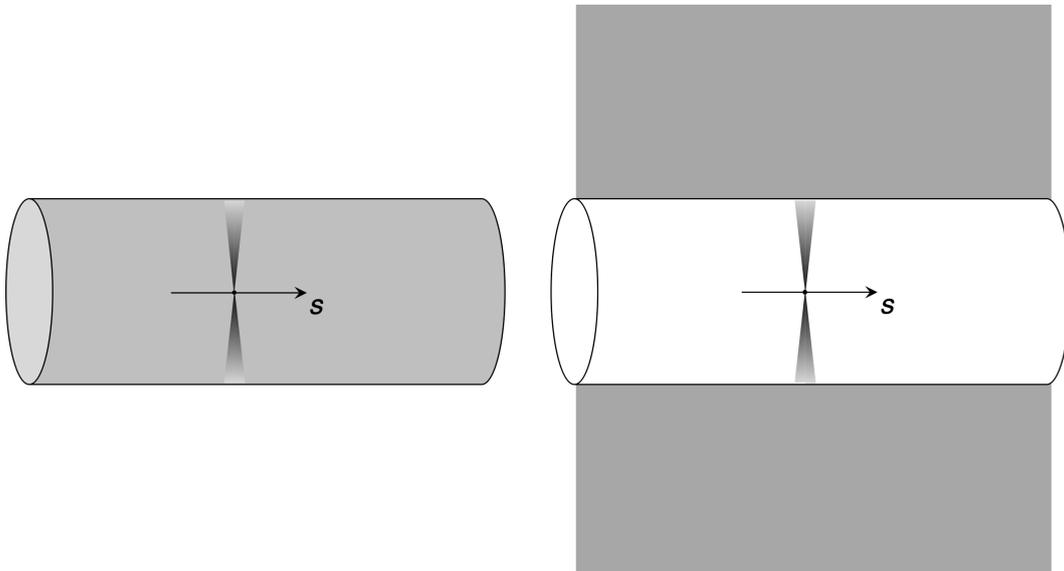


图 1.3: 应用坡印廷定理的两种观点。左图积分区域为真空区域, 右图积分区域为金属导体。

**笔记** 在加速器束流动力学分析中, 如果考虑线性动力学, 如自由电子激光线性 (或指数) 增益区间的动力学过程, 一般较少用到能量守恒。如果考虑低增益或饱和以后的动力学过程, 那么能量守恒则可作为约束条件使用。对已经读过此讲义或不是初学者的读者, 可以参考第 10 章介绍的 Madey 定理。

**练习 1.14** 以上介绍的坡印廷定理不考虑媒质的色散效应 (§1.10 将介绍), 如果考虑媒质存在色散, 则坡印廷定理形式将变得复杂地多, 其介电系数与磁导率皆为频率的函数。感兴趣的读者可试着讨论此一情况。 ■

**解** 参考 J.D. Jackson 的 §6.8。对时变电磁场有中心频率  $\omega_0$  的情况, 在物质中的坡印廷定

理有

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{\text{eff}}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = & -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} - \omega_0 \text{Im} \epsilon(\omega_0) \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle \\ & - \omega_0 \text{Im} \mu(\omega_0) \langle \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \rangle \end{aligned} \quad (1.118)$$

其中,

$$w_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \frac{d(\omega \epsilon)}{d\omega}(\omega_0) \right] \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle + \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \frac{d(\omega \mu)}{d\omega}(\omega_0) \right] \langle \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \rangle \quad (1.119)$$

■

## 1.6 求解电磁波方程：思路

大二电磁学课程学过，求解电磁波方程可以拆解为波动问题与波形问题。先将三维向量形式的时域瞬时场写为时谐相量表示，有

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x, y, z, t) &= \mathcal{E}_x \cos(\omega t + \varphi_x) \mathbf{e}_x + \mathcal{E}_y \cos(\omega t + \varphi_y) \mathbf{e}_y + \mathcal{E}_z \cos(\omega t + \varphi_z) \mathbf{e}_z \\ &\equiv \operatorname{Re} \left( \tilde{\mathbf{E}} e^{-i\omega t} \right)\end{aligned}\quad (1.120)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(x, y, z, t) &= \mathcal{H}_x \cos(\omega t + \varphi_x) \mathbf{e}_x + \mathcal{H}_y \cos(\omega t + \varphi_y) \mathbf{e}_y + \mathcal{H}_z \cos(\omega t + \varphi_z) \mathbf{e}_z \\ &\equiv \operatorname{Re} \left( \tilde{\mathbf{H}} e^{-i\omega t} \right)\end{aligned}\quad (1.121)$$

时谐场满足向量电磁波方程

$$\begin{cases} \nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} + \omega^2 \mu \epsilon_c \tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0} \\ \nabla^2 \tilde{\mathbf{H}} + \omega^2 \mu \epsilon_c \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{0} \end{cases}\quad (1.122)$$

此式毕竟还是向量方程，需要每个分量分别地、独立地求解。还能再简化吗？可以（万幸！）。下面将进一步阐述化简过程，这里我们不卖关子，先将上面方程的解按如下方式“拆解”，以电场为例，磁场亦同

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}(x, y, z) &= \tilde{\mathcal{E}}(x, y) \tilde{Z}(z) \\ &= \left[ \tilde{\mathcal{E}}_x(x, y) \mathbf{e}_x + \tilde{\mathcal{E}}_y(x, y) \mathbf{e}_y + \tilde{\mathcal{E}}_z(x, y) \mathbf{e}_z \right] \tilde{Z}(z) \\ &= \tilde{\mathcal{E}}_{\perp}(x, y) \tilde{Z}(z) + \tilde{\mathcal{E}}_z(x, y) \tilde{Z}(z) \mathbf{e}_z\end{aligned}\quad (1.123)$$

下面我们会需要将此拆解的形式代入向量电磁波方程，其中，拉普拉斯算子也可以拆解写成  $\nabla^2 = \nabla_{\perp}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 。下面将在这种形式的基础上进一步化简  $\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} + \omega^2 \mu \epsilon_c \tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$ 。讨论将分为两个方面：

- **波动问题  $\tilde{Z}(z)$** ：研究电磁波沿传播方向的行波、驻波以及与负载的匹配等传播方式问题。
- **波形问题  $\tilde{\mathcal{E}}_{\perp}(x, y)$** ：研究电磁波在垂直传播方向的横截面内的分布规律，也就是场结构或场模式。

一种漂亮的、系统的、标准的分解问题的思路。

按此拆解方式分析问题后，完整的时谐电磁场的解就可以由“波动因子  $\tilde{Z}(z)$ ”与“波形因子  $\tilde{\mathcal{E}}_{\perp}(x, y)$ ”构建出来。瞬时电磁场的解则可以通过时谐相量变换得到。从分析的角度看，这是一种“解耦”。

## 1.7 求解电磁波方程：波动问题

波怎么动、怎么沿传播方向演化，这是这一节讨论的重点。目标是通过化简，得到  $\tilde{Z}(z)$  应该满足的运动方程，并得到其通解<sup>14</sup>。

将  $\tilde{\mathbf{E}}(x, y, z) = \tilde{\mathbf{E}}_{\perp}(x, y)\tilde{Z}(z) + \tilde{E}_z(x, y)\tilde{Z}(z)\mathbf{e}_z$  代入向量波方程后，有

$$\nabla_{\perp}^2 \tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{E}} \left( \frac{1}{\tilde{Z}} \frac{\partial^2 \tilde{Z}}{\partial z^2} \right) + \omega^2 \mu \epsilon_c \tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0} \quad (1.124)$$

求解此方程分两步，先令上式括弧中的  $\frac{1}{\tilde{Z}} \frac{\partial^2 \tilde{Z}}{\partial z^2} \equiv \Gamma^2$ ，得波动因子满足

$$\frac{d^2}{dz^2} \tilde{Z}(z) - \Gamma^2 \tilde{Z}(z) = 0 \quad (1.125)$$

其中， $\Gamma$  称复传播常数<sup>15</sup>，后面将进一步说明。上式通解有

$$\tilde{Z}(z) = A^+ e^{-\Gamma z} + A^- e^{\Gamma z} = A^+ e^{ikz} + A^- e^{-ikz} \quad (1.126)$$

其中，复传播常数  $\Gamma = \alpha - i\beta$ ， $\alpha$  称为衰减常数， $\beta$  为相位常数或波数。上面第一项 ( $A^+$ ) 沿  $+z$  传播，第二项 ( $A^-$ ) 沿  $-z$  传播。

由此可知，时谐电磁场的传播动力学有  $e^{\mp\Gamma z}$  或  $e^{\pm ikz}$  形式。此外，如果要电磁波能够顺利传播， $\Gamma = \alpha - i\beta$  就要是纯虚数，即  $\Gamma = -i\beta$  或要求  $k \equiv i\Gamma = \beta$  为纯实数。此时对应的解称行波 (traveling wave) 解。如果  $\Gamma$  为纯实数，即  $\Gamma = \alpha$ ，或  $k \equiv i\Gamma = i\alpha$  为纯虚数，那么是凋落波 (evanescent wave)<sup>16</sup>，随  $z$  指数衰减，将无法传输。如果  $\Gamma$  或  $k$  同时存在非零的实部与虚部，则为衰减的行波 (decayed traveling wave)。

### 定义 1.16. 截止 $\Leftrightarrow \Gamma = 0, k = 0$

当一时变电磁场不再传播时，称截止 (cutoff)。根据以上形式的色散关系，此时对应  $\Gamma = 0$  或  $k = 0$ ，反之亦然。 □

$\Gamma$  或  $k$  怎么决定呢？决定  $\Gamma$  或  $k$  需要先知道物质的色散关系，下一节马上接着讨论。一般来说，在电磁装置 (如：波导尺寸) 或传输环境参量 ( $\epsilon, \mu$ ) 都知道之后， $\Gamma$  或  $k$  为电磁波频率  $\omega$  的函数。

结束这一节前，提一下以前高中或大学物理学过的一个概念：波数  $\beta$  (或  $k$ )。考虑无衰减情况，则  $\beta = k = 2\pi/\lambda$ 。当电磁波为定向传播时，总是可以找到并定义一个方向  $z$  为波的传播方向，于是这里的  $\beta$  或  $k$  就平行于这个  $z$  方向。有些读者可能会问，如果因为一些原因，坐标系的  $z$  轴不与电磁波定向传播方向  $z$  一致，那怎么办？此时， $\beta$  或  $k$  的“方向”就要写明了，一般写成  $\boldsymbol{\beta}$  或  $\mathbf{k}$ ，称波向量 (或波矢, wave vector)。那对应的“波长” $\lambda$

<sup>14</sup>注意，不要与第 11 章介绍的阻抗符号  $Z_{\parallel, \perp}(\omega)$  搞混。这里的波动因子符号的头顶上带“波浪”符号  $\tilde{Z}(z)$ 。

<sup>15</sup>按 §0.2 惯例，如果用  $k$  表示，则  $\Gamma = -ik$ 。

<sup>16</sup>称呼不一，有些文献称渐逝波、消逝波、消散波、倏逝波、衰逝波等。

怎么量化？还是标量或纯量吗？“波长有方向”的图像在这里要修正/推广：此时我们不直接写成  $2\pi/\lambda$ ，而是先赋予波向量一个物理图像（参考图 1.4），视为电磁波相位的最大变化方向，即电磁波相位的梯度，有

$$\mathbf{k} = \nabla_{\mathbf{r}}\phi(\mathbf{r}, t) \quad (1.127)$$

其中， $\phi(\mathbf{r}, t)$  为电磁波相位函数。当波传播方向与  $z$  一致时，波经历一个完整波长的振荡，相位累积  $2\pi$ ，即  $\mathbf{k} = \nabla_{\mathbf{r}}\phi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \partial(z, t)\phi/\partial z = 2\pi/\lambda$ 。

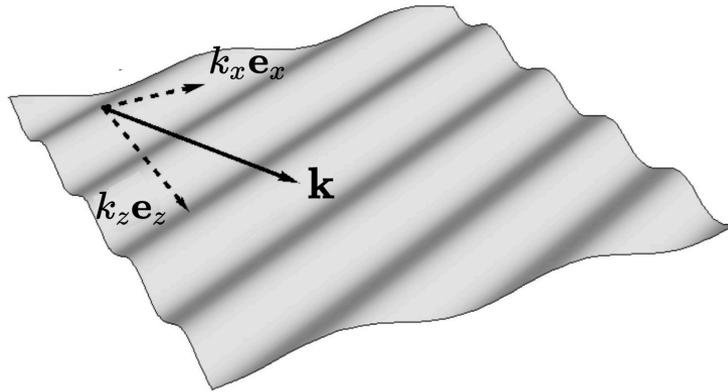


图 1.4: 波向量。

## 1.8 求解电磁波方程：波形问题

波长什么样、横向、纵向的形状或分布函数是什么，这是这一节讨论的重点。确立了波动因子形式  $\frac{\partial^2 \tilde{Z}(z)}{\partial z^2} = \Gamma^2$  之后，波形因子  $\tilde{\mathcal{E}}(x, y)$  需要满足的方程就能自然而然得到，根据 Eq. (1.124)，有

$$\nabla_{\perp}^2 \tilde{\mathcal{E}}(x, y) + (\omega^2 \mu \epsilon_c + \Gamma^2) \tilde{\mathcal{E}}(x, y) = 0 \quad (1.128)$$

注意， $\tilde{\mathcal{E}}(x, y)$  有三个方向， $\epsilon_c = \epsilon + i\frac{\sigma}{\omega}$  为复介电系数。此处定义一个重要参数，称截止波数  $K_c$ ，满足

$$K_c^2 \equiv \omega^2 \mu \epsilon_c + \Gamma^2 \quad (1.129)$$

此式又称电磁波所在物质的色散关系。

**注** 在这里引入  $K_c^2$  具有后见之明，此时不妨先把这个色散关系记起来，有助于对后面介绍波导时的理解。

### 定理 1.13. 电磁波色散关系

按  $e^{-\Gamma z} = e^{ikz}$  表示往  $+z$  方向传播，则电磁波色散关系有

$$\Gamma^2(\omega) = -k^2 = K_c^2 - \omega^2 \mu \epsilon_c \quad (1.130)$$

其中，

- 传播常数为复数  $\Gamma(\omega) = \alpha(\omega) - i\beta(\omega)$ ，实部表征衰减，虚部表征传播。
- 如果写为复数  $k$ ，则有  $k(\omega) = i\Gamma = \beta + i\alpha$ ，实部表征传播，虚部表征衰减。
- $\beta$  为波数或称相位常数， $e^{i\beta z}$  表示往  $+z$  方向传播。
- 复介电系数  $\epsilon_c = \epsilon \left(1 + i\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right) = \epsilon + i\frac{\sigma}{\omega}$ ， $\sigma$  为电导率，可能为频率的函数。
- $K_c$  为截止波数。对 TE/TM 波而言，由结构的横向几何尺寸决定。对 TEM 波而言， $K_c \equiv 0$ 。

**证明** 将时域波方程变换到频域，利用时谐形式  $e^{-i\omega t}$  表示，有  $\partial/\partial t \leftrightarrow -i\omega$ 。

**注** 与  $e^{j\omega t}$  比较，留意不同惯例的区别。 □

以下将求解波形问题涉及的方程

$$\nabla_{\perp}^2 \tilde{\mathcal{E}}(x, y) + \underbrace{(\omega^2 \mu \epsilon_c + \Gamma^2)}_{K_c^2} \tilde{\mathcal{E}}(x, y) = 0 \quad (1.131)$$

其中，电场函数  $\tilde{\mathcal{E}}(x, y)$  包含三个方向的场分量，但函数依存关系已经排除了时谐项  $e^{-i\omega t}$ ，且排除了波动因子  $e^{ikz}$  项后，仅存与  $(x, y)$  的函数依存关系。

继续讨论前，先整理一下目前使用的符号：

**定义 1.17. 时谐形式表示**

定义沿  $+z$  方向传播的电磁场的时谐形式为

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{E}}(x, y, z; \omega) = \tilde{\mathcal{E}}(x, y; \omega)e^{ikz} \\ \tilde{\mathbf{H}}(x, y, z; \omega) = \tilde{\mathcal{H}}(x, y; \omega)e^{ikz} \end{cases} \quad (1.132)$$

时域瞬时量有

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z, t) &= \text{Re } \tilde{\mathbf{E}}(x, y, z; \omega)e^{-i\omega t} \\ \mathbf{H}(x, y, z, t) &= \text{Re } \tilde{\mathbf{H}}(x, y, z; \omega)e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (1.133)$$

□

以上波形因子  $\tilde{\mathcal{E}}(x, y)$  的方程还可以继续拆解成横向与纵向分量。对电场而言，有

$$\nabla_{\perp}^2 \begin{Bmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_{\perp}(x, y) \\ \tilde{\mathcal{E}}_z(x, y) \end{Bmatrix} + K_c^2 \begin{Bmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_{\perp}(x, y) \\ \tilde{\mathcal{E}}_z(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.134)$$

对磁场而言，有

$$\nabla_{\perp}^2 \begin{Bmatrix} \tilde{\mathcal{H}}_{\perp}(x, y) \\ \tilde{\mathcal{H}}_z(x, y) \end{Bmatrix} + K_c^2 \begin{Bmatrix} \tilde{\mathcal{H}}_{\perp}(x, y) \\ \tilde{\mathcal{H}}_z(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.135)$$

学过微分方程的读者应该知道，这里  $K_c^2$  的正负号将决定了解的性质，即决定了电磁场的特性，因此，截止波数  $K_c$  是一个非常重要的参数。

**笔记** 以上  $\nabla_{\perp}^2$  可视为一种算子（或视为一矩阵），学过线性代数与微分方程的读者或许已经看出  $K_c^2$  为如上线性方程的特征值，而  $\tilde{\mathbf{E}}(x, y, z; \omega)$  为特征向量或特征基底函数。

上面介绍了复传播常数  $\Gamma = -ik$  与截止波数  $K_c$ ，还有电磁波频率  $\omega$  等，到底谁决定谁？以下图 1.5 表示三个参数之间关系。

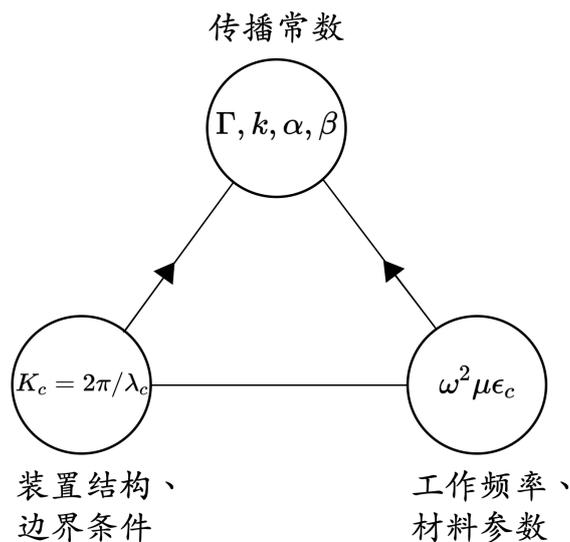


图 1.5: 三个传播参数之间的关系，由色散关系  $\Gamma^2(\omega) = -k^2 = K_c^2 - \omega^2\mu\epsilon_c$  联系。

$K_c$  由电磁装置结构给定， $\omega$  由输入信号给定， $\Gamma$  则是决定电磁波在装置中的传播行为。

关于波形的问题其实就是围绕截止波数  $K_c$  来研究，关于波动的问题就是围绕传播常数  $\Gamma$  来研究，而这两个参数是有关系的，也就是说波形和波动实际是互相关联的。

回到化简后的波形因子方程。对电场而言，有

$$\nabla_{\perp}^2 \begin{Bmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_{\perp}(x, y) \\ \tilde{\mathcal{E}}_z(x, y) \end{Bmatrix} + K_c^2 \begin{Bmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_{\perp}(x, y) \\ \tilde{\mathcal{E}}_z(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.136)$$

现在怎么进一步“化简”这个方程<sup>17</sup>？思路非常漂亮，即，设法将横向波形解  $\tilde{\mathcal{E}}_{\perp}$  以纵向波形解  $\tilde{\mathcal{E}}_z$  表示。或者说，尝试将  $\tilde{\mathcal{E}}_{\perp}$  写成横向波形的一种函数形式，即  $\tilde{\mathcal{E}}_{\perp} = f(\tilde{\mathcal{E}}_z, \tilde{\mathcal{H}}_z)$ 。能做到吗？可以，而且不仅可以，形式还是线性的。

回顾一下此处介绍的求解波形问题过程的一般方法。首先，利用时谐场表示，将波方程从时域变换到频域。接着，利用波动因子  $e^{\pm\Gamma z} = e^{\mp ikz}$  将  $(x, y)$  与  $z$  解耦；再利用横纵向波形因子将  $\tilde{\mathcal{E}}_{x,y}, \tilde{\mathcal{H}}_{x,y}$  与  $\tilde{\mathcal{E}}_z, \tilde{\mathcal{H}}_z$  解耦。以下定理告诉我们横向波形解  $\tilde{\mathcal{E}}_{\perp}, \tilde{\mathcal{H}}_{\perp}$  可以用纵向波形解  $\tilde{\mathcal{E}}_z, \tilde{\mathcal{H}}_z$  表示。由此，求解三个方向分量的波形问题经过层层化简，成为求解纵向波形  $\tilde{\mathcal{E}}_z(x, y)$  问题了。

#### 定理 1.14. 波形因子的横向解可用纵向解表示

已知  $\tilde{\mathcal{E}}_z, \tilde{\mathcal{H}}_z$  不全为 0，通过法拉第电磁感应定律 ( $\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = i\omega\mu\tilde{\mathbf{H}}$ ) 与全电流定律 ( $\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = -i\omega\epsilon_c\tilde{\mathbf{E}}$ )，有

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{E}}_x(x, y; \omega) = \frac{i}{K_c^2} \left( \omega\mu \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}_z}{\partial y} + k \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}_z}{\partial x} \right) \\ \tilde{\mathcal{E}}_y(x, y; \omega) = \frac{i}{K_c^2} \left( -\omega\mu \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}_z}{\partial x} + k \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}_z}{\partial y} \right) \\ \tilde{\mathcal{H}}_x(x, y; \omega) = \frac{i}{K_c^2} \left( -\omega\epsilon_c \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}_z}{\partial y} + k \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}_z}{\partial x} \right) \\ \tilde{\mathcal{H}}_y(x, y; \omega) = \frac{i}{K_c^2} \left( \omega\epsilon_c \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}_z}{\partial x} + k \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}_z}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (1.137)$$

 **练习 1.15** 试证明此定理。 ■

**注** 多数时候， $\tilde{\mathcal{E}}_z, \tilde{\mathcal{H}}_z$  不全为零。当  $\tilde{\mathcal{E}}_z = 0, \tilde{\mathcal{H}}_z = 0$  时，称 TEM 波（下一节将给出定义）。对 TEM 波，存在横向分量场的前提条件是  $K_c = 0$ ，因此有截止波数  $K_c = 0$ 。或者，TEM 波没有截止频率  $\omega_c = 0$ 。截止波数与截止频率的概念在后面 §1.12 将介绍。

<sup>17</sup>注意，这里还不是怎么“解”这个方程，而是怎么“化简”。

在直角坐标系下，将以上定理结果写成矩阵形式，有

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_x \\ \tilde{\mathcal{E}}_y \\ \tilde{\mathcal{H}}_x \\ \tilde{\mathcal{H}}_y \end{pmatrix} = -\frac{1}{K_c^2} \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & 0 & -i\omega\mu \\ 0 & \Gamma & i\omega\mu & 0 \\ 0 & i\omega\epsilon_c & \Gamma & 0 \\ -i\omega\epsilon_c & 0 & 0 & \Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}_z}{\partial y} \\ \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}_z}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (1.138)$$

如果尝试导出在圆柱坐标下的结果并写成矩阵形式，会发现变换矩阵形式不变。

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_\rho \\ \tilde{\mathcal{E}}_\phi \\ \tilde{\mathcal{H}}_\rho \\ \tilde{\mathcal{H}}_\phi \end{pmatrix} = -\frac{1}{K_c^2} \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & 0 & -i\omega\mu \\ 0 & \Gamma & i\omega\mu & 0 \\ 0 & i\omega\epsilon_c & \Gamma & 0 \\ -i\omega\epsilon_c & 0 & 0 & \Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}_z}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}_z}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}_z}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}_z}{\partial \phi} \end{pmatrix} \quad (1.139)$$

事实上，对于任意正交坐标系，变换矩阵形式同上。

既然独立于坐标系，那么也可以写成更简洁、紧凑的形式如下：

#### 定理 1.15. 波方程横向解与纵向解

对定向传播的波方程，横向解可以用纵向解表示

$$\tilde{\mathcal{E}}_\perp = \frac{i}{(\mu\epsilon_c\omega^2 - k^2)} \left[ k\nabla_\perp \tilde{\mathcal{E}}_z - \omega\mathbf{e}_z \times \nabla_\perp \tilde{\mathcal{B}}_z \right] \quad (1.140)$$

$$\tilde{\mathcal{B}}_\perp = \frac{i}{(\mu\epsilon_c\omega^2 - k^2)} \left[ k\nabla_\perp \tilde{\mathcal{B}}_z + \mu\epsilon_c\omega\mathbf{e}_z \times \nabla_\perp \tilde{\mathcal{E}}_z \right] \quad (1.141)$$

**注** 这里场的函数依存关系我们没有明显写出，保留了以上形式的一般性。对直角坐标，有  $\tilde{\mathcal{E}}_\perp(x, y), \tilde{\mathcal{B}}_\perp(x, y), \tilde{\mathcal{E}}_z(x, y), \tilde{\mathcal{H}}_z(x, y)$ 。对圆柱坐标，有  $\tilde{\mathcal{E}}_\perp(\rho, \phi), \tilde{\mathcal{B}}_\perp(\rho, \phi), \tilde{\mathcal{E}}_z(\rho, \phi), \tilde{\mathcal{H}}_z(\rho, \phi)$ 。

**注** 上面定理适用于 TE 或 TM 波。对 TEM 波， $\tilde{\mathcal{E}}_z = 0, \tilde{\mathcal{B}}_z = 0$ ，由上面定理知，恒有  $K_c = \mu\epsilon_c\omega^2 - k^2 = 0$ 。 □

这一节关于波形的问题的讨论在这个定理告一段落。对波形问题的求解，最终化简为求解纵向波形函数的波方程，即

$$\nabla_\perp^2 \begin{Bmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_z(x, y) \\ \tilde{\mathcal{H}}_z(x, y) \end{Bmatrix} + K_c^2 \begin{Bmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_z(x, y) \\ \tilde{\mathcal{H}}_z(x, y) \end{Bmatrix} = 0 \quad (1.142)$$

求得波形因子后，结合波动因子，则能得到场的完整解。



**笔记** 纵向波形因子的求解一般采用分离变量法。后续场的求解步骤可总结如下：

$$\left( \tilde{\mathcal{E}}_z, \tilde{\mathcal{H}}_z \right) \Rightarrow \left( \tilde{\mathcal{E}}_\perp, \tilde{\mathcal{H}}_\perp \right) \Rightarrow \tilde{Z}(z) \Rightarrow \left( \tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}} \right) \Rightarrow \left( \mathbf{E}, \mathbf{H} \right)$$

## 1.9 电磁波定向传播的几个类型

由上一节最后的定理知，横向波形解  $\tilde{\mathcal{E}}_{\perp}, \tilde{\mathcal{H}}_{\perp}$  可以用纵向波形解  $\tilde{\mathcal{E}}_z, \tilde{\mathcal{H}}_z$  表示，并且可以写成矩阵形式。为了能够系统地分析，我们将所有可能解得的纵向波形完备地分为以下三类。参考图 1.6。

### 定义 1.18. 电磁波为横波，可分 TM, TE, TEM 波

根据边界条件与传播方向(假设  $z$ )，有

- 横磁波 (TM):  $E_z \neq 0, H_z = 0$ 。
- 横电波 (TE):  $E_z = 0, H_z \neq 0$ 。
- 横电磁波 (TEM):  $E_z = 0, H_z = 0$ 。

**注** 早期文献中，有时 TM 波又称 E 波，TE 波又称 H 波。

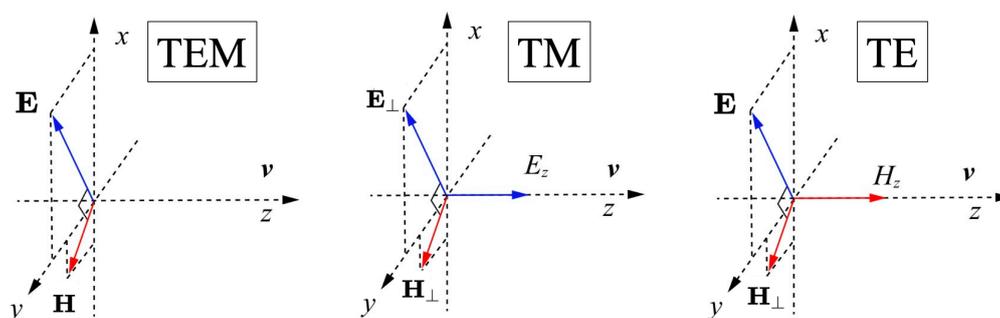


图 1.6: 三种常见的定向传播电磁波。

这三类电磁波传播模式与特性会根据环境媒质的特性与电磁场频率不同而各异。这种差异可通过定义对应模式的“波阻抗”来量化。

### 定义 1.19. TM, TE, TEM 波阻抗

根据以上定义，有

- 横磁波 (TM):  $E_z \neq 0, H_z = 0$

$$Z_{\text{TM}}(\omega) \equiv \frac{\mathbf{e}_z \times \tilde{\mathcal{E}}_{\perp}}{\tilde{\mathcal{H}}_{\perp}} = \frac{\tilde{\mathcal{E}}_x}{\tilde{\mathcal{H}}_y} = \frac{\Gamma}{-i\omega\epsilon_c} = \eta\sqrt{1 - \frac{f_c^2}{f^2}} \quad [\text{SI 单位: } \Omega] \quad (1.143)$$

- 横电波 (TE):  $E_z = 0, H_z \neq 0$

$$Z_{\text{TE}}(\omega) \equiv \frac{\tilde{\mathcal{E}}_{\perp}}{\tilde{\mathcal{H}}_{\perp} \times \mathbf{e}_z} = \frac{\tilde{\mathcal{E}}_x}{\tilde{\mathcal{H}}_y} = \frac{-i\omega\mu}{\Gamma} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \frac{f_c^2}{f^2}}} \quad [\text{SI 单位: } \Omega] \quad (1.144)$$

- 横电磁波 (TEM):  $E_z = 0, H_z = 0$

$$Z_{\text{TEM}}(\omega) \equiv \frac{\mathbf{e}_z \times \tilde{\mathcal{E}}_{\perp}}{\tilde{\mathcal{H}}_{\perp}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}} \stackrel{\sigma=0}{=} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \equiv \eta \quad [\text{SI 单位: } \Omega] \quad (1.145)$$

其中， $\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{H}}$  为电场、磁场的波形函数。

截止  $\Leftrightarrow \Gamma = 0$ 。

**注** 早期文献中，有时 TM 波又称 E 波，TE 波又称 H 波。 □

最简单、最常用的定向传播电磁波模型为均匀平面电磁波，又称 TEM 波，其场形可总结如下：

#### 定理 1.16. 均匀平面电磁波的解

在自由空间中，最简单的定向传播电磁波为均匀平面电磁波。假设波传播方向为  $+z$ ，场的时谐形式可写成

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}(x, y, z; \omega) &= \tilde{\mathcal{E}}(x, y; \omega)e^{ikz} = \tilde{\mathcal{E}}_0(\omega)e^{ikz} \\ \tilde{\mathbf{H}}(x, y, z; \omega) &= \tilde{\mathcal{H}}(x, y; \omega)e^{ikz} = \tilde{\mathcal{H}}_0(\omega)e^{ikz} \\ &= \frac{\mathbf{e}_z \times \tilde{\mathcal{E}}_0(\omega)}{\eta} e^{ikz} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \mathbf{e}_z \times \tilde{\mathcal{E}}_0(\omega) e^{ikz}\end{aligned}\quad (1.146)$$

其中， $\omega = kc$ ， $\tilde{\mathcal{E}}(x, y; \omega) = \tilde{\mathcal{E}}_0(\omega)$  为波形因子， $e^{ikz}$  为波动因子。转换到时域瞬时量，可利用以下关系

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[ \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \right], \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[ \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \right] \quad (1.147)$$

如果写成分量形式，有

$$\begin{aligned}E_y(z, t) &= E_0 \cos(kz - \omega t) \\ H_x(z, t) &= H_0 \cos(kz - \omega t) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 \cos(kz - \omega t) = \frac{E_0}{\eta} \cos(kz - \omega t)\end{aligned}\quad (1.148)$$

对平面电磁波，有

$$\frac{E_y}{H_x} = \frac{E_0}{H_0} = \eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}, \quad \frac{E_y}{B_x} = \frac{E_0}{B_0} = c \quad (1.149)$$

场形如图 1.7 给出。

坡印廷向量有  $\mathbf{S} = S\mathbf{e}_z$ ，其中

$$S = E_y H_x = \frac{E_0^2}{\eta} \cos^2(kz - \omega t) \quad (1.150)$$

取周期平均后，有

$$\langle S \rangle = \frac{E_0^2}{2\eta} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 = c w_{e, \text{ave}} \quad (1.151)$$

**注** §1.4 介绍过，均匀平面电磁波的位函数解有  $\tilde{\mathbf{A}}(x, y, z; \omega) = \tilde{\mathbf{A}}_0(\omega) e^{ikz}$  或  $\mathbf{A}(x, y, z; t) = \text{Re} \left[ \tilde{\mathbf{A}}_0(\omega) e^{ikz - i\omega t} \right]$ 。 □

以上定义的这些满足电磁波方程的波形解之间在理想情况下，会满足一些良好特性。这些特性在后面讨论波导特性时是有帮助的。下面总结这些波形解的正交性与完备性。

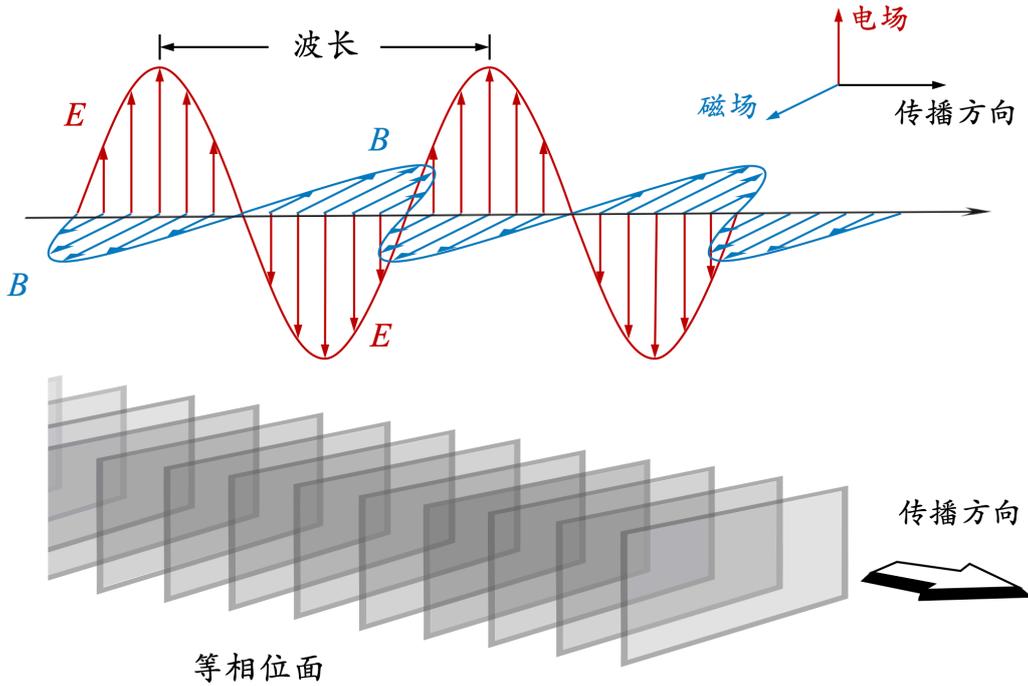


图 1.7: 均匀平面电磁波。上图为电场、磁场随空间振荡, 传播方向按右手定则, 为  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 。下图为均匀平面电磁波在每个不同纵向位置横截面上的相位示意图, 每个切片横截面具有明确相位。

**定理 1.17. 正交性 (orthogonality)、完备性 (completeness)**

假设无源无损波导中有任意两个模, 第  $m$  个模的场为  $\mathbf{E}_m, \mathbf{H}_m$ , 第  $n$  个模的场为  $\mathbf{E}_n, \mathbf{H}_n$ ,  $A$  为垂直于传播方向的横截面。有以下波导正规模的正交性

$$\begin{cases} \iint_A \tilde{\mathbf{E}}_{\perp,m}(\mathbf{r}_{\perp}) \times \tilde{\mathbf{H}}_{\perp,n}^*(\mathbf{r}_{\perp}) \cdot d\mathbf{S} = \delta_{mn} \\ \iint_A \tilde{\mathbf{E}}_{\perp,m}(\mathbf{r}_{\perp}) \cdot \tilde{\mathbf{H}}_{\perp,n}^*(\mathbf{r}_{\perp}) d\mathbf{S} = \delta_{mn} \end{cases} \quad (1.152)$$

与完备性

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\perp} = \sum_m \sum_n a_{mn} \tilde{\mathbf{E}}_{\perp,m}^{\text{TE}}(\mathbf{r}_{\perp}) + \sum_m \sum_n b_{mn} \tilde{\mathbf{E}}_{\perp,m}^{\text{TM}}(\mathbf{r}_{\perp}) \quad (1.153)$$

- 任两个正交模, 其总复功率为个别复功率相加

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \frac{1}{2} \iint_A (\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^*) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\mathbf{S} \\ &= \frac{1}{2} \iint_A \left[ \tilde{\mathbf{E}}_m \times \tilde{\mathbf{H}}_m^* + \tilde{\mathbf{E}}_n \times \tilde{\mathbf{H}}_n^* + \tilde{\mathbf{E}}_m \times \tilde{\mathbf{H}}_n^* + \tilde{\mathbf{E}}_n \times \tilde{\mathbf{H}}_m^* \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} d\mathbf{S} \\ &= \frac{1}{2} \tilde{P}_m + \frac{1}{2} \tilde{P}_n \end{aligned} \quad (1.154)$$

- 对同一个模  $m$  而言,  $\text{TE}_m$  模与  $\text{TM}_m$  模恒正交。
- 对不同模  $m \neq n$  而言, 在非简并 (non-degenerate, 即  $k_{z,m} \neq k_{z,n}$ ) 情况下,  $\text{TE}_{m,n}$  模与  $\text{TM}_{m,n}$  模恒正交。
- 简并模间 一般不正交<sup>a</sup>, 但可通过格拉姆-施密特 (Gram-Schmidt) 正交化找到一组正交基底模。

**证明** 参考 R. E. Collin, Field Theory of Guided Waves, 2nd ed., IEEE Press (1991) 一

书的 §11.7。

“一般不”正交，并不是说“总不”正交。比如：对方形波导， $TE_{01}$  与  $TE_{10}$  为简并模，同时也正交。 □



**笔记** 对于简并、有损耗的情况，结果还一样吗？

## 1.10 波速

实际情况，电磁波带有相位、波包（电磁波含多个频率时）、能流等信息，各别传播速度未必相同。差异主要体现在电磁波在色散媒质（dispersive medium）传播时。

### 定义 1.20. 相速、群速、能速、信号速度

电磁波在介质中的传递速度可能不只一种。当电磁波传播常数写成  $\Gamma(\omega) = \alpha - i\beta$  或  $k(\omega) = i\Gamma = \beta + i\alpha$  时，以下为几种常见的波速定义

- 相速 (phase velocity): 具有频率  $\omega$  的波的等相位面运动速度  $\Rightarrow v_p(\omega) \equiv \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\beta(\omega)}$
- 群速 (group velocity): 具有多个频率形成的波包运动速度  $\Rightarrow$  在某一特定频率  $\omega_0$  下 (如, 中心频率),  $v_g(\omega_0) \equiv \left. \frac{\partial \omega}{\partial \beta(\omega)} \right|_{\omega_0} = \left( \left. \frac{\partial \beta(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} \right)^{-1}$
- 能速 (energy velocity): 具有频率  $\omega$  的波, 在一个周期内, 具有能量体密度  $w_{EM,ave} = w_{e,ave} + w_{m,ave}$  的电磁场通过单位截面功率  $S_{ave}$  [SI 单位: J/m<sup>2</sup>-sec] 的比值  $\Rightarrow v_e(\omega) \equiv \frac{S_{ave}}{w_{EM,ave}}$
- 信号速度 (signal velocity): 电磁信号携带信息的传输速度, 根据因果律, 不能超过光速  $\Rightarrow v_s \equiv \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$

**注** 当传播常数  $\Gamma$  或  $k$  为复数时, 上面定义中的  $k$  应为  $\text{Re } k = \beta$ 。

**笔记** 思考一下, 当波往不只一个方向传播时, 以上几种波速的定义该如何推广? □

**笔记** 多数时候, 群速  $v_g$  体现为电磁场振幅包络传播速度, 相速  $v_p$  则为包络内快速振荡的电磁场的传播速度。动画演示可参考 [https://en.wikipedia.org/wiki/Group\\_velocity](https://en.wikipedia.org/wiki/Group_velocity)。

这里说明一下群速的定义  $v_g \equiv \partial \omega / \partial k$  如何与电磁场振幅包络的传播速度联系。想像一个一维时域电磁信号, 写成  $A(z, t)$ , 可能包含多个不同波数  $k$ 。初始信号  $A(z, t=0)$  根据傅里叶变换可写成<sup>18</sup>

$$A(z, t=0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{A}(k) e^{ikz} \quad (1.155)$$

其中, 积分内的函数可视为一组特征基底函数, 基底函数形式不随时间变化。初始信号随时间  $t > 0$  的演变可以将被积分函数乘上  $e^{-i\omega t}$  得到, 有

$$A(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{A}(k) e^{ikz} e^{-i\omega(k)t} \quad (1.156)$$

<sup>18</sup>留意, 这里取实部一步略去没写。如果要更严谨论证, 后面等号在必要的地方应该加上  $\text{Re}$ 。

其中,  $\omega$  可能根据信号的不同  $k$  而有所不同。利用泰勒展开, 将  $\omega(k)$  近似写成

$$\begin{aligned}\omega(k) &\approx \omega_0 + \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k=k_0} (k - k_0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right|_{k=k_0} (k - k_0)^2 + \dots \\ &\approx \omega_0 + v_g (k - k_0)\end{aligned}\quad (1.157)$$

此时, 群速度就出现了。代回  $A(z, t)$  的表示式, 有

$$A(z, t) = e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{A}(k) e^{i(k - k_0)(z - v_g t)} \quad (1.158)$$

这里积分外的一项对应中心频率  $k_0$  或  $\omega_0$  的波传播, 比值  $\omega_0/k_0 = v_p(k_0)$  即相速。积分项本身可视为前面项的“包络”, 积分内的  $e^{i(k - k_0)(z - v_g t)}$  则体现包络的传播特性, 有波速  $v_g$  (此即群速)。

**练习 1.16** 试写一段 MATLAB 代码, 演示一维平面电磁信号随时空传输的动态过程, 区分相速与群速。提示: 此电磁信号至少包含两个不同频率与波数。 ■

**解** 考虑  $f_1(z, t) = A \cos(k_1 z - \omega_1 t)$  与  $f_2(z, t) = A \cos(k_2 z - \omega_2 t)$ , 其合成信号  $f(z, t) = f_1 + f_2$  在不同一特定时刻的场形如图 1.8。随不同时间, 合成波  $f(z, t)$  的传播特性可由其相速与群速表征。 ■

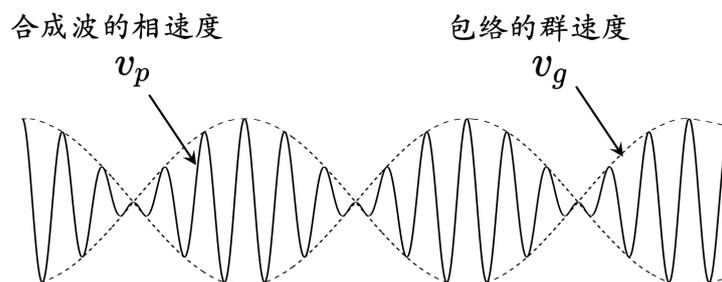


图 1.8: 电磁信号的相速与群速。

### 定义 1.21. 色散物质、正常/反常色散

对于不同频率的电磁波会有不同相速的媒质, 称为色散物质 (dispersive medium), 即  $\beta$  为  $\omega$  的函数

- $\frac{dv_p}{d\omega} < 0$  或  $\frac{d\text{Re}\epsilon(\omega)}{d\omega} > 0$  或  $\frac{d\text{Re}\epsilon(\lambda)}{d\lambda} < 0$  有时称正常 (normal) 色散
- $\frac{dv_p}{d\omega} > 0$  或  $\frac{d\text{Re}\epsilon(\omega)}{d\omega} < 0$  或  $\frac{d\text{Re}\epsilon(\lambda)}{d\lambda} > 0$  有时称反常 (anomalous) 色散

注  $d\omega = -2\pi c d\lambda / \lambda^2$  □

**练习 1.17** 证明在时变电磁场中, 导体为反常色散媒质。 ■

**解** 假设均匀平面电磁波,  $K_c = 0$ , 由色散方程  $\Gamma^2 = -k^2 = 0 - \omega^2 \mu \epsilon_c$ , 解  $k = \beta(\omega) + i\alpha(\omega)$ 。 ■

### 性质 1.6. 各种波速的性质

1. 群速与相速可以互相关联, 有

$$v_g = \frac{v_p}{1 - \frac{\omega}{v_p} \frac{dv_p}{d\omega}} \quad (1.159)$$

2. 电磁波通过色散物质, 一般  $v_p \neq v_g$ , 有  $v_p > c, v_g < c, v_p v_g = c^2$

3. 若电磁波通过无色散物质, 则  $v_e = v_g = v_p$

若电磁波通过正常色散物质, 则  $v_e = v_g < v_p$

若电磁波通过反常色散物质, 则  $v_e \neq v_g > v_p$

□

练习 1.18 利用相速与群速的定义, 证明  $v_g = \frac{v_p}{1 - \frac{\omega}{v_p} \frac{dv_p}{d\omega}}$ 。

■

注 以上讨论了几种典型的波形类型, 结束本节前, 我们注记一下, 除了常见的 TEM、TE、TM 波, 还有混合 (hybrid) 形式, 称 HEM、HE、HM 波, 其中  $E_z \neq 0, H_z \neq 0$ 。这种波形一般出现在需要 TE 与 TM 波同时存在才能满足边界条件的材料或结构中。

考虑在自由空间中, 一道均匀平面电磁波打在良导体  $\sigma/\omega\epsilon \gg 1$  与不良导体  $\sigma/\omega\epsilon \ll 1$  上, 场如何衰减与传播。对 TEM 波,  $K_c = 0$ , 则有色散关系  $0 = \omega^2 \mu\epsilon + \Gamma^2$ 。通过化简  $\Gamma = \alpha - i\beta = -i\omega\sqrt{\mu\epsilon_c} = -i\omega\sqrt{\mu\epsilon} \left(1 + i\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)$  表示式后<sup>19</sup>, 其实部与虚部分别有<sup>20</sup>

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right]} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}, & \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1 \\ \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}, & \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1 \end{cases} \quad (1.160)$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1 \right]} = \begin{cases} \omega\sqrt{\mu\epsilon} \left[ 1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 \right], & \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1 \\ \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}, & \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1 \end{cases}$$

可以看到, 不良导体的衰减常数与频率无关。此外, 电磁场在有耗导电媒质侧的传播, 不再同相位, 且相位差随不同频率而不同。在导电媒质侧的相速为

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \left[ 1 - \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 \right], & \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1 \\ \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}, & \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1 \end{cases} \quad (1.161)$$

<sup>19</sup>这里其实可取  $\Gamma = \pm i\omega\sqrt{\mu\epsilon_c}$ 。我们取负号  $\Gamma = -i\omega\sqrt{\mu\epsilon_c}$  只是假设 TEM 波往 +z 方向传播。一般如果没有特别指明, 都假设波往 +z 方向传播。

<sup>20</sup>上面推导需要用到以下结果: 对  $a, b \in \mathbb{R}$ , 有

$$\operatorname{Re} \sqrt{a + ib} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}}$$

$$\operatorname{Im} \sqrt{a + ib} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}$$

## 1.11 电磁波的偏振：极化 (polarization)

描述横波特性的参量还有一个，称偏振或极化 (polarization)<sup>21,22</sup>。在电磁波里面，一般指的是电场的振荡方向。电磁波的偏振可以分线偏振 (linear polarization)、圆偏振 (circular polarization) 或椭圆偏振 (elliptical polarization)。参考图 1.9，线偏振可区别水平 ( $x$ ) 或垂直 ( $y$ ) 方向，也可以重新定义坐标轴，使偏振方向落在其中一个正交轴上。

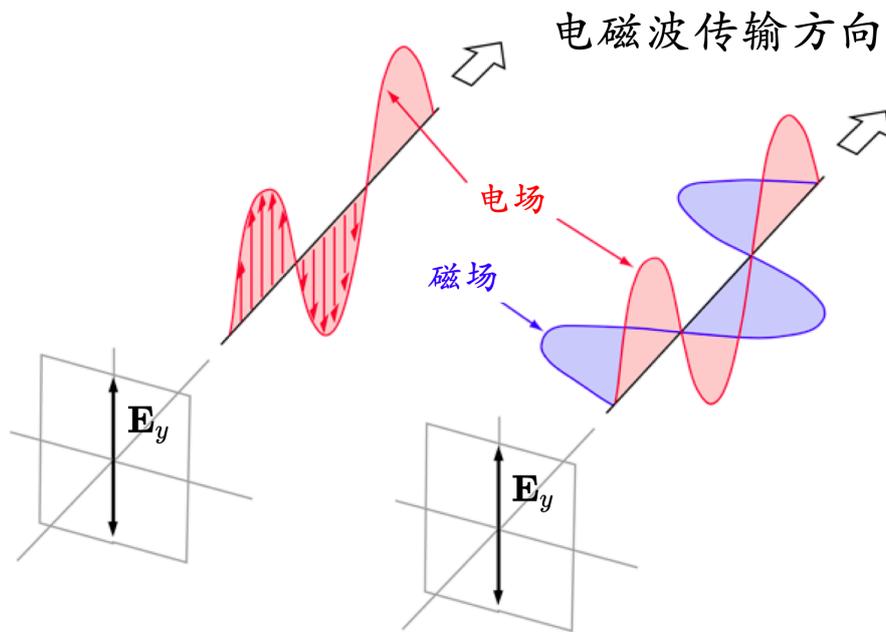


图 1.9: 线偏振。

圆或椭圆偏振还可区别左手偏振或右手偏振。图 1.10 为右手圆偏振 (right-hand circular polarization, RCP)，偏振方向的判断由波传输方向的观察者往回看，按右手定则，四指方向为合成电场随时间振荡方向，拇指方向指向观察者。同理，也有左手圆偏振 (left-hand circular polarization, RCP)。圆偏振可以两个正交方向的线偏振，彼此相差  $90^\circ$  相位的电场叠加合成。或者换一个方式说，线偏振可以拆解为右手圆偏振与左手圆偏振的叠加。当相位差不再是  $90^\circ$  相位时，电场叠加合成椭圆偏振，如图 1.11。

均匀平面电磁波的斜向入射与斜向反射将揭示有关反射 (reflection)、折射 (refraction) 与全反射 (total internal reflection) 等现象。此讲义并不打算详细讨论反射、折射、全反射，而仅给出几个关于均匀平面电磁波斜向 (oblique) 入射与斜向反射的相关物理量与物理效应的描述。

<sup>21</sup>对纵波来说，如声波，没有偏振或极化的概念。

<sup>22</sup>这里的“极化”不要与前面介绍的电介质“极化”混淆。

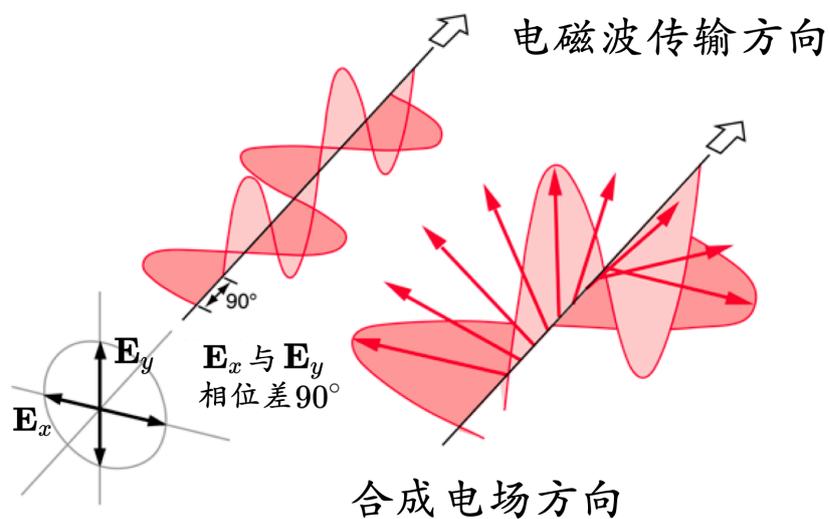


图 1.10: 右手圆偏振。

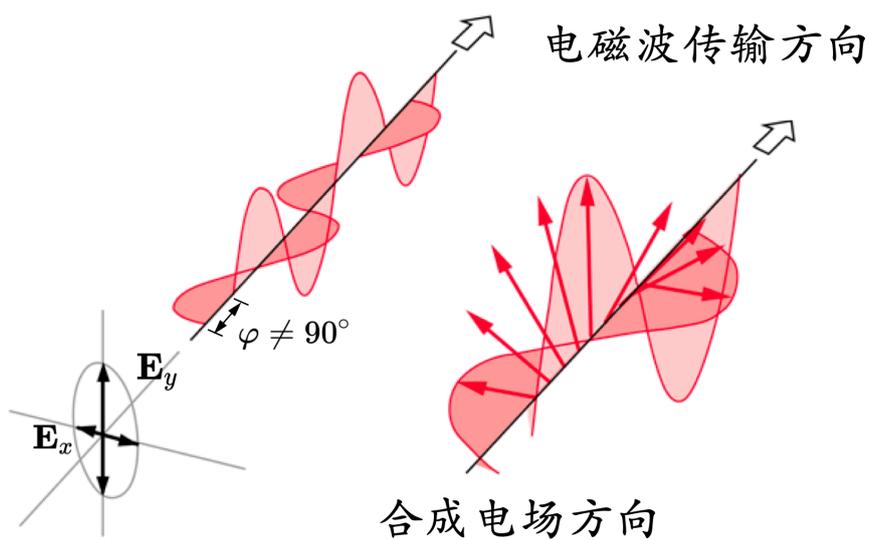


图 1.11: 右手椭圆偏振。

**定义 1.22. 入射角  $\theta_1$ 、折射角  $\theta_2$** 

定义如图 1.12 所示，其中入射方向、反射方向、折射 (透射) 方向、分界面法方向，四者共平面 (图中灰色平面)，称为入射面 (plane of incidence)。

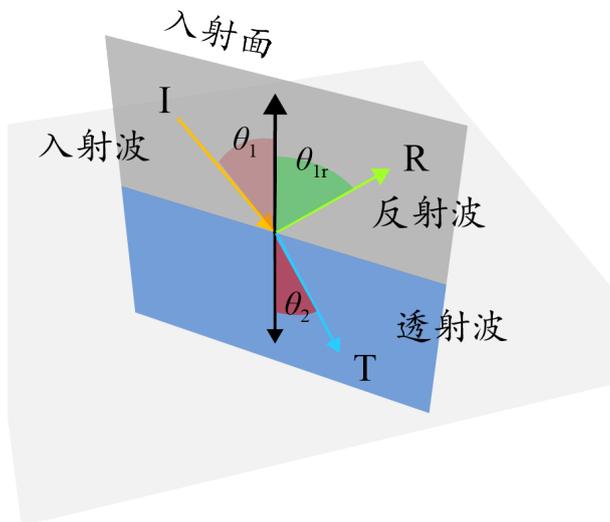


图 1.12: 入射面为灰色平面，其中，入射角  $\theta_1$ ，反射角  $\theta_{1r}$ ，折射角  $\theta_2$ 。

当电磁波正向 (或称垂直) 入射时，多半时候偏振对电磁场在分界面行为的影响不大，但当斜向入射时，因为入射产生的空间方向性，偏振的影响不能忽略。

**定义 1.23. 平行偏振、垂直偏振**

根据与入射面 (plane of incidence) 的相对关系，分平行偏振与垂直偏振，定义如图 1.13。平行偏振有时又称 p-like polarization；垂直偏振有时又称 s-like polarization。

**注** 此与第 4 章、第 5 章计算辐射场的水平偏振又称  $\sigma$  偏振、垂直偏振又称  $\pi$  偏振的惯例不太一样。 $\sigma$  偏振一般指电场振荡方向在粒子弯转平面上， $\pi$  偏振则是指电场振荡方向与粒子弯转平面垂直。宜留意不同惯例的差异。

**定律 1.3. 折射定律**

又称 Snell's law。对于电磁波在不同物质形成的平面界面的斜向入射 (假设自媒质 1 至 2)，恒有

- 入射角 = 反射角，角度定义参考图 1.12
- $\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_{p,1}}{v_{p,2}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n_2}{n_1}$ ，其中  $v_p$  为相速， $\lambda$  为波长， $n$  为折射率

**定义 1.24. 折射率 (index of refraction)**

定义媒质 1 的折射率  $n$ ，相对于真空 (自由空间) 而言，对非磁性媒质，为

$$n = \frac{\sqrt{\mu_1 \epsilon_1}}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}} = \sqrt{\text{Re } \epsilon_{r1}} \quad (1.162)$$

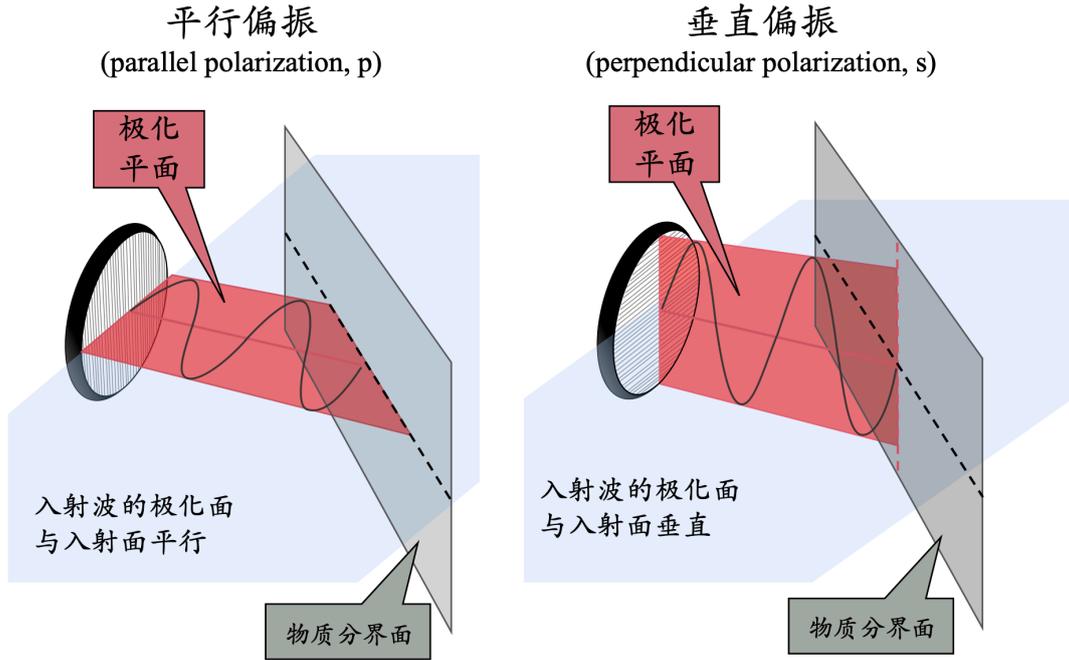


图 1.13: 电磁波斜向入射时的几何构型。平行偏振有时又称 p-like polarization; 垂直偏振有时又称 s-like polarization。

对高频 (高于等离子体频率,  $\omega > \omega_p$ ) 时变电磁场打在媒质上, 折射率的量化定义可与等离子体频率  $\omega_p$  关联, 有

$$n(\omega) = \sqrt{\epsilon_r(\omega)} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu_m^2} \left(1 - i \frac{\nu_m}{\omega}\right)} \quad (1.163)$$

其中,  $\omega_p = \sqrt{\frac{ne\epsilon_0}{m_e}}$  为媒质等离子体频率,  $\nu_m$  为碰撞频率。当忽略碰撞时,  $\nu_m \rightarrow 0$ , 有

$$n(\omega) = \sqrt{\epsilon_r(\omega)} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \leq 1 \quad (1.164)$$

其中,  $\omega_p \sim 10^{16}$  rad/s 约在紫外光区间。因此, 上式适用的高频区间指的是在紫外光或更高频段。

**注** 一般当  $\omega < \omega_p$  时, 相对介电系数  $\epsilon_r < 0$ , 不寻常。但是, 实际情况却鲜少观察到  $\epsilon_r < 0$  的物质, 这是因为当  $\omega < \omega_p$  时,  $\nu_m$  很大,  $\nu_m \gg \omega$ , 此时相对介电系数的虚部主导, 电磁波没有体现  $\text{Re} \epsilon_r < 0$  的特性, 反而因为其主导的虚部, 低于等离子体频率的电磁波在材料都耗散了, 或称光吸收 (light absorption)。关于折射率的进一步讨论, 包含在媒质中的正常与反常色散现象, 可参考 J.D. Jackson §7.5。

**注** 此为寻常材料的折射率定义, 对超材料 (metamaterial) 的折射率, 需要另外定义 (参考 §1.21)。

由上可知, 电磁波在不同折射率的媒质中, 传播速度不一样  $v_p = \frac{c}{n}$ 。一般称  $n$  较大的物质为密介质,  $n$  较小为疏介质。电磁波自密介质至疏介质 (从  $n$  大至  $n$  小), 透射波传

播方向会更偏离法向方向，见图 1.14，电磁波自下方密介质往上方疏介质传输。电磁波自密介质至疏介质传输，当入射角大于一临界角时，透射角达  $90^\circ$ ，此时称全反射 (total internal reflection, TIR)。

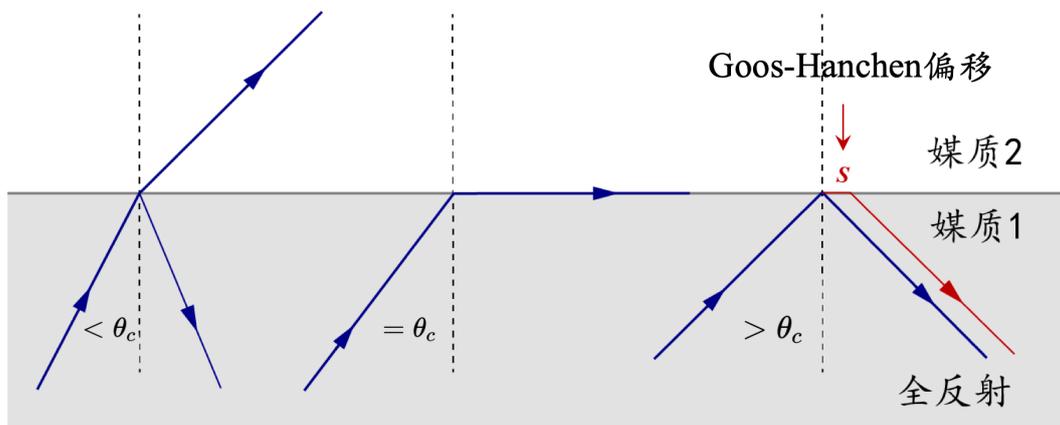


图 1.14: 中间图为全反射示意图，当入射角大于全反射临界角时，无透射波，仅有反射波。右图红色射线为考虑 Goos-Hanchen 效应后的修正， $s$  为偏移距离，根据入射波电场极化方向不同而异。

#### 定义 1.25. 全反射临界角 (critical angle)

在分界面附近  $n$  的较大区域 ( $n_1 > n_2$ )，定义  $\theta_c = \sin^{-1} \frac{n_2}{n_1} = \sin^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}}$  为全反射临界角。

**注** 电磁波传播自密介质至疏介质，当入射角  $>$  临界角时，发生全反射。当入射角  $=$  临界角时，既无折射也无反射，电磁波以表面波形式存在在分界面上并以指数形式衰减。此图像为几何光学 (geometric/ray optics) 的图像。

**注** 此定义属几何光学的定义。 □

进一步考虑电磁波从密介质至疏介质的传播后，将有 Goos-Hanchen 效应 (Goos-Hanchen effect)。

#### 定义 1.26. Goos-Hanchen 效应

为一种光学现象。当线极化电磁波从密介质入射至疏介质，全反射后的电磁波存在一横向偏移  $s$ ，又称 Goos-Hanchen 偏移 (Goos-Hanchen shift, GHS)。参考图 1.14 右图红色反射线。

**注** 以上效应的入射波为线极化，对圆极化或椭圆极化，也有类似现象，称 Imbert-Fedorov 效应。

**注** 根据入射波电场极化方向不同， $s$  的表示式不同，细节此处不论。这里的 Goos-Hanchen 效应对寻常介质而言，有  $s > 0$ 。 □

### 1.11.1 在 EUV/X 射线波段，物质折射率小于、但非常接近 1

折射率随频率的变化通常是“频率越高，折射率越大”，即前面定义的正常色散。但有时会出现“频率越高，折射率变小”的情况，此时按前面定义的，称反常色散，通常发生在物质的共振吸收峰附近。略去分析细节，这里仅给出出现这两种现象的物理图像：当电磁波（快速振荡的时变电场）推动介质材料里的电子运动时，电子并不总是能和电场保持着相同相位，特别是当电磁波振荡太快时。这里的快慢是相对于电子在介质材料里的特征振荡频率而言，即共振频率。当电场振荡频率超过电子在材料里的共振频率时，就会出现反相位的情况，就是电子“跟不上”电场的振荡频率了。这将产生往反向（或反相）于电场运动的极化电流，使电子开始从外部场吸收能量。当  $\text{Re } \epsilon < \epsilon_0$  时，或  $\text{Re } \epsilon_r < 1$  时，折射率小于 1。由折射率与等离子体频率的关系知，对极高频电磁场，折射率小于 1。在深紫外 (extreme ultraviolet, EUV) 或 X 射线波段，大多数介质的折射率接近但小于 1。一般教科书将在 EUV/X 射线区间的物质折射率写成

$$n(\omega) = 1 - \delta + i\beta \quad (1.165)$$

其中， $\delta, \beta$  都是相比于 1 小得多的值。这里的  $\beta$  表征材料将吸收一部分入射的电磁波。

图 1.15 是在共振附近介电系数的实部与虚部趋势示意图。一种介质一般存在不只有一个这种趋势，即在不同波段里，可能会出现几次类似的趋势。但是电磁波的频率一直增加，是不是还有类似的趋势？就目前所知，这种趋势止于 X 射线。因此，在 X 射线波段，物质体现出来的折射率除了小于、还非常接近 1，但当频率再高时，介电系数的实部不再返回或甚至大于  $\epsilon_0$ 。根据以上讨论，还知道，X 射线电磁波在介质中 ( $n < 1$ ) 的传播光速比真空光速更快，而且从真空进入介质时，电磁波可能发生全反射。



**笔记** 关于 EUV 与 X 射线原理与应用的介绍，可参考 David Attwood 一书。

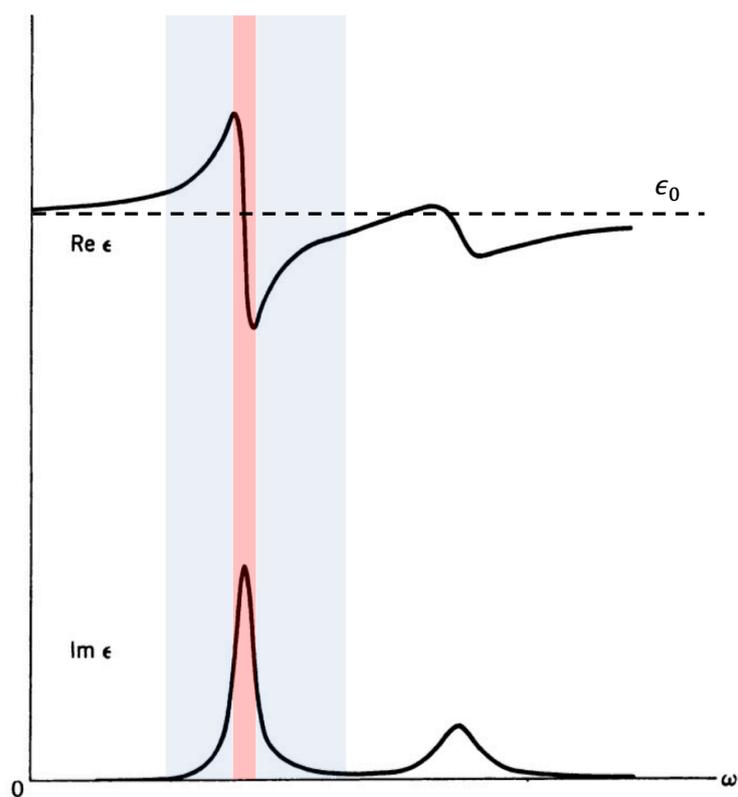


图 1.15: 在共振附近介电系数的实部与虚部。红色部分为反常色散，蓝色部分为正常色散。虚线表征  $\epsilon_0$ 。在非常高频接近 X 射线时，介质折射率稍小于 1。此处  $\text{Im } \epsilon > 0$ ，表征外部场无法从介质材料中的电子获得能量。

## 1.12 波导

定向传播电磁波一般视为能量和信号的传输。考虑到传输效率、欧姆损耗、辐射损耗与介电损耗等，对不同频段的电磁波由分别适合的电磁部件传输。

- 低频 ( $\lambda > 10 \text{ cm}$ ,  $f < \text{GHz}$ ): 双导线、同轴传输线 (coaxial cable, transmission line)。
- 高频 ( $\lambda < 10 \text{ cm}$ ,  $f > \text{GHz}$ ): 波导 (waveguide)。
- 介于低频与高频之间，有微带线 (stripline)，属 (半) 开放微波结构。



**笔记** 这一节介绍的波导与下一节即将介绍的微波谐振腔，其理论与雷达 (radar) 技术应用主要在第二次世界大战期间在美国麻省理工学院 (Massachusetts Institute of Technology, MIT) 辐射实验室 (Radiation Lab)<sup>23</sup> 开展，其中，当时的物理学家施温格 (J. Schwinger)<sup>24</sup> 对推进波导与谐振腔理论进展扮演重要角色。

微波/射频器件常用频段又细分如下表。

频段	频率范围	波长范围
HF	3 – 30 MHz	10 – 100 m
VHF	30 – 300 MHz	1 – 10 m
UHF	300 – 1000 MHz	30 – 100 cm
L	1 – 2 GHz	15 – 30 cm
S	2 – 4 GHz	7.5 – 15 cm
C	4 – 8 GHz	3.75 – 7.5 cm
X	8 – 12 GHz	2.5 – 3.75 cm
Ku	12 – 18 GHz	16.7 – 25 mm
K	18 – 27 GHz	11.1 – 16.7 mm
Ka	27 – 40 GHz	7.5 – 11.1 mm
V	40 – 75 GHz	4.0 – 7.5 mm
W	75 – 110 GHz	2.7 – 4.0 mm
mm	110 – 170 GHz	1.8 – 2.7 mm

其中，HF = high frequency (高频)、VHF = very high frequency (甚高频)、UHF = ultra high frequency (超高频)。以上波段的起止范围可能不同文献的定义可能稍有不同，此处不论。



**笔记** “微波 (microwave)”、“射频 (radio-frequency, RF)” 这两个词在许多教科书或文献中时

<sup>23</sup>麻省理工学院辐射实验室成立于 1940 年，正值第二次世界大战爆发初期，致力于雷达技术和微波工程的发展，以其在该领域开创性的贡献而闻名，大大推动了雷达和微波技术的理论和应用的发展，发挥了至关重要的作用，为学术知识和实际应用做出了贡献。辐射实验室在第二次世界大战结束不久后于 1945 年正式关闭。

<sup>24</sup>施温格 (Julian Schwinger) 是量子电动力学 (quantum electrodynamics, QED) 理论的创始人之一，与费曼 (Richard Feynman)、朝永振一郎 (Shinichiro Tomonaga) 共获 1965 年诺贝尔物理学奖。施温格是物理学家中出了名的硬算高手，对冗长繁难的笔算非常拿手。第 4 章即将介绍的同步辐射，对冗长的贝塞尔函数积分计算是施温格的拿手好戏之一。

常出现,好像都在描述上表的电磁波波段,需要区分吗?怎么区分?以较狭义或严格定义来说,射频覆盖的范围大概是 30 MHz 至 3 GHz;微波覆盖的范围则为 300 MHz 至 1000 GHz。对加速器社群来说,最常见的频段在 2 GHz 至 10 GHz,因此,用“微波”、“射频(RF)”二词都很普遍。

### 定义 1.27. 波导 (waveguide)

在导体内真空部份引导电磁波传播的装置(导体内可能为真空或填充电介质)称为波导。若垂直于电磁波行进路径的截面,其形状、大小不变,又称均匀波导。 □



**笔记** 最早电磁波“波导”概念探索由瑞利 (John William Strutt, 3rd Baron Rayleigh) 在 1897 年提出,当时没有得到任何实际应用,想法也被遗忘。直到 40 年后,1936 年左右, G.C. Southworth 和 W.L. Barrow 各自独立、重新发现了这个“波导”的概念。回溯其历史发展历程有近百年时间。但仅在过去的半个世纪里,这项技术及其概念的丰富应用才得以开展。对早期“波导”概念背后的技术思想如何酝酿、开展感兴趣的读者,可参考 K. Packard, The origin of waveguides: a case of multiple rediscovery, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques **32**, 961-969 (1984). <https://doi.org/10.1109/TMTT.1984.1132809>。

### 定理 1.18. 单一、中空波导无法传输 TEM 波

单一、中空波导无法传输 TEM 波。

**证明** (法一) TEM 波的解  $\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}_{\perp} e^{-\Gamma z}$  满足  $\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$ ,  $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 0$ , 形同静电场。中空、单一导体中若无净电荷,则静电场为  $\mathbf{0}$ ,也就无法传播 TEM 波。

**证明** (法二) 假设存在 TEM 波,然后证明结论与假设矛盾。先参考图 1.16 左,考虑虚线围出的封闭曲线,由全电流定律,有

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

由于中空区域没有自由电流,  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ 。再来,中空区域存在的横向磁场沿着封闭曲线势必贡献非零线积分(因为磁场不能终止于侧壁表面),表征等式右边必须存在非零的  $\iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$ , 其中,  $\mathbf{S}$  的边缘为封闭线  $C$ 。此积分  $\iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$  要有非零值,则必须存在纵向电场  $E_z$ 。而这与假设  $E_z = H_z = 0$  矛盾。

参考图 1.16 右,现在为中空导体,但是非单一,因此允许存在 TEM 波。换句话说,此时中空区域存在的横向磁场沿着封闭曲线可能贡献一零线积分。 □



**笔记** 片刻思考后,会发现,单一导体是导致上图左与右能否支持 TEM 波的关键。举一反三,回到静电场,想想这个结论是否合理?具有开口的非单一导体是否能够屏蔽外部电场?

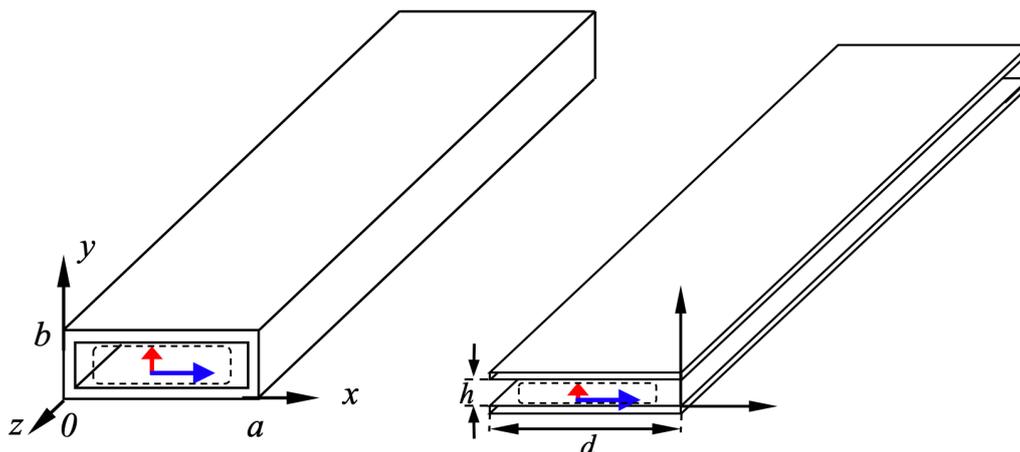


图 1.16: 左图为单一、中空导体, 右图为中空导体, 但是非单一。假设红色箭头为瞬时电场方向, 蓝色箭头为瞬时磁场方向, 电磁波沿  $-\mathbf{e}_z$  方向传播。

### 定义 1.28. 截止频率、截止波长、截止波数、主要模式

由于边界条件约束, 电磁波在波导内形成驻波, 对传播的频率 (或波长) 有所局限, 对每个模存在形成驻波的频率下限, 称为截止频率, 记作  $f_c$  或  $\omega_c$ , 截止波长  $\lambda_c = \frac{2\pi}{K_c}$ , 其中  $K_c$  为截止波数。下标  $c$  表示截止 (cutoff)。

$$\text{截止} \Leftrightarrow \Gamma = 0, k = 0$$

在所有允许传播的模式中, 具有最低截止频率的模称为主要模式 (dominant mode) 或基模 (fundamental mode)。其它称为高次模 (higher order mode, HOM)。

对 TEM 波, 截止波数  $K_c = 0$ , 即  $\lambda_c = \infty$ 。或者说, TEM 波没有截止频率  $\omega_c = 0$ 。

对于单导体中空波导, 已知一特定模式的  $K_{c,mn}$  (传播电磁场  $\mathbf{e}_z$  分量的特征值), 则有  $\omega_{c,mn} = \frac{K_{c,mn}}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ , 其中  $\mu, \epsilon$  为中空部分的磁导率与电容率<sup>25</sup>。一般 TE、TM 模有不同的截止频率。



**笔记** 一般来说, 波导可以理解成一种“高通”(high-pass) 滤波器。从色散关系

$$\Gamma^2(\omega) = -k^2 = K_c^2 - \omega^2 \mu \epsilon_c$$

可以看出, 若要电磁波能传播, 则要求  $\Gamma = \alpha + j\beta \stackrel{!}{=} j\beta$  (因为  $e^{\mp\Gamma z}$ ) 或  $k = \beta + i\alpha \stackrel{!}{=} \beta$  (因为  $e^{\pm ikz}$ )。波导因为不支持 TEM 波, 因此  $K_c > 0 \neq 0$ , 这也就给  $\omega$  一个下限, 低于下限, 则色散关系等式右边为正, 也就表征  $\Gamma$  为实数 (或存在非零实部) 或  $\beta$  为虚数 (或存在非零虚部), 场沿  $z$  指数衰减, 波无法传递。

现在介绍完了波导的基本概念后 (总算!), 我们将针对特定的波导结构, 找出它的截

<sup>25</sup>有时候, 中空部分未必真的中空, 可能填充电介质。在加速器应用中, 如果是在带电粒子束行进路径上, 则要求中空。

止波数  $K_c$ 。同时, 求解在该波导结构中的电磁场波形函数  $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}$ 。即, 针对特定的波导结构, 列写对应的边界条件, 求解如下波形方程

$$\nabla_{\perp}^2 \begin{Bmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_z(x, y) \\ \tilde{\mathcal{H}}_z(x, y) \end{Bmatrix} + K_c^2 \begin{Bmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_z(x, y) \\ \tilde{\mathcal{H}}_z(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.166)$$

求得纵向波形函数之后, 再按定理得横向波形函数。

以下两定理将分别总结常用的两种波导结构: 矩形波导 (rectangular waveguide) 与圆柱形波导 (circular cylindrical waveguide), 分别有 TM 波与 TE 波。

### 定理 1.19. 矩形波导场形与特性

假设矩形波导横向尺寸为  $a, b$ , 坐标原点取左下角。对 TM 波, 有

$$\begin{cases} \tilde{E}_z(x, y, z) = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\Gamma z} \\ \tilde{H}_z(x, y, z) = 0 \\ \tilde{E}_x(x, y, z) = -\frac{\Gamma}{K_c^2} \frac{m\pi}{a} E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\Gamma z} \\ \tilde{E}_y(x, y, z) = -\frac{\Gamma}{K_c^2} \frac{n\pi}{b} E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\Gamma z} \\ \tilde{H}_x(x, y, z) = -i \frac{\omega\epsilon}{K_c^2} \frac{n\pi}{b} E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\Gamma z} \\ \tilde{H}_y(x, y, z) = i \frac{\omega\epsilon}{K_c^2} \frac{m\pi}{a} E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\Gamma z} \end{cases} \quad (1.167)$$

其中,  $K_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$ ,  $\Gamma = -ik = \alpha - i\beta = \sqrt{K_c^2 - \omega^2\mu\epsilon}$ 。TM 模式则要求下标  $m, n$  必须皆为正整数。

假设矩形波导横向尺寸为  $a, b$ , 坐标原点取左下角。对 TE 波, 有

$$\begin{cases} \tilde{E}_z(x, y, z) = 0 \\ \tilde{H}_z(x, y, z) = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\Gamma z} \\ \tilde{E}_x(x, y, z) = -i \frac{\omega\mu}{K_c^2} \frac{n\pi}{b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\Gamma z} \\ \tilde{E}_y(x, y, z) = i \frac{\omega\mu}{K_c^2} \frac{m\pi}{a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\Gamma z} \\ \tilde{H}_x(x, y, z) = \frac{\Gamma}{K_c^2} \frac{m\pi}{a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\Gamma z} \\ \tilde{H}_y(x, y, z) = \frac{\Gamma}{K_c^2} \frac{n\pi}{b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\Gamma z} \end{cases} \quad (1.168)$$

其中,  $K_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$ ,  $\Gamma = -ik = \alpha - i\beta = \sqrt{K_c^2 - \omega^2\mu\epsilon}$ 。TE 模式允许  $m, n$  其中一个下标为 0。转换到时域瞬时量, 可利用  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[ \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \right]$ ,  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[ \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \right]$ 。

**证明** 考虑 TM 波, 单独研究电场波形, 利用分离变量法, 假设  $\tilde{\mathcal{E}}_z(x, y) = \mathcal{X}(x)\mathcal{Y}(y)$ ,

代入方程，有

$$\frac{\mathcal{X}''}{\mathcal{X}} + \frac{\mathcal{Y}''}{\mathcal{Y}} = -K_c^2 \Rightarrow -K_x^2 - K_y^2 = -K_c^2$$

由于  $\mathcal{X}$  与  $\mathcal{Y}$  互相独立，得两个常微分方程及其通解 (general solution)

$$\begin{cases} \mathcal{X}'' + K_x^2 \mathcal{X} = 0 \\ \mathcal{Y}'' + K_y^2 \mathcal{Y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{X} = A \sin K_x x + B \cos K_x x \\ \mathcal{Y} = C \sin K_y y + D \cos K_y y \end{cases}$$

电场的时谐相量表示包含波形与波动因子，有  $\tilde{E}_z(x, y, z) = \tilde{\mathcal{E}}_z(x, y) e^{-\Gamma z} = \mathcal{X}(x)\mathcal{Y}(y)e^{-\Gamma z}$ 。磁场也有类似的表示式。到目前为止， $A, B, C, D$  仍待定，由边界条件约束。注意， $\tilde{E}_z, \tilde{H}_z$  其中之一是解方程得到的，其它分量  $\tilde{E}_{x,y}, \tilde{H}_{x,y}$  将通过“波形因子的横向解可用纵向解表示”定理得到。对 TM 模，有以下边界条件

$$\tilde{\mathcal{E}}_z|_{x=0, x=a, y=0, y=b} = 0$$

这些边界条件要求  $B = D = 0$ ，且对  $K_x, K_y$  加诸限制条件

$$K_x = \frac{m\pi}{a}, K_y = \frac{n\pi}{b}, \text{ 其中 } m, n \in \mathbb{N}$$

因此，电场纵向波形函数有

$$\tilde{E}_z = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\Gamma z}$$

其中， $E_0$  仍为待定常数。 $K_x, K_y$  由装置结构决定。截止波数 ( $m, n$  要求皆为正整数)

$$K_c = \sqrt{K_x^2 + K_y^2} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon + \Gamma^2}$$

根据前面定理，给定纵向波形函数，则横向波形函数也可获得，得证。

**注** 注意，以上假设波往  $+\hat{z}$  方向传播，于是有  $e^{-\Gamma z}$ 。如果波往  $-\hat{z}$  方向传播，则有  $e^{\Gamma z}$ 。

**练习 1.19** 仿照上面步骤，推导矩形波导中 TE 模的解。 ■

**解** 对 TE 模而言，边界条件  $E_t = 0$  恒成立，有  $\tilde{\mathcal{E}}_x|_{y=0, y=b} = 0, \tilde{\mathcal{E}}_y|_{x=0, x=a} = 0$ 。 ■

TE<sub>10</sub> 模与 TM<sub>11</sub> 模的解如图 1.17 所示，几个低阶波导正交模总结如图 1.18。

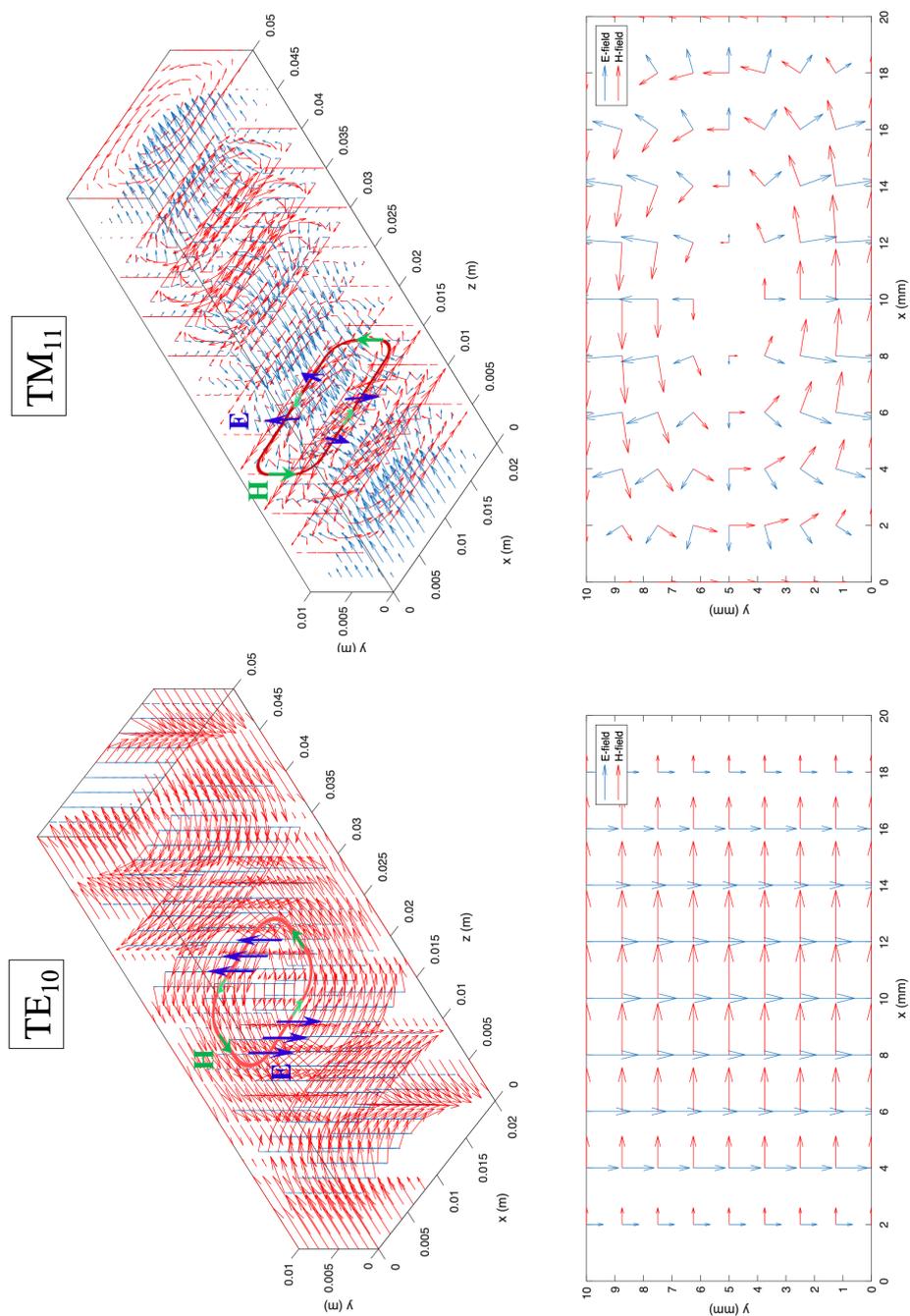


图 1.17:  $TE_{10}$  模与  $TM_{11}$  模。上排为三维场形，下排为在  $z = 0.015$  m 处的横向场形。对  $TE_{10}$  模，此图例假设  $f = 10$  GHz；对  $TM_{11}$  模，此图例假设  $f = 20$  GHz。

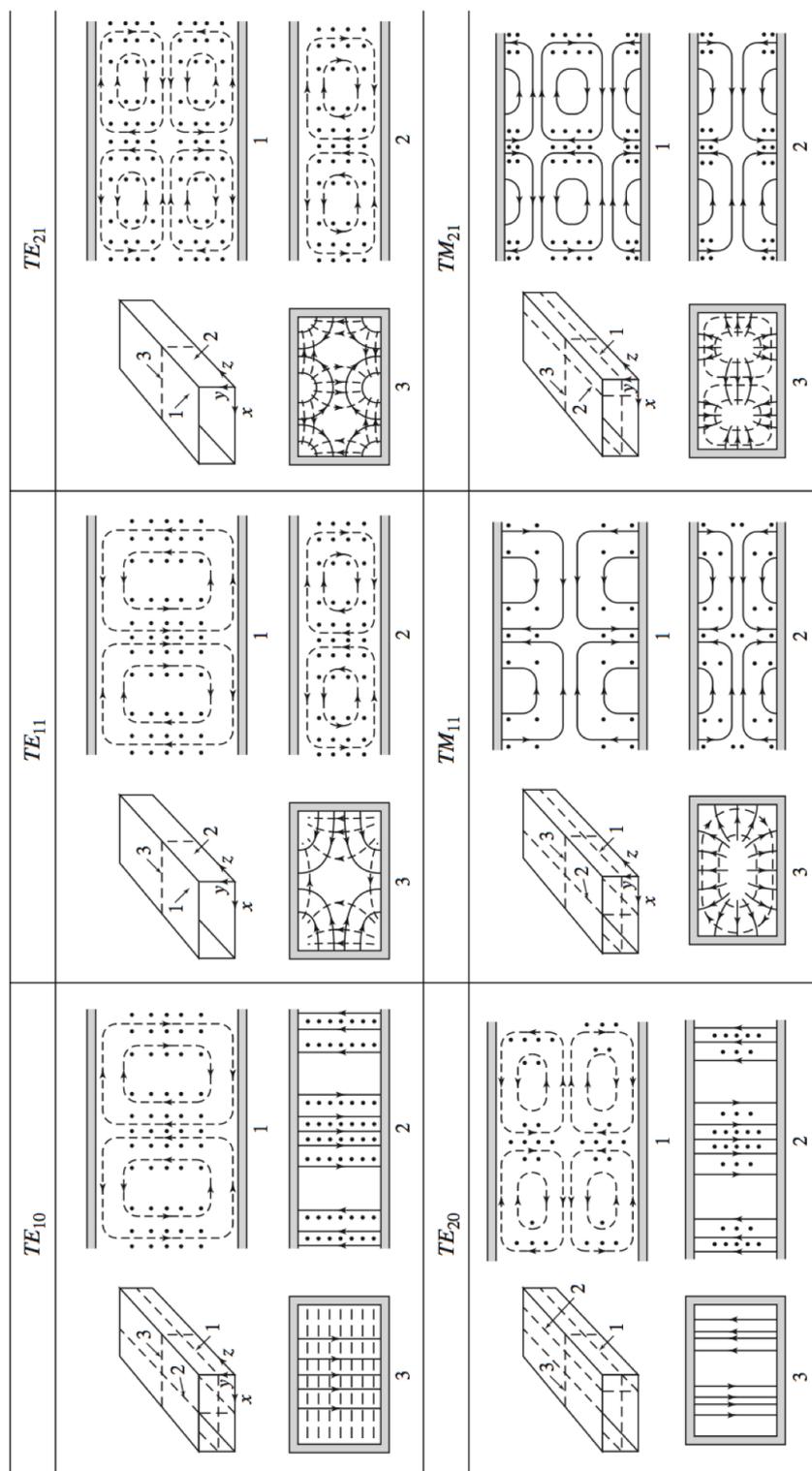


图 1.18: 几个矩形波导的低阶正交模。在子图 1 中, 虚线为磁场, 点为电场。在子图 2 中, 实线为电场, 点为磁场。在子图 3 中, 虚线为磁场, 实线为电场。

注意, 矩形波导 TE 模与 TM 模的截止波数表示式是一样的  $\Rightarrow K_{c,mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$ , 但 TE 模式允许其中一个下标为 0, TM 模式则要求下标必须皆为正整数。截止波长  $\lambda_c = \frac{2\pi}{K_{c,mn}}$ 、截止频率  $\omega_c = K_{c,mn}c$ 。

当电磁场能够传播, 表示  $\Gamma \equiv \alpha - i\beta$ , 其中  $\alpha = 0$  (无衰减)。在以上例子中, 有

$$\begin{aligned}\Gamma &= -i\sqrt{\omega^2\mu\epsilon - K_c^2} = -i\beta = -ik \\ \beta &= k = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} > 0\end{aligned}\quad (1.169)$$

表明波往  $+z$  方向传播, 如预期。

波导结构尺寸或材料参数决定特征模式的特性, 其中, 称有些模式为简并模式, 定义如下:

### 定义 1.29. 简并模式

具有相同  $(m, n)$ 、相同  $K_c$  (与  $\lambda_c$ )、相同相速、相同群速与相同波导波长的 TE 模式与 TM 模式, 称为简并 (degenerate) 模式。

### 定义 1.30. 波导波长

定义为  $\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta}$ 。

### 性质 1.7. 矩形波导的一些特性

色散关系  $K_c^2 = \omega^2\mu\epsilon + \Gamma^2$  可以写成  $\omega^2 - \beta^2c^2 - \omega_c^2 = 0$ , 其中  $\omega_c = c\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$ 。

$$\begin{cases} \lambda_g = \text{波导波长} \equiv \frac{2\pi}{\beta}, \text{与几何及操作频率相关} \\ \lambda_c = \text{截止波长} \equiv \frac{2\pi}{\omega_c}c, \text{仅与几何相关} \\ \lambda_0 = \text{工作波长} \equiv \frac{2\pi}{\omega}c, \text{仅由操作频率决定, 一般 } \lambda_0 < \lambda_g \end{cases}$$

根据操作频率, 电磁波在波导里有如下特性

$$\begin{cases} \omega > \omega_c \Rightarrow \beta \text{ 实数} \Rightarrow \text{传递行波}, v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{\beta c^2}{\omega} \\ \omega = \omega_c \Rightarrow \beta = 0 (\lambda_g = \infty) \Rightarrow v_g = 0 \\ \omega < \omega_c \Rightarrow \beta \text{ 纯虚数} \Rightarrow \text{衰减波、凋落波} \end{cases}$$

**注** 如果波导中空填充电介质, 那么  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon}}$ , 其中,  $\epsilon = \epsilon_r\epsilon_0$  为介质的介电系数。

**注** 对矩形波导, 最低阶的 TE 模为 TE<sub>10</sub> 模 (其中, 1 对应长边维度), 也是所有模式中的最低阶模, 称主要模式 (dominant mode)。最低阶的 TM 模为 TM<sub>11</sub> 模。

实际应用中，除了矩形波导，还有圆柱形波导。

### 定理 1.20. 圆柱形波导场形与特性

假设圆柱形波导半径为  $a$ 。对 TM 波，有

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}_z(\rho, \phi, z) = E_0 \mathcal{J}_m \left( j_{m,n} \frac{\rho}{a} \right) e^{-im\phi + i\kappa_{m,n}z} \\ \tilde{H}_z(\rho, \phi, z) = 0 \\ \tilde{E}_\rho(\rho, \phi, z) = E_0 \frac{i\kappa_{m,n}a}{j_{m,n}} \mathcal{J}'_m \left( j_{m,n} \frac{\rho}{a} \right) e^{-im\phi + i\kappa_{m,n}z} \\ \tilde{E}_\phi(\rho, \phi, z) = -E_0 \frac{m\kappa_{m,n}a^2}{\rho j_{m,n}^2} \mathcal{J}_m \left( j_{m,n} \frac{\rho}{a} \right) e^{-im\phi + i\kappa_{m,n}z} \\ \tilde{B}_\rho(\rho, \phi, z) = E_0 \frac{m\omega a^2}{c^2 \rho j_{m,n}^2} \mathcal{J}_m \left( j_{m,n} \frac{\rho}{a} \right) e^{-im\phi + i\kappa_{m,n}z} \\ \tilde{B}_\phi(\rho, \phi, z) = E_0 \frac{i\omega a}{c^2 j_{m,n}} \mathcal{J}'_m \left( j_{m,n} \frac{\rho}{a} \right) e^{-im\phi + i\kappa_{m,n}z} \end{array} \right. \quad (1.170)$$

其中， $K_c^2 = j_{m,n}^2/a^2$ ， $j_{m,n}$  为第  $m$  阶贝塞尔函数  $\mathcal{J}_m$  的第  $n$  个根，即， $\mathcal{J}_m(j_{m,n}) = 0$ 。  
 $\kappa_{m,n} = k = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon - K_c^2}$ 。指数部分  $e^{i\kappa_{m,n}z}$  也可写成  $e^{ikz} = e^{-\Gamma z}$ ，其中， $\Gamma = -ik = \alpha - i\beta = \sqrt{K_c^2 - \omega^2\mu\epsilon}$ 。TM 模式则要求下标  $m = 0, 1, 2, \dots$ 、 $n = 1, 2, 3, \dots$ 。

假设圆柱形波导半径为  $a$ 。对 TE 波，有

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}_z(\rho, \phi, z) = 0 \\ \tilde{B}_z(\rho, \phi, z) = B_0 \mathcal{J}_m \left( j'_{m,n} \frac{\rho}{a} \right) e^{-im\phi + i\kappa_{m,n}z} \\ \tilde{B}_\rho(\rho, \phi, z) = B_0 \frac{i\kappa_{m,n}a}{j'_{m,n}} \mathcal{J}'_m \left( j'_{m,n} \frac{\rho}{a} \right) e^{-im\phi + i\kappa_{m,n}z} \\ \tilde{B}_\phi(\rho, \phi, z) = -B_0 \frac{m\kappa_{m,n}a^2}{\rho j'_{m,n}{}^2} \mathcal{J}_m \left( j'_{m,n} \frac{\rho}{a} \right) e^{-im\phi + i\kappa_{m,n}z} \\ \tilde{E}_\rho(\rho, \phi, z) = -B_0 \frac{m\omega a^2}{\rho j'_{m,n}{}^2} \mathcal{J}_m \left( j'_{m,n} \frac{\rho}{a} \right) e^{-im\phi + i\kappa_{m,n}z} \\ \tilde{E}_\phi(\rho, \phi, z) = -B_0 \frac{i\omega a}{j'_{m,n}} \mathcal{J}'_m \left( j'_{m,n} \frac{\rho}{a} \right) e^{-im\phi + i\kappa_{m,n}z} \end{array} \right. \quad (1.171)$$

其中， $K_c^2 = j'_{m,n}{}^2/a^2$ ， $j'_{m,n}$  为第  $m$  阶导数贝塞尔函数  $\mathcal{J}'_m$  的第  $n$  个根，即， $\mathcal{J}'_m(j'_{m,n}) = 0$ 。 $\kappa_{m,n} = k = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon - K_c^2}$ 。指数部分  $e^{i\kappa_{m,n}z}$  也可写成  $e^{ikz} = e^{-\Gamma z}$ ，其中， $\Gamma = -ik = \alpha - i\beta = \sqrt{K_c^2 - \omega^2\mu\epsilon}$ 。TE 模式要求  $m = 0, 1, 2, \dots$ 、 $n = 1, 2, 3, \dots$ 。转换到时域瞬时量，可利用  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[ \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \right]$ ， $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[ \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \right]$ 。

**注** 注意，以上假设波往  $+\hat{z}$  方向传播，于是有  $e^{i\kappa_{m,n}z}$ 。如果波往  $-\hat{z}$  方向传播，则有  $e^{-i\kappa_{m,n}z}$ 。

**练习 1.20** 试证明圆柱形波导 TM 与 TE 模的解。

**解** 在圆柱坐标系下, 利用分离变量法, 通解  $\tilde{E}_z(\rho, \phi, z) = \mathcal{E}(\rho)e^{-im\phi+i\kappa z}$  的径向函数  $\mathcal{E}(\rho)$  满足如下方程

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{d\mathcal{E}}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} \mathcal{E} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \kappa^2 \right) \mathcal{E} = 0$$

其解可写成

$$\mathcal{E}(\rho) = E_0 \mathcal{J}_m(k_{\perp} \rho)$$

其中,  $k_{\perp} = c^{-1} \sqrt{\omega^2 - c^2 \kappa^2}$ 。方程称贝塞尔方程,  $\mathcal{J}_m$  称第一类第  $m$  阶贝塞尔函数 (Bessel function)。

**笔记** 上面为  $m$  阶第一类贝塞尔函数 (Bessel function of the first kind)  $\mathcal{J}_m$ 。还有  $m$  阶第一类修正贝塞尔函数 (modified Bessel function of the first kind)  $\mathcal{I}_m$ 、 $m$  阶第二类贝塞尔函数 (Bessel function of the second kind)  $\mathcal{Y}_m$  (有些文献写成  $\mathcal{N}_m$ )、 $m$  阶第二类修正贝塞尔函数 (modified Bessel function of the second kind)  $\mathcal{K}_m$ 、 $m$  阶第三类贝塞尔函数 (Bessel function of the third kind) 又称汉克尔 (Hankel) 函数  $\mathcal{H}_m^{(1)} = \mathcal{J}_m + i\mathcal{Y}_m$ 、 $\mathcal{H}_m^{(2)} = \mathcal{J}_m - i\mathcal{Y}_m$ 。此外, 还有球谐贝塞尔函数 (spherical Bessel function) 与球谐汉克尔函数 (spherical Hankel function), 此处不论。关于特殊函数的介绍, 可以参考数学物理教科书, 如: Jon Mathews and R.L. Walker, *Mathematical Methods of Physics*, Addison-Wesley (1970)。

圆柱形波导  $\text{TM}_{01}$  模的解如图 1.19 所示, 常用来加速粒子。几个低阶波导正交模总结如图 1.20。

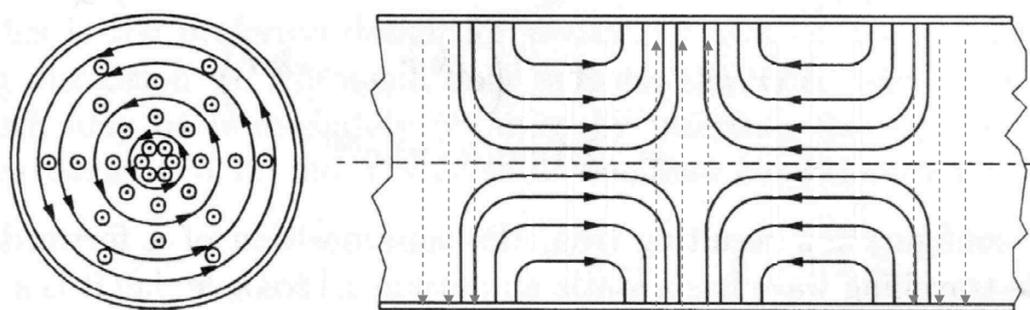


图 1.19: 圆柱形波导  $\text{TM}_{01}$  模。左图实线为横向  $B_{\phi}$  磁场, 点圈为纵向电场。右图实线为电场线。

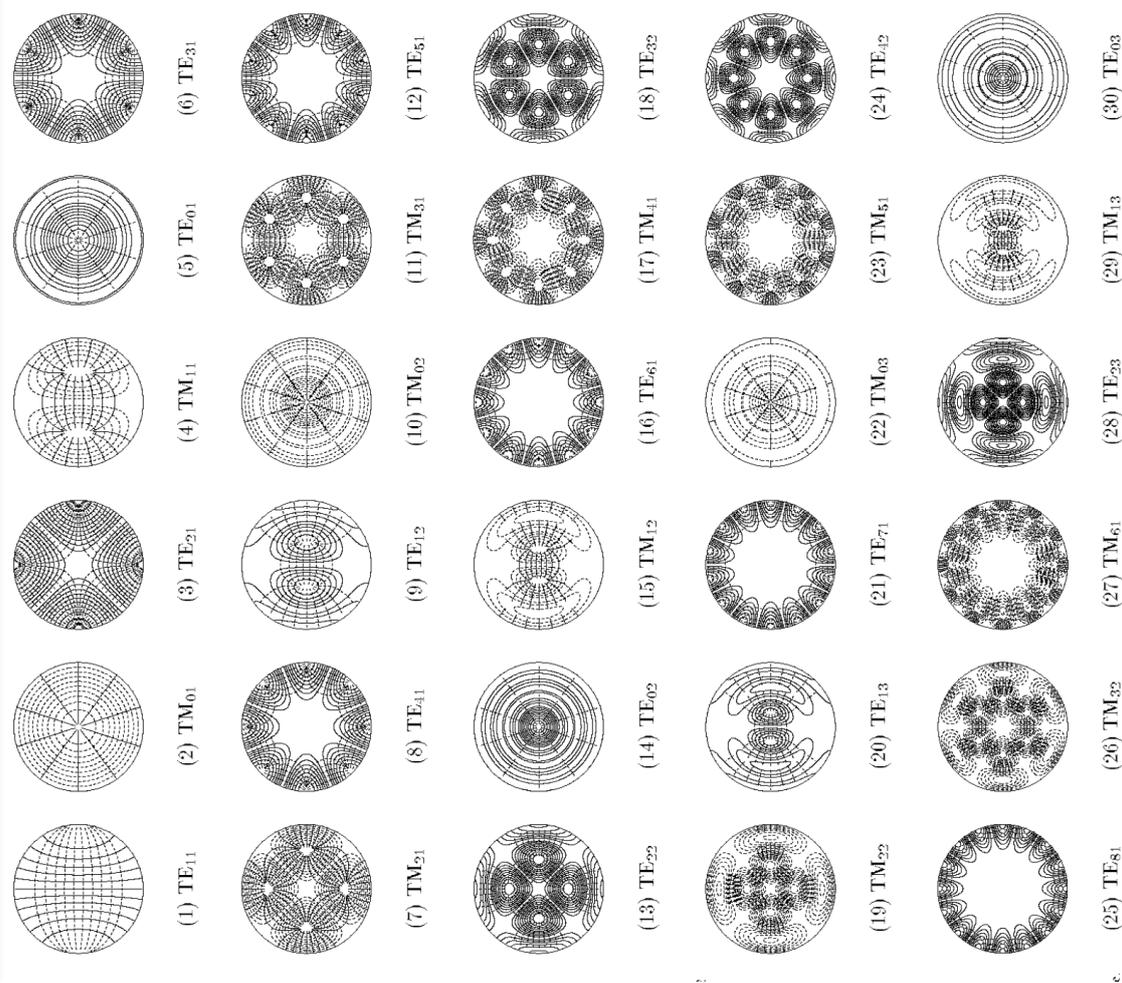


图 1.20: 几个圆柱形波导的低阶正交模。图例取自 C.S. Lee, S.W. Lee, and S.L. Chuang, Plot of Modal Field Distribution in Rectangular and Circular Waveguides, *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques* **33**, 272 (1985). <https://doi.org/10.1109/TMTT.1985.1132998>。

**注** 对圆柱形波导，最低阶的 TE 模为 TE<sub>11</sub> 模，也是所有模式中的最低阶模，称主要模式 (dominant mode)。注意，主要模式不是 TE<sub>01</sub> 模，TE<sub>01</sub> 模为高阶模。但是，TE<sub>01</sub> 模有最低损耗，因此有许多实际应用。最低阶的 TM 模为 TM<sub>01</sub> 模。

**注** 上面提到的 TE<sub>11</sub> 模的截止频率  $\omega_{c,11} = K_{c,11}c = cj'_{1,1}/a$ ，TE<sub>01</sub> 模的截止频率  $\omega_{c,01} = K_{c,01}c = cj'_{0,1}/a$ 。参考下表， $j'_{1,1} = 1.8412$ ， $j'_{0,1} = 3.8317$ 。

$$\mathcal{J}_m(j_{m,k}) = 0$$

	$\mathcal{J}_0(x)$	$\mathcal{J}_1(x)$	$\mathcal{J}_2(x)$	$\mathcal{J}_3(x)$	$\mathcal{J}_4(x)$	$\mathcal{J}_5(x)$
$k = 1$	2.4048	3.8317	5.1356	6.3802	7.5883	8.7715
$k = 2$	5.5201	7.0156	8.4172	9.7610	11.0647	12.3386
$k = 3$	8.6537	10.1735	11.6198	13.0152	14.3725	15.7002
$k = 4$	11.7915	13.3237	14.7960	16.2235	17.6160	18.9801
$k = 5$	14.9309	16.4706	17.9598	19.4094	20.8269	22.2178

$$\mathcal{J}'_m(j'_{m,k}) = 0$$

	$\mathcal{J}'_0(x)$	$\mathcal{J}'_1(x)$	$\mathcal{J}'_2(x)$	$\mathcal{J}'_3(x)$	$\mathcal{J}'_4(x)$	$\mathcal{J}'_5(x)$
$k = 1$	3.8317	1.8412	3.0542	4.2012	5.3175	6.4156
$k = 2$	7.0156	5.3314	6.7061	8.0152	9.2824	10.5199
$k = 3$	10.1735	8.5363	9.9695	11.3459	12.6819	13.9872
$k = 4$	13.3237	11.7060	13.1704	14.5858	15.9641	17.3128
$k = 5$	16.4706	14.8636	16.3475	17.7887	19.1960	20.5755

 **笔记** 表格总结了个别阶第一类贝塞尔函数根的数值解。有时候可能需要贝塞尔函数 (或其导数) 的根的一般近似公式，可参考 [http://www.mhthlab.uwaterloo.ca/courses/me755/web\\_chap4.pdf](http://www.mhthlab.uwaterloo.ca/courses/me755/web_chap4.pdf)

前面 §1.9 介绍过波导模式的正交性与完备性，这里我们针对正交性给出更明确的波导正交关系。

### 定理 1.21. 波导模式的正交性

正交性包含 TE 模或 TM 模内各自不同特征基底间的正交，也包含 TE 模与 TM 模之间的正交。对纵向场分量，有

$$\begin{aligned}
 \text{TM}_{mn,m'n} \quad \iint_A \left( E_z^{(m)} E_z^{(m')} \right) dS &= 0 \quad m \neq m' \\
 \text{TM}_{mn,mn'} \quad \iint_A \left( E_z^{(n)} E_z^{(n')} \right) dS &= 0 \quad n \neq n' \\
 \text{TE}_{mn,m'n} \quad \iint_A \left( H_z^{(m)} H_z^{(m')} \right) dS &= 0 \quad m \neq m' \\
 \text{TE}_{mn,mn'} \quad \iint_A \left( H_z^{(n)} H_z^{(n')} \right) dS &= 0 \quad n \neq n'
 \end{aligned} \tag{1.172}$$

对横向场分量，有

$$\begin{aligned}
 \text{TM}_{mn,m'n} \quad \iint_A \left( \mathbf{E}_{\perp}^{(m)} \cdot \mathbf{E}_{\perp}^{(m')} \right) dS &= 0 \quad m \neq m' \\
 \text{TM}_{mn,mn'} \quad \iint_A \left( \mathbf{E}_{\perp}^{(n)} \cdot \mathbf{E}_{\perp}^{(n')} \right) dS &= 0 \quad n \neq n' \\
 \text{TE}_{mn,m'n} \quad \iint_A \left( \mathbf{H}_{\perp}^{(m)} \cdot \mathbf{H}_{\perp}^{(m')} \right) dS &= 0 \quad m \neq m' \\
 \text{TE}_{mn,mn'} \quad \iint_A \left( \mathbf{H}_{\perp}^{(n)} \cdot \mathbf{H}_{\perp}^{(n')} \right) dS &= 0 \quad n \neq n'
 \end{aligned} \tag{1.173}$$

留意，这里都假设波导无损耗 (lossless waveguide)。

对同一组  $(m, n)$ ，TE 模与 TM 模之间的正交关系，有

$$\begin{aligned}
 \iint_A \left( \mathbf{E}_{\perp, mn}^{\text{TM}} \cdot \mathbf{E}_{\perp, mn}^{\text{TE}} \right) dS &= 0 \\
 \iint_A \left( \mathbf{H}_{\perp, mn}^{\text{TM}} \cdot \mathbf{H}_{\perp, mn}^{\text{TE}} \right) dS &= 0
 \end{aligned} \tag{1.174}$$

此关系对简并模式仍成立。留意，这里都假设波导无损耗 (lossless waveguide)。 □

🔴 **练习 1.21** 针对前面介绍的矩形波导与圆柱形波导，试验证以上定理的结果。 ■

### 1.12.1 波导的激励

细心的读者会发现，前面讨论的矩形波导或圆柱形波导电磁场的解中，总是存在待定系数  $E_0, B_0$ 。由于求解的只是波形问题的特征基底函数，这些待定系数还需要由外部条件决定。换句话说，前面解得的场是假设波导没有任何外部激励源的情况，即空波导。实际应用时，即波导操作在某个特定模式，意味着需要激励波导。波导的激励方式一般有三种：

1. 通过电偶极子，称探针 (probe)；
2. 另一个通过磁偶极子天线 (小电流环)，称环路 (loop)；
3. 第三种是通过小孔耦合 (aperture coupling)。

基本原理是利用电偶极子或磁偶极子产生的电场或磁场尽量与想建立的模式场分布一致。这样可以保证被激励的模式是符合设计预期的，同时也压抑其它模式寄生。下图 1.21 表示几种激励方式。

**注** 关于波导的更多讨论，除一般电磁场或射频/微波教科书外，还可参考工具书 N. Marcuvitz Ed., *Waveguide Handbook*, MIT Radiation Laboratory Series, vol. 10, New York: McGraw-Hill, 1951。

**注** 对波导或谐振腔激励动力学过程感兴趣的读者，可参考经典微波物理教科书，如 Robert

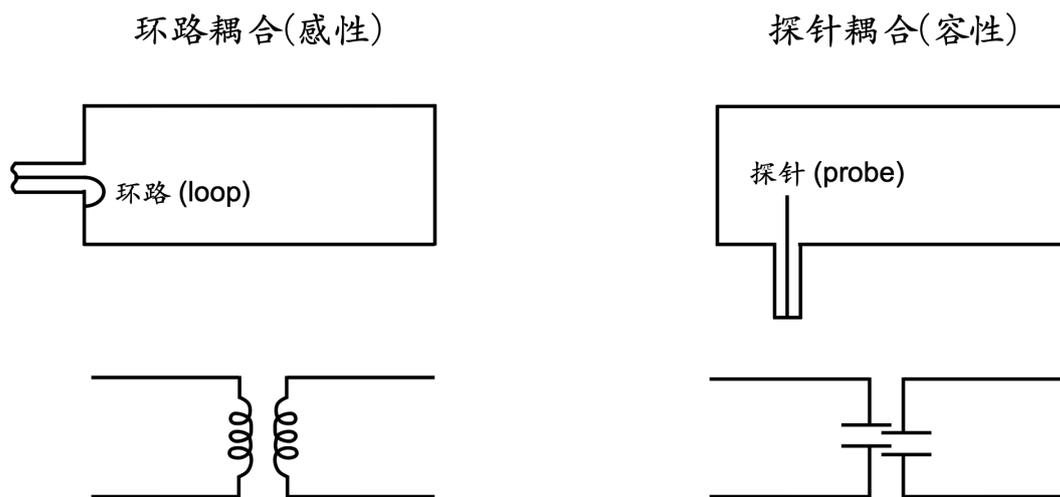


图 1.21: 波导的激励: 环路 (loop) 耦合与探针 (probe) 耦合。

E. Collin, *Field Theory of Guided Waves*, 2nd ed., John Wiley & Sons (1991) 一书的 Chapter 7。基于模式展开的思路可参考两篇经典论文 E.U. Condon, *Electronic Generation of Electromagnetic Oscillations*, *J. Appl. Phys.* **11**, 502-506 (1940). <https://doi.org/10.1063/1.1712802>、E.U. Condon, *Forced Oscillations in Cavity Resonators*, *J. Appl. Phys.* **12**, 129-132 (1941). <https://doi.org/10.1063/1.1712882>。

除了波导模式激励,有时还希望输出最大功率,此时要对激励源的辐射阻抗与波导模式的输入阻抗进行匹配 (impedance matching), 细节此处不论。

## 1.13 谐振腔

上一节介绍的波导是传输时变电磁波的元件。如果要储存时变电磁波，则需要谐振腔 (resonant cavity) 或称共振腔。

### 定义 1.31. 谐振腔 (resonator, cavity)

是储存电磁场能量的一种元件。 □

理想、完美的谐振腔可以视为波导在传播方向两端封上金属墙，形成封闭结构。腔内的模可以视为波导沿  $\pm \hat{z}$  方向传播模的线性叠加。以圆柱波导 TM 模为例，在两端金属墙面 ( $z = 0, z = L$ ) 上，纵向电场  $\tilde{E}_z$  对两端金属墙面而言为法向场，将  $\tilde{E}_z^{+\hat{z}}$  分量与  $\tilde{E}_z^{-\hat{z}}$  分量相加，有

$$\frac{1}{2} (e^{i\kappa_{m,n}z} + e^{-i\kappa_{m,n}z}) = \cos(\kappa_{m,n}z) \quad (1.175)$$

两端金属墙面要求总切向电场  $\tilde{E}_\rho = \tilde{E}_\phi = 0$ ，留意  $\tilde{E}_{\rho,\phi}^{+\hat{z}} \propto (+\kappa_{m,n})e^{+i\kappa_{m,n}z}$  与  $\tilde{E}_{\rho,\phi}^{-\hat{z}} \propto (-\kappa_{m,n})e^{-i\kappa_{m,n}z}$ ，则有

$$\frac{1}{2} (\kappa_{m,n}e^{i\kappa_{m,n}z} - \kappa_{m,n}e^{-i\kappa_{m,n}z}) = i\kappa_{m,n} \sin(\kappa_{m,n}z) \quad (1.176)$$

由上可知，在  $z = 0$  处，总切向电场为零，自动成立。在  $z = L$  处，总切向电场为零即要求

$$\kappa_{m,n}L = \ell\pi \quad \Rightarrow \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \quad (1.177)$$

注意，传播系数  $\kappa_{m,n} = k = i\Gamma$  不再是随频率可变的量，而是被谐振腔结构参数限制的离散的量。

现在，将波导解得的场分量沿  $\pm \hat{z}$  方向的波动因子线性叠加，就能得到谐振腔中的电磁场波形，总结如下：

### 定理 1.22. 矩形谐振腔场形与特性

假设矩形谐振腔横向尺寸为  $a, b$ ，坐标原点取左下角。对  $\text{TM}_{mnl}$  模式，有

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}_z(x, y, z) = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{\ell\pi}{L}z\right) \\ \tilde{H}_z(x, y, z) = 0 \\ \tilde{E}_x(x, y, z) = -\frac{\ell\pi}{K_c^2 L} \frac{m\pi}{a} E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{\ell\pi}{L}z\right) \\ \tilde{E}_y(x, y, z) = -\frac{\ell\pi}{K_c^2 L} \frac{n\pi}{b} E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{\ell\pi}{L}z\right) \\ \tilde{H}_x(x, y, z) = -i\frac{\omega\epsilon}{K_c^2} \frac{n\pi}{b} E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{\ell\pi}{L}z\right) \\ \tilde{H}_y(x, y, z) = i\frac{\omega\epsilon}{K_c^2} \frac{m\pi}{a} E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{\ell\pi}{L}z\right) \end{array} \right. \quad (1.178)$$

其中，谐振频率

$$\frac{\omega}{c} = \frac{\omega_{mnl}}{c} = \pm \left[ \left( \frac{\ell\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (1.179)$$

TM<sub>mnl</sub> 模式要求下标  $m, n$  必须皆为正整数,  $\ell = 0, 1, 2, \dots$ 。

假设矩形谐振腔横向尺寸为  $a, b$ , 坐标原点取左下角。对 TE<sub>mnl</sub> 模式, 有

$$\begin{cases} \tilde{E}_z(x, y, z) = 0 \\ \tilde{H}_z(x, y, z) = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{\ell\pi}{L}z\right) \\ \tilde{E}_x(x, y, z) = -i \frac{\omega\mu}{K_c^2} \frac{n\pi}{b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{\ell\pi}{L}z\right) \\ \tilde{E}_y(x, y, z) = i \frac{\omega\mu}{K_c^2} \frac{m\pi}{a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{\ell\pi}{L}z\right) \\ \tilde{H}_x(x, y, z) = \frac{\ell\pi}{K_c^2 L} \frac{m\pi}{a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{\ell\pi}{L}z\right) \\ \tilde{H}_y(x, y, z) = \frac{\ell\pi}{K_c^2 L} \frac{n\pi}{b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{\ell\pi}{L}z\right) \end{cases} \quad (1.180)$$

其中，谐振频率

$$\frac{\omega}{c} = \frac{\omega_{mnl}}{c} = \pm \left[ \left( \frac{\ell\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (1.181)$$

TE<sub>mnl</sub> 模式允许下标  $m, n$  其中之一为 0,  $\ell = 0, 1, 2, \dots$ 。

转换到时域瞬时量, 可利用  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[ \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \right], \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[ \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \right]$ 。

 **练习 1.22** 试着推导以上结果。 ■

上面提到, 理想、完美的谐振腔可以视为波导在传播方向两端封上金属墙, 形成封闭结构。但这种全封闭的谐振腔在粒子加速器应用中并不实用: 作为加速粒子的谐振腔, 粒子束既没有进入谐振腔、也没有离开谐振腔的出入管道。实际的谐振腔更接近如图 1.22 所示的样子。

实际应用中, 除了矩形谐振腔, 还有圆柱形谐振腔。

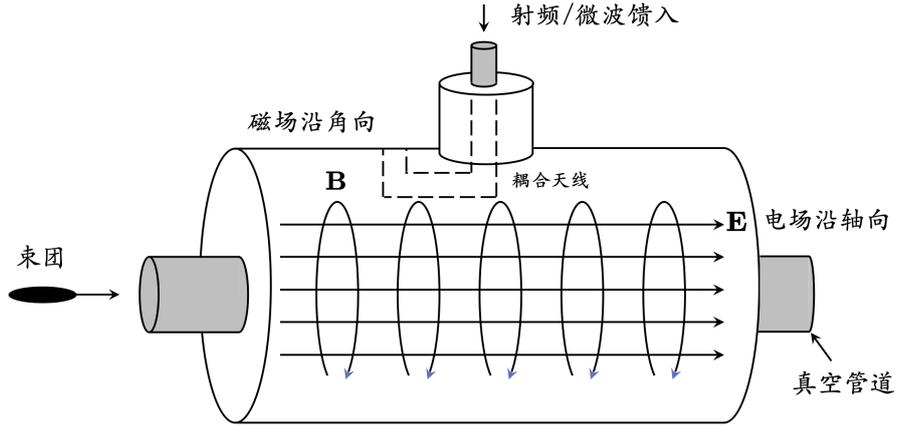


图 1.22: Pillbox 谐振腔示意图。

**定理 1.23. 圆柱 pillbox 谐振腔场形与特性**

参考图 1.22，假设谐振腔圆柱半径为  $a$ ，长  $L$ 。对  $\text{TM}_{mnl}$ ，

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}_z(\rho, \phi, z) = E_0 \mathcal{J}_m \left( j_{m,n} \frac{\rho}{a} \right) \cos \left( \frac{\ell\pi z}{L} \right) e^{-im\phi} \\ \tilde{B}_z(\rho, \phi, z) = 0 \\ \tilde{E}_\rho(\rho, \phi, z) = -E_0 \frac{\ell\pi a}{L j_{m,n}} \mathcal{J}'_m \left( j_{m,n} \frac{\rho}{a} \right) \sin \left( \frac{\ell\pi z}{L} \right) e^{-im\phi} \\ \tilde{E}_\phi(\rho, \phi, z) = -E_0 \frac{im\ell\pi a^2}{L \rho j_{m,n}^2} \mathcal{J}_m \left( j_{m,n} \frac{\rho}{a} \right) \sin \left( \frac{\ell\pi z}{L} \right) e^{-im\phi} \\ \tilde{B}_\rho(\rho, \phi, z) = E_0 \frac{m\omega a^2}{c^2 \rho j_{m,n}^2} \mathcal{J}_m \left( j_{m,n} \frac{\rho}{a} \right) \cos \left( \frac{\ell\pi z}{L} \right) e^{-im\phi} \\ \tilde{B}_\phi(\rho, \phi, z) = E_0 \frac{i\omega a}{c^2 j_{m,n}} \mathcal{J}'_m \left( j_{m,n} \frac{\rho}{a} \right) \cos \left( \frac{\ell\pi z}{L} \right) e^{-im\phi} \end{array} \right. \quad (1.182)$$

转换到时域瞬时量，可利用  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[ \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \right]$ ， $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[ \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \right]$ ，其中，谐振频率

$$\frac{\omega}{c} = \frac{\omega_{mnl}}{c} = \pm \left[ \left( \frac{\ell\pi}{L} \right)^2 + \frac{j_{m,n}^2}{a^2} \right]^{1/2} \quad (1.183)$$

其中， $j_{m,n}$  为第  $m$  阶贝塞尔函数  $\mathcal{J}_m$  的第  $n$  个根，即， $\mathcal{J}_m(j_{m,n}) = 0$ 。对  $\text{TM}_{mnl}$ ，下标要求  $m = 0, 1, 2, \dots$ 、 $n = 1, 2, 3, \dots$ 、 $\ell = 0, 1, 2, \dots$ 。

假设谐振腔圆柱半径为  $a$ ，长  $L$ 。对  $\text{TE}_{mnl}$ ，

$$\begin{cases} \tilde{E}_z(\rho, \phi, z) = 0 \\ \tilde{B}_z(\rho, \phi, z) = B_0 \mathcal{J}_m \left( j'_{m,n} \frac{r}{a} \right) \sin \left( \frac{\ell \pi z}{L} \right) e^{-im\phi} \\ \tilde{B}_\rho(\rho, \phi, z) = B_0 \frac{\ell \pi a}{L j_{m,n}} \mathcal{J}'_m \left( j'_{m,n} \frac{\rho}{a} \right) \cos \left( \frac{\ell \pi z}{L} \right) e^{-im\phi} \\ \tilde{B}_\phi(\rho, \phi, z) = B_0 \frac{im\ell \pi a^2}{L \rho j_{m,n}^2} \mathcal{J}_m \left( j'_{m,n} \frac{\rho}{a} \right) \cos \left( \frac{\ell \pi z}{L} \right) e^{-im\phi} \\ \tilde{E}_\rho(\rho, \phi, z) = -B_0 \frac{m\omega a^2}{\rho j_{m,n}^2} \mathcal{J}_m \left( j'_{m,n} \frac{\rho}{a} \right) \sin \left( \frac{\ell \pi z}{L} \right) e^{-im\phi} \\ \tilde{E}_\phi(\rho, \phi, z) = -B_0 \frac{i\omega a}{j_{m,n}} \mathcal{J}'_m \left( j'_{m,n} \frac{\rho}{a} \right) \sin \left( \frac{\ell \pi z}{L} \right) e^{-im\phi} \end{cases} \quad (1.184)$$

转换到时域瞬时量，可利用  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[ \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \right]$ ， $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[ \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \right]$ ，其中，谐振频率

$$\frac{\omega}{c} = \frac{\omega_{mnl}}{c} = \pm \left[ \left( \frac{\ell \pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{j'_{m,n}}{a} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (1.185)$$

其中， $j'_{m,n}$  为第  $m$  阶导数贝塞尔函数  $\mathcal{J}'_m$  的第  $n$  个根，即， $\mathcal{J}'_m(j'_{m,n}) = 0$ 。对  $\text{TE}_{mnl}$ ，下标要求  $m = 0, 1, 2, \dots$ 、 $n = 1, 2, 3, \dots$ 、 $\ell = 0, 1, 2, \dots$ 。

**证明** 参考 G. Stupakov and G. Penn, *Classical Mechanics and Electromagnetism in Accelerator Physics*, Springer (2018) 一书的 §14.3。 □

**注** 很多时候，圆柱谐振腔又称 pillbox cavity。此处下标顺序  $(m, n, \ell)$  分别对应  $(\phi, \rho, z)$ 。但是在一些少数文献中， $(m, n, \ell)$  分别对应  $(\rho, \phi, z)$ ，宜留意。

 **练习 1.23** 试着推导以上结果。 ■

 **笔记** 一个线上计算矩形或圆柱形谐振腔的谐振频率的实用工具，可参考 [https://learnemc.com/EXT/calculators/Cavity\\_Resonance\\_Calculator/index.html](https://learnemc.com/EXT/calculators/Cavity_Resonance_Calculator/index.html)。

谐振腔储存时变电磁场的能力可以通过品质因数 (quality factor)  $Q$  量化。 $Q$  越大，表示谐振腔储存时变电磁场的能力越好，或者说，时变电磁场能够存在谐振腔中的有效时间越长。

### 定义 1.32. 品质因数

参考图 1.23，谐振腔的品质因数定义为

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = 2\pi \times \frac{\text{储存在谐振腔中的能量 } \mathcal{E}}{\text{一次振荡周期内的能量损失 } U} \quad (1.186)$$

当谐振腔中存在多个模时，如：基模、高次模等，每个模对应自己的品质因数。于

是，描述特定模式谐振腔的品质因数定义为

$$Q_{mnl} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = 2\pi \times \frac{\text{储存在谐振腔中的某个模的能量 } \mathcal{E}_{mnl}}{\text{该模一次振荡周期内的能量损失 } U_{mnl}} \quad (1.187)$$

其中，谐振腔中的模以下标  $mnl$  表征。又可写为  $Q_0$ ，称固有品质因数。 □

由上定义，谐振腔的品质因数还可写成如下形式

$$Q = 2\pi \frac{\mathcal{E}}{U} = 2\pi f_0 \frac{\mathcal{E}}{U f_0} = \omega_0 \frac{\mathcal{E}}{P_d} \quad (1.188)$$

其中， $\omega_0 = 2\pi f_0$  为谐振腔共振频率， $P_d = U/T_0 = U f_0$  为一次振荡周期内的功率损失。

以上关于品质因数的定义相对宽泛不够准确，在射频/微波领域，将区分有载品质因数与外部品质因数，其定义总结如下：

### 定义 1.33. 有载品质因数 $Q_L$ 、外部品质因数 $Q_e$

以上定义的固有品质因数  $Q_0$  可更准确地写为

$$Q_0 = 2\pi \times \frac{\text{储存在谐振腔中的能量 } \mathcal{E}}{\text{一次振荡周期内“在谐振腔内(侧壁)”的能量损失 } U_0} \quad (1.189)$$

强调“在谐振腔内(侧壁)”。在加速器领域，还定义了两个品质因数，其中一个称有载品质因数 (loaded  $Q$ ，有时写做  $Q_L$ )，定义为

$$Q_L = 2\pi \times \frac{\text{储存在谐振腔中的能量 } \mathcal{E}}{\text{一次振荡周期内“全部”的能量损失 } U_L} \quad (1.190)$$

另一个相关品质因数称外部品质因数 (external  $Q$ ，写做  $Q_e$ )，为

$$Q_e = 2\pi \times \frac{\text{储存在谐振腔中的能量 } \mathcal{E}}{\text{一次振荡周期内“泄漏到外部”的能量损失 } U_e} \quad (1.191)$$

由于  $U_L = U_0 + U_e$ ，于是有

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_e} \quad (1.192)$$

### 定义 1.34. 耦合因数 $\beta$

定义为

$$\beta \equiv \frac{Q_0}{Q_e} \quad (1.193)$$

于是有  $Q_0 = (1 + \beta)Q_L$ 。 □

**注** 此处的  $\beta$  不要与洛伦兹相对论归一化速率因子混淆。 □

大致来说，无论是哪一种  $Q$ ，品质因数越大，就表示谐振腔储存时变电磁场的能力越好，或者时变电磁场能够存在谐振腔中的有效时间越长。通过以上定义的  $Q_L$  可以量化谐振腔里的电磁能量如何随时间衰减或泄露，并给出衰减常数。首先，能量改变快慢与“功率”有关，即单位时间内电磁能量改变，可写成  $P_d = -\frac{d\mathcal{E}}{dt}$ ，而  $P_d$  与  $Q_L$  的关系有  $P_d = \omega_0 \mathcal{E}/Q_L$ ，于是

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{\omega_0}{Q_L} \mathcal{E} \quad (1.194)$$

解之，可得

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0)e^{-\frac{\omega}{Q_L}t} \quad (1.195)$$

其中，可量化衰减常数为当能量减少至  $\mathcal{E}(0)$  的  $e^{-1} = 1/e \approx 0.36$  时所需时间，有  $\tau_d = Q_L/\omega_0$ 。

### 性质 1.8. 谐振腔的品质因数

一般而言，微波常温、金属铜谐振腔的  $Q_L \sim 10^4$ 。低温、超导谐振腔的  $Q_L \sim 10^{10}$ 。光学谐振腔的  $Q \sim 10^8 \sim 10^{11}$ 。 $Q$  值越大表示谐振腔储存电磁场的能力越好。

当  $Q_L \gg 1$  或  $\mathcal{E} \ll U$  时，有

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0)e^{-\frac{\omega}{Q_L}t} \quad (1.196) \quad \square$$

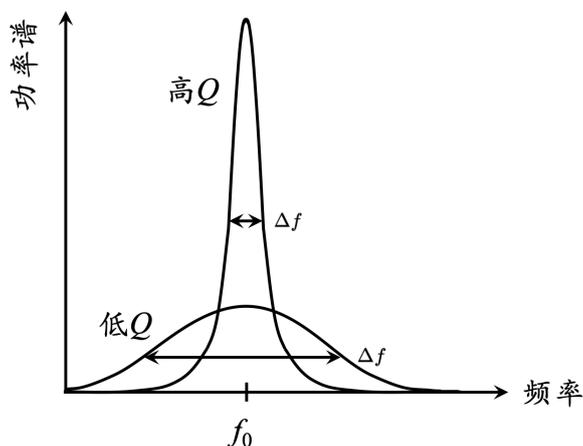


图 1.23: 不同品质因数在谐振腔功率谱的样貌：低  $Q$  谐振腔相对宽谱，高  $Q$  谐振腔相对窄谱。

除了评估谐振腔储存电磁场能力的品质因数外，还有一个重要参量，用来评估在单位损耗时间内，被加速的粒子能够得到的能量增益 (energy gain per unit charge per unit loss)，称分路阻抗 (shunt impedance)。分路阻抗定义如下：

### 定义 1.35. 分路阻抗 (shunt impedance)

定义在单位损耗时间内，被加速的粒子能够得到的能量增益，为

$$R_S \equiv \frac{(\text{单位电荷粒子经过的能量增益})^2}{\text{一次振荡周期内的功率损失}} = \frac{V_{\text{acc}}^2}{P_d} \quad [\text{量纲: } \Omega] \quad (1.197)$$

一般对加速模，希望分路阻抗越大越好；对非加速模或不希望的高阶模，则希望越小越好。

**注** 不同文献对分路阻抗的定义可能稍有不同，有些定义成

$$R_S \equiv \frac{V_{\text{acc}}^2}{2P_d} \quad (1.198)$$

有些其它定义甚至量纲不太一样，为  $\Omega/\text{m}$ 。 □

在粒子加速器领域，常用圆柱型谐振腔来加速粒子，操作在“ $\text{TM}_{010}$  模式”，又称加速模。谐振腔一般操作在 L-band (约 1.3 GHz) 或 S-band (约 3 GHz)；前者加速梯度约在 40-60 MV/m，后者加速梯度约 100-120 MV/m。少数有些操作在 X-band (11.4 GHz)，加速梯度约 150-200 MV/m。操作频率越高，谐振腔结构越紧凑。对  $\text{TM}_{010}$  模，非零分量仅有  $E_z, B_\phi$ 。以下整理一些重要结果：

$$\mathcal{J}'_0 = -\mathcal{J}_1$$

### 性质 1.9. 圆柱形 pillbox 谐振腔 $\text{TM}_{010}$ 特性

对半径  $s$ 、长度  $L$ 、 $\text{TM}_{010}$  模式的圆柱谐振腔，其波形函数有

$$\begin{cases} \tilde{E}_z(\rho, \phi, z) = E_0 \mathcal{J}_0\left(j_{0,1} \frac{\rho}{a}\right) \\ \tilde{B}_z(\rho, \phi, z) = 0 \\ \tilde{E}_\rho(\rho, \phi, z) = 0 \\ \tilde{E}_\phi(\rho, \phi, z) = 0 \\ \tilde{B}_\rho(\rho, \phi, z) = 0 \\ \tilde{B}_\phi(\rho, \phi, z) = E_0 \frac{i\omega a}{c^2 j_{0,1}} \mathcal{J}'_0\left(j_{0,1} \frac{\rho}{a}\right) = -i \frac{E_0}{c} \mathcal{J}_1\left(j_{0,1} \frac{\rho}{a}\right) \end{cases} \quad (1.199)$$

转换到时域瞬时量，可利用  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[ \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega_{010}t} \right]$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[ \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega_{010}t} \right]$ 。

- 谐振频率为

$$\omega_{010} = c \left[ \left( \frac{\ell\pi}{L} \right)^2 + \frac{j_{m,n}^2}{a^2} \right]^{1/2} = j_{0,1} \frac{c}{a} \approx 2.405 \frac{c}{a} \quad (1.200)$$

- 谐振频率与谐振腔半径  $a$  有关，与谐振腔长度  $L$  无关。但实际设计谐振腔时，应考虑  $L = \lambda/2$  与粒子的过渡时间因子 (transit time factor)。
- 品质因数  $Q_0 = \frac{aL}{\delta(a+L)} \propto \sqrt{\omega}$ ，其中， $\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu \sigma}}$  为趋肤深度。
- $\text{TM}_{010}$  模在谐振腔壁上热功率损耗为

$$\begin{aligned} \bar{P}_d &= \frac{1}{2} \iiint \frac{J^2}{\sigma} dV = \frac{1}{2} \iint \frac{K^2}{\sigma_s} dS = \frac{1}{2} \rho_s \iint K^2 dS \\ &= \frac{1}{2} \rho_s \left( \frac{E_0}{\mu_0 c} \right)^2 \left[ 2 \times 2\pi \int_0^a \mathcal{J}_1^2\left(j_{0,1} \frac{\rho}{a}\right) \rho d\rho + 2\pi a L \mathcal{J}_1^2\left(j_{0,1} \frac{a}{a}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \rho_s \frac{E_0^2}{Z_0^2} 2\pi a L \left( 1 + \frac{a}{L} \right) \mathcal{J}_1^2(j_{0,1}) \end{aligned} \quad (1.201)$$

其中， $\frac{1}{2}$  表征时谐场平均， $\rho_s = 1/\sigma\delta_{\text{skin}}$  为表面电阻。上式第二个等号方括弧中的两项分别为前后壁与侧壁的贡献。

- $\text{TM}_{010}$  模在谐振腔中的 (时间平均) 能量为

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{E}}_{\text{TM}_{010}} &= \frac{\epsilon_0}{2} \int dV |E_z|^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^a 2\pi\rho d\rho \int_0^L dz |E_z|^2 \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \pi E_0^2 a^2 L \mathcal{J}_1^2(j_{0,1})\end{aligned}\quad (1.202)$$

- 圆柱型谐振腔  $\text{TM}_{010}$  模的分路阻抗为

$$R_S = \frac{Z_0^2 L}{\pi\rho_s a} \frac{T^2}{(1 + \frac{a}{L}) \mathcal{J}_1^2(j_{0,1})}\quad (1.203)$$

其中,  $j_{0,1} = 2.405$ ,  $T$  为过渡时间因子 (transit time factor)

$$T = \frac{\sin \frac{\theta_g}{2}}{\frac{\theta_g}{2}}, \quad \theta_g = \omega_{\text{RF}} \frac{L}{v_0}\quad (1.204)$$

将在 §8.6 介绍。

**注** 关于  $\text{TM}_{010}$  模在谐振腔中的 (时间平均) 能量计算, 电场的横向分量  $E_\phi, E_\rho$  在谐振腔中都是 0, 所以,  $\text{TM}_{010}$  的非零电场分量只有  $E_z$ 。其实上式已经隐含了磁场贡献的。磁场  $B_\phi$  也贡献了一部分, 事实上, 磁场贡献的量刚好与电场贡献等大。根据讲义定义 1.11, 本来还要算磁场贡献的。但是在时间平均之后, 电场与磁场的平均贡献都减半了。各自减半的电场与磁场能量再加起来, 就看成只算电场但不需要考虑时间平均后的  $\frac{1}{2}$  因子。

圆柱谐振腔  $\text{TM}_{010}$  模的场形如图 1.24。

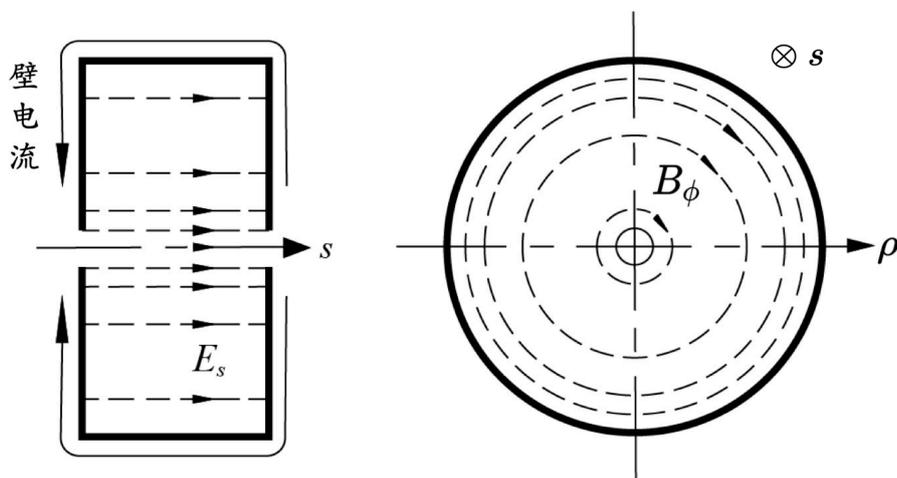


图 1.24: 圆柱谐振腔  $\text{TM}_{010}$  模场形。

**练习 1.24** 推导  $\text{TM}_{010}$  模在圆柱谐振腔中的品质因数  $Q$  与能量  $\bar{\mathcal{E}}_{\text{TM}_{010}}$ 。

**解** 将用到积分公式  $\int_0^1 x dx \mathcal{J}_0^2(bx) = \frac{1}{2} [\mathcal{J}_0^2(b) + \mathcal{J}_1^2(b)]$  与  $\mathcal{J}_0(j_{0,1}) = 0$ 。

**练习 1.25** 利用品质因数的另一种形式定义  $Q_0 = \omega_0 \bar{\mathcal{E}} / \bar{P}_d$ , 对  $\text{TM}_{010}$  模, 可写为

$$Q_0 = \frac{2.405 Z_0}{2\rho_s (1 + \frac{a}{L})} \propto \sqrt{\omega}$$

其中,  $\rho_s = 1/\sigma\delta_{\text{skin}}$  为表面电阻。证明此式与  $Q_0 = \frac{aL}{\delta(a+L)}$  等价。 ■

**解** 将用到积分公式  $\int \mathcal{J}_1^2(ax)xdx = \frac{x^2}{2} [\mathcal{J}_1^2(ax) - \mathcal{J}_0(ax)\mathcal{J}_2(ax)]$ 。 ■

🔥 **练习 1.26** 试估算铜制、 $a = 30 \text{ cm}$ 、 $L = 20 \text{ cm}$ 、 $400 \text{ MHz}$  谐振腔, 其品质因数约在  $10^4$  数量级。 ■

🔥 **练习 1.27** 对矩形或圆柱谐振腔, 腔中的电磁场分量解析形式已经给出, 感兴趣的读者可试着推导几个谐振模的品质因数与对应的分路阻抗。 ■

### 1.13.1 真实谐振腔形状

上面介绍了封闭 pillbox 谐振腔的场形与特性, 属于理想、可解析计算的谐振腔结构。实际的谐振腔除了非完美封闭结构 (完全封闭的结构, 粒子无法穿行其中) 外, 与 pillbox 形状也有些出入。对一般室温 (room-temperature) 谐振腔设计来说, 尺寸限于射频/微波尺寸, 由于趋肤效应, 其品质因数差不多在  $10^4$ , 因此, 目标是尽可能增加其分路阻抗  $R_S$ , 或者, 增加  $R/Q$  比值

$$\frac{R}{Q} = \frac{V_{\text{acc}}^2}{P} \frac{P}{\omega_0 \mathcal{E}} = \frac{V_{\text{acc}}^2}{\omega_0 \mathcal{E}} \propto \sqrt{LC} \frac{1}{C} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (1.205)$$

尽量增加等效电感  $L$  与适当降低等效电容  $C$ 。

设计时常希望此  $R/Q$  比值越大越好。有些文献写做  $R_S/Q$  比值, 这里我们省略下标  $S$ 。

**如何增加等效电感  $L$ ?** 可增加磁场的有效空间, 即设计远离轴外的空间多一些 (胖一些), 于是形成了图 1.25 中的头锥型 (nose cone) 或重入型 (re-entrant) 结构。

**如何降低等效电容  $C$ ?** 在“鼻尖”处附近, 适当修正、优化形状, 可有效减小等效电容, 使整体  $R/Q$  比值更大些。此类设计的限制条件 (“天花板”) 在于腔壁上的热功率损耗与电场在鼻尖处的场致效应。

以上为基于室温谐振腔的设计理念, 对超导谐振腔来说, 关注点不同。在低温 (cryogenic) 情况下, 场致效应可能造成失去超导性的风险, 称为失超 (quench), 因此, 设计尽量使表面平滑, 如图 1.25 的钟型设计, 从而避免尖点可能造成的失超。尽管  $R/Q$  比值相对较低, 但超导谐振腔的品质因数  $Q$  非常高, 约  $10^9 \sim 10^{10}$ 。此类设计的限制条件在于腔壁上的不平滑或杂质可能造成的场致效应。

**注** 室温谐振腔与超导谐振腔的一些区别。对超导谐振腔来说, 由于热损耗功率降低了,  $P_d \propto V_{\text{acc}}^2$ , 加速电压  $V_{\text{acc}}$  可以更高, 并且高阶模式抑制可以设计地更好。此外, 超导谐振

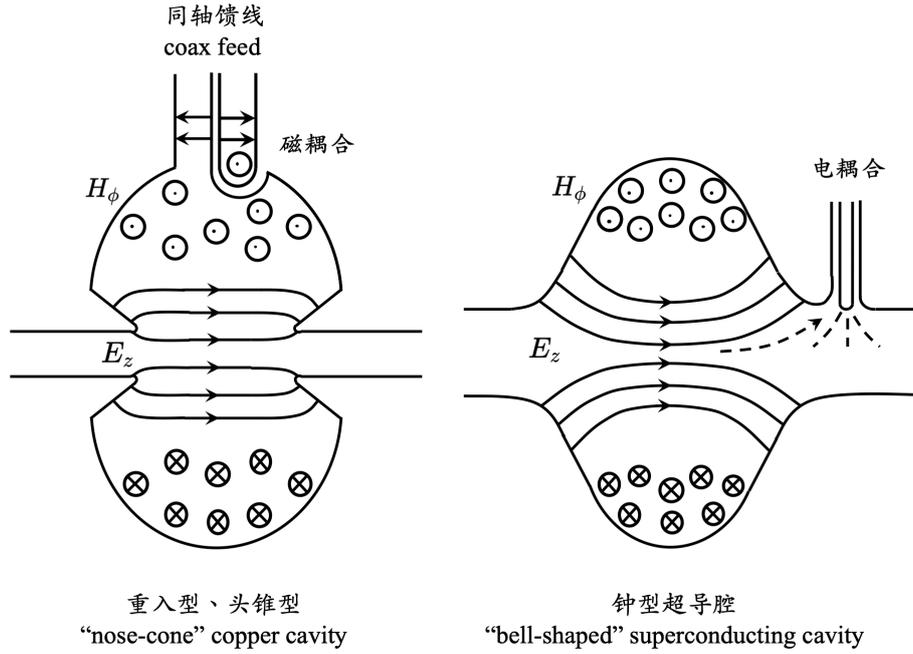


图 1.25: (左) 室温的重入型谐振腔与(右) 低温钟型超导谐振腔。一般来说, 电场较大的区域贡献容性耦合, 磁场较大的区域贡献感性耦合。

腔的  $R/Q$  较低, 表征瞬态束流负载效应较小。与此相对, 室温谐振腔受限于热损耗, 加速电压相对较低, 且  $R/Q$  较高。但是, 室温谐振腔的设计、技术、建造相对简单、成本也较低。

当谐振腔不再是理想的矩形或圆柱形时, 这一节给出的谐振腔的电磁场便不再适用。但是, 如果谐振腔保持圆柱对称, 则在已知对称中心轴上驻波形式的电场  $E_z(\rho = 0, \phi = 0, z)$  或磁场  $B_z(\rho = 0, \phi = 0, z)$  情况下, 利用 Maxwell 方程组, 离轴的横纵向电磁场可以近似得到, 结果总结为如下实用定理:

#### 定理 1.24. 圆柱对称谐振腔的电磁场

对圆柱对称谐振腔, 已知对称中心轴上驻波形式的电场  $E_z(\rho = 0, \phi = 0, z)$ , 则对 TM 模, 离轴的横纵向电磁场有

$$\begin{aligned}
 E_z(\rho, z; t) &\approx \left[ E_z(0, z) - \frac{\rho^2}{4} \left( E_z''(0, z) + \frac{\omega^2}{c^2} E_z(0, z) \right) \right] \sin(\omega t + \phi_0) \\
 E_\rho(\rho, z; t) &\approx \left[ -\frac{\rho}{2} E_z'(0, z) + \frac{\rho^3}{16} \left( E_z'''(0, z) + \frac{\omega^2}{c^2} E_z'(0, z) \right) \right] \sin(\omega t + \phi_0) \quad (1.206) \\
 B_\phi(\rho, z; t) &\approx \left[ \frac{\rho}{2} E_z(0, z) - \frac{\rho^3}{16} \left( E_z''(0, z) + \frac{\omega^2}{c^2} E_z(0, z) \right) \right] \frac{\omega}{c^2} \cos(\omega t + \phi_0)
 \end{aligned}$$

其中,  $' \equiv \partial/\partial z$ ,  $E_z(0, z)$  为轴上的纵向电场分布,  $\phi_0$  为  $t = 0$  时的初始相位。

对圆柱对称谐振腔, 已知对称中心轴上驻波形式的磁场  $B_z(\rho = 0, \phi = 0, z)$ , 则对

TE 模，离轴的横纵向电磁场有

$$\begin{aligned} B_z(\rho, z; t) &\approx \left[ B_z(0, z) - \frac{\rho^2}{4} \left( B_z''(0, z) + \frac{\omega^2}{c^2} B_z(0, z) \right) \right] \cos(\omega t + \phi_0) \\ B_r(\rho, z; t) &\approx \left[ -\frac{\rho}{2} B_z'(0, z) + \frac{\rho^3}{16} \left( B_z'''(0, z) + \frac{\omega^2}{c^2} B_z'(0, z) \right) \right] \cos(\omega t + \phi_0) \\ E_\phi(\rho, z; t) &\approx \left[ \frac{\rho}{2} B_z(0, z) - \frac{\rho^3}{16} \left( B_z''(0, z) + \frac{\omega^2}{c^2} B_z(0, z) \right) \right] \omega \sin(\omega t + \phi_0) \end{aligned} \quad (1.207)$$

其中， $\prime \equiv \partial/\partial z$ ， $B_z(0, z)$  为轴上纵向磁场分布。

**注** 以上表示式假设单模、单频，即  $E_z(0, z; t) = E_z(0, z) \sin(\omega t)$  或  $B_z(0, z; t) = B_z(0, z) \cos(\omega t)$ 。如果不是单频，则  $\omega^2 = -(-i\omega)^2 \rightarrow -\partial^2/\partial t^2$ 。

**证明** 以下仅考虑 TM 模，TE 模类似。利用泰勒展开，将对称中心轴上的场写成  $E_z(\rho = 0, \phi = 0, z, t) = E_{z,0}(z, t) + \rho^2 E_{z,2}(z, t) + \rho^4 E_{z,4}(z, t) + \dots$ 。场满足波方程  $\nabla^2 E_z(\rho, \phi, z, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_z(\rho, \phi, z, t) = 0$ ，于是有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( 2\rho^2 E_{z,2} + 4\rho^4 E_{z,4} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( E_{z,0} + \rho^2 E_{z,2} + \rho^4 E_{z,4} \right) \\ - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( E_{z,0} + \rho^2 E_{z,2} + \rho^4 E_{z,4} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.208)$$

其中， $E_{z,0}$  满足

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E_{z,0}(z, t) = 0 \quad (1.209)$$

$E_{z,2}$  满足

$$E_{z,2}(z, t) = -\frac{\rho^2}{4} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E_{z,2}(z, t) \quad (1.210)$$

利用  $E_{z,2}(z, t) \approx (E_z - E_{z,0})/\rho^2$ ，于是有

$$E_{z,2}(z, t) = -\frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E_{z,0}(z, t) \quad (1.211)$$

$E_{z,4}$  项可按类似思路得到。对  $E_\rho(\rho, z; t)$ ，可以通过电场高斯定律

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\rho) + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (1.212)$$

积分

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\rho) = -\rho \frac{\partial E_z}{\partial z} \Rightarrow \rho E_\rho = -\int_0^\rho \rho \frac{\partial E_z}{\partial z} d\rho \quad (1.213)$$

有

$$\begin{aligned} \rho E_\rho &= -\int_0^\rho \rho \left[ 1 - \frac{\rho^2}{4} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \right] \frac{\partial E_{z,0}}{\partial z} d\rho \\ &= -\left[ \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{16} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \right] \frac{\partial E_{z,0}}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.214)$$

对  $B_\phi(\rho, z; t)$ , 可以通过全电流定律

$$(\nabla \times \mathbf{B})_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \cancel{B_\phi}}{\partial \phi} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (1.215)$$

积分

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\phi) = \frac{\rho}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (1.216)$$

有

$$\begin{aligned} \rho B_\phi &= \int_0^\rho \frac{\rho}{c^2} \left[ 1 - \frac{\rho^2}{4} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \right] \frac{\partial E_{z,0}}{\partial t} d\rho \\ &= \frac{1}{c^2} \left[ \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{16} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \right] \frac{\partial E_{z,0}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.217)$$

**注** 从第 7 章之后 (除第 10 章外), 加速器社群习惯用纵向全域坐标  $s$  替代上面的  $z$  坐标, 即  $E_z(\rho, z; t) \rightarrow E_z(\rho, s; t)$ 。 □

以  $E_z(z) = E_0 \cos(kz)$  为例, 则在  $\text{TM}_{010, \pi}$  模的加速腔中, 有

$$\begin{aligned} E_z(\rho, z; t) &\approx E_0 \cos(kz) \sin(\omega t + \phi_0) \\ E_\rho(\rho, z; t) &\approx \frac{k\rho}{2} E_0 \sin(kz) \sin(\omega t + \phi_0) \\ B_\phi(\rho, z; t) &\approx \frac{\rho\omega}{2c^2} E_0 \cos(kz) \cos(\omega t + \phi_0) \end{aligned} \quad (1.218)$$

其中,  $E_0$  为峰值电场幅值。

**练习 1.28** 根据如上定理结果, 利用近似公式检验法拉第定律与全电流定律。 ■

## 1.14 金属加速结构的梯度极限：击穿

对良导体构成的金属谐振腔，因为不是理想导体，导致有限大的品质因数  $Q < \infty$  与非零的趋肤深度  $\delta > 0$ ，从而电磁场在谐振腔中将耗散。在真实世界中，还有许多效应限制谐振腔中的电磁场振幅上限，或称加速梯度上限，如：

- 在非理想导体谐振腔金属表面附近产生欧姆热效应，根据坡印廷定理<sup>26</sup>，有

$$\langle P_{\text{loss}} \rangle = \frac{\rho_s}{2} \iint_A |H_{\parallel}|^2 dS \quad (1.219)$$

其中， $\rho_s = \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\sigma}} = \frac{1}{\sigma\delta}$  为金属导体表面电阻， $H_{\parallel}$  为沿导体表面的时谐平均磁场<sup>27</sup>。从速调管馈入谐振腔的时变电磁场在有限导电率导体表面会积累热，平均热功率可用上式估算。

- 金属加速结构的梯度极限：RF 击穿 (breakdown)。
- 由于热效应，导致谐振腔结构形变、材料存在非均匀性：Slater 定理。
- 相位失配 (由 transit time factor 量化)、次级电子倍增 (multipacting) 效应<sup>28</sup>、高阶模、散热等。

### 定律 1.4. 常温、金属结构的崩溃/击穿 (breakdown) 场强

对静电场而言，金属电极大约能够承受场强  $E_s$  约有

$$E_s \approx 3 \text{ MV/m} \quad (1.220)$$

对高频时变电磁场，常温、铜金属结构可承受最大场强有如下实验经验公式：

$$E_s \approx 220 \times f^{\frac{1}{3}} [\text{GHz}] \text{ MV/m} \quad (1.221)$$

其中， $f$  为射频电磁场频率， $E_s$  为金属表面附近可承受最大场强，约为轴上加速电场强度的 2.5 倍。

**注** 参考 M.C. Thompson et al., Preliminary results from the UCLA/SLAC ultra-high gradient Cerenkov wakefield accelerator experiment, SLAC-PUB-13117. <https://www.slac.stanford.edu/cgi-bin/getdoc/slac-pub-13117.pdf>. 场致发射与高梯度加速器射频崩溃/击穿的介绍还可以参考 J.W. Wang and G.A. Loew, Field Emission and RF Breakdown in High-Gradient Room-Temperature Linac

<sup>26</sup>

$$\frac{\partial W_{\text{EM}}}{\partial t} = - \oint_A (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} - \iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV$$

其中，等式右边第二项为欧姆热效应。达稳态时， $\partial/\partial t = 0$ ，有

$$\langle P_{\text{loss}} \rangle = \iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV = - \oint_A (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$$

<sup>27</sup>时谐平均场为场振幅的一半。

<sup>28</sup>由于某些原因，从谐振腔表面出现逸出的电子，可能受存在谐振腔中的时变电磁场改变运动轨迹，加速到适当能量 (约 100 eV) 后，轰击到谐振腔金属表面，从而逸出更多电子。当满足一定条件后，形成次级电子倍增。

Structures, SLAC-PUB-7684 (1997). <https://www.slac.stanford.edu/pubs/slacpubs/7500/slac-pub-7684.pdf>

**注** 此为经验定律 (empirical law), 目前尚无坚实的理论依据。

**注** 早期文献里有 Kilpatrick 极限, 给出操作频率与腔体表面最大场强的关系

$$f \text{ [MHz]} = 1.64 E_{\text{pk}} \text{ [MV/m]}^2 \exp\left(-\frac{8.5}{E_{\text{pk}} \text{ [MV/m]}}\right) \quad (1.222)$$

其预测值比目前普遍使用的经验定律低了约五倍。目前 Kilpatrick 极限公式大概对 1 GHz 以上、短激励脉冲不再准确, 因为对更高频、更短激励脉冲涉及不同的崩溃/击穿等物理机制。 □

目前对基于 RF 加速器的加速梯度上限的探索仍在进行中, 存在几种理论模型, 但还没有令人足够满意的预测。由于 RF 崩溃/击穿效应本质上为统计学结果, 即发生崩溃/击穿的位置与时间存在概率分布, 因此目前多倾向以 RF 击穿率 (RF breakdown rate, BDR) 描述, 定义如下:

### 定义 1.36. RF 击穿率

定义为单位长度单个 RF 脉冲导致的击穿率。定标定义不只一种, 常见有

$$\text{BDR} \propto E^{30} t_{\text{pulse}}^5 \quad (1.223)$$

其中,  $t_{\text{pulse}}$  为外部馈入的 RF 脉冲长度。其它还有

$$\text{BDR} \propto e^{\epsilon_0 (E_{\text{acc}})^2 \Delta V / k_B T} \quad (1.224)$$

其中,  $\Delta V$  为腔体内缺陷处的弛豫体积,  $T$  为缺陷处附近温度,  $k_B$  为玻尔兹曼常数,  $\epsilon_0$  为真空介电系数。最近, CERN 给出一个看似更准确的拟合, 基于

$$\text{BDR} \propto S_c^{15} t_{\text{pulse}}^5 \quad (1.225)$$

其中,  $S_c$  为修正的坡印廷向量  $S_c = \text{Re}[S] + g_c \text{Im}[S]$ ,  $g_c \sim 1/6$  为权重因子。

**注** 参考 K. Nordlund and F. Djurabekova, Defect model for the dependence of breakdown rate on external electric fields, Phys. Rev. ST Accel. Beams **15**, 071002 (2012). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.15.071002>、A. Grudiev, S. Calatroni, and W. Wuensch, New local field quantity describing the high gradient limit of accelerating structures, Phys. Rev. ST Accel. Beams **12**, 102001 (2009). <https://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevSTAB.12.102001> □



**笔记** 如果将 RF 场换成激光场, 则频率高了几个数量级, 原则上可以避免崩溃/击穿问题。但是, 激光加速方案将面临其它现实挑战, 如: 束团注入与相位调控等问题。

**定义 1.37. 一个典型的加速腔设计指标**

设计 RF 加速腔时，一方面由于 RF 击穿效应，限制了腔体表面的最大电场强度  $E_{pk}$  (或对应的  $B_{pk}$ )；另一方面由于热效应，限制了最大能馈入 RF 腔的最大功率或加速梯度  $E_{acc}$ 。因此，定义了一个典型的加速腔设计指标为

$$\frac{E_{pk}}{E_{acc}} \quad \text{或} \quad \frac{B_{pk}}{E_{acc}} \quad (1.226)$$

其中，一般典型的取值为  $\frac{E_{pk}}{E_{acc}} \approx 2 \sim 4$  或  $\frac{B_{pk}}{E_{acc}} \approx 4 \text{ mT/MV/m}$ 。

□

## 1.15 谐振腔微扰理论: Slater 定理

当谐振腔受到扰动时, 比如将具有不同材料性质的外来物体引入腔内, 或因为某些原因略微改变谐振腔形状时, 或设计时尚未考虑谐振腔的工作温度等, 腔内的电磁场将相应发生变化。这意味着未扰动前的腔体的所有共振模式会略有改变。分析预测谐振腔微扰如何改变电磁响应是一个经典的电磁学问题, 称谐振腔微扰理论 (cavity perturbation theory), 应用遍及无线电领域、激光光学到纳米光学。谐振腔微扰理论的基本假设为: 受扰动后的谐振腔内的电磁场与扰动前的电磁场只有微小的差异, 可以分别利用原始腔体和扰动后腔体的 Maxwell 方程描述, 仅参考原始未扰动模式 — 而不是扰动后模式, 从而推导出谐振频率偏移或品质因数的变化的解析表示式。

实际应用中, 未受扰动的原始腔体可能就具有复杂的形状, 准确的谐振频率通常需要通过数值模拟程序得出。在此基础上, 估算腔体形状的微小变形对谐振模式频率的影响是非常重要的, 这些变形也可能是由于制造误差或是温度变化等永久或临时扭曲造成的。谐振频率还可以通过施加外力来微调腔体壁的方式进行小幅度调整。此估算公式最初由 MIT 的物理学家 J. Slater 给出, 又称 Slater 定理。

### 定理 1.25. Slater 定理

当谐振腔的腔壁呈现形变, 如果形变对腔内场的影响可以视为一阶微扰  $\Delta\tau$ , 则有如下结果

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \approx \frac{\iiint_{\Delta\tau} (\mu |\mathbf{H}_0|^2 - \epsilon |\mathbf{E}_0|^2) d\tau}{\iiint_{\Delta\tau} (\epsilon |\mathbf{E}_0|^2 + \mu |\mathbf{H}_0|^2) d\tau} \quad (1.227)$$

其中,  $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$  为形变前在谐振腔内的电场、磁场场。这里假设凹入为  $\Delta\tau > 0$ ; 凸出则为  $\Delta\tau < 0$ 。

- 当谐振腔壁呈凹陷状, 即  $d\tau > 0$ ,
  - 凹陷处磁场较大  $\Rightarrow \Delta\omega > 0$ 。
  - 凹陷处电场较大  $\Rightarrow \Delta\omega < 0$ 。
- 当谐振腔壁呈突出状, 即  $d\tau < 0$ ,
  - 突出处磁场较大  $\Rightarrow \Delta\omega < 0$ 。
  - 突出处电场较大  $\Rightarrow \Delta\omega > 0$ 。

**证明** 分别列写变形前后的方程

$$\begin{cases} \nabla \times \tilde{\mathbf{E}}_0 = i\omega_0 \mu \tilde{\mathbf{H}}_0 \\ \nabla \times \tilde{\mathbf{H}}_0 = -i\omega_0 \epsilon \tilde{\mathbf{E}}_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = i\omega \mu \tilde{\mathbf{H}} \\ \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = -i\omega \epsilon \tilde{\mathbf{E}} \end{cases}$$

将  $\tilde{\mathbf{E}}_0^*$ ·(右下式)+ $\tilde{\mathbf{H}}$ ·(左上式)\*, 得

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{E}}_0^* \cdot (\nabla \times \tilde{\mathbf{H}}) + \tilde{\mathbf{H}} \cdot (-\nabla \times \tilde{\mathbf{E}}_0^*) = \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{H}} \times \tilde{\mathbf{E}}_0^*) = -i\omega\epsilon\tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_0^* + i\omega_0\mu\tilde{\mathbf{H}}_0^* \cdot \tilde{\mathbf{H}} \\ \tilde{\mathbf{E}}_0 \cdot (\nabla \times \tilde{\mathbf{H}}_0^*) + \tilde{\mathbf{H}}_0^* \cdot (-\nabla \times \tilde{\mathbf{E}}) = \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{H}}_0^* \times \tilde{\mathbf{E}}) = i\omega_0\epsilon\tilde{\mathbf{E}}_0^* \cdot \tilde{\mathbf{E}} - i\omega\mu\tilde{\mathbf{H}} \cdot \tilde{\mathbf{H}}_0^* \end{cases}$$

相加, 然后等式两边沿形变的谐振腔体积积分, 有

$$\nabla \cdot (\tilde{\mathbf{H}} \times \tilde{\mathbf{E}}_0^*) + \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{H}}_0^* \times \tilde{\mathbf{E}}) = -i(\omega - \omega_0) (\epsilon\tilde{\mathbf{E}}_0^* \cdot \tilde{\mathbf{E}} + \mu\tilde{\mathbf{H}} \cdot \tilde{\mathbf{H}}_0^*)$$

利用散度定理, 等式左边体积分化为面积分

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \oint\!\!\!\oint_A [(\tilde{\mathbf{H}} \times \tilde{\mathbf{E}}_0^*) + (\tilde{\mathbf{H}}_0^* \times \tilde{\mathbf{E}})] \cdot d\mathbf{S} \\ &= \oint\!\!\!\oint_{A-A_0} (\tilde{\mathbf{H}} \times \tilde{\mathbf{E}}_0^*) \cdot d\mathbf{S} = - \oint\!\!\!\oint_{\Delta A} (\tilde{\mathbf{H}} \times \tilde{\mathbf{E}}_0^*) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

其中,  $\oint\!\!\!\oint(\dots) d\mathbf{S}$  对应形变后的谐振腔面积分。根据分界面边界条件, 谐振腔壁面上的切向电场为零——无论是形变前或形变后。对形变后的情况, 非零的法向电场分量  $\tilde{\mathbf{E}}$  与  $\tilde{\mathbf{H}}_0^*$  有  $(\tilde{\mathbf{H}}_0^* \times \tilde{\mathbf{E}}) \cdot d\mathbf{S} = 0$ , 仅剩  $\tilde{\mathbf{H}} \times \tilde{\mathbf{E}}_0^*$  项。对形变前的情况, 非零的法向电场分量  $\tilde{\mathbf{E}}_0^*$  与  $\tilde{\mathbf{H}}$  有  $(\tilde{\mathbf{H}} \times \tilde{\mathbf{E}}_0^*) \cdot d\mathbf{S} \neq 0$ , 更准确地说, 仅在  $A-A_0 = -\Delta A$  面上有值。

等式左边有

$$\text{RHS} = -i(\omega - \omega_0) \iiint_V (\epsilon\tilde{\mathbf{E}}_0^* \cdot \tilde{\mathbf{E}} + \mu\tilde{\mathbf{H}} \cdot \tilde{\mathbf{H}}_0^*) dV$$

合并后, 移项, 有

$$\begin{aligned} \omega - \omega_0 &= \frac{-i \oint\!\!\!\oint_{\Delta A} (\tilde{\mathbf{H}} \times \tilde{\mathbf{E}}_0^*) \cdot d\mathbf{S}}{\iiint_V (\epsilon\tilde{\mathbf{E}}_0^* \cdot \tilde{\mathbf{E}} + \mu\tilde{\mathbf{H}} \cdot \tilde{\mathbf{H}}_0^*) dV} = \frac{\iiint_V (\omega\epsilon\tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_0^* - \omega_0\mu\tilde{\mathbf{H}}_0^* \cdot \tilde{\mathbf{H}}) dV}{\iiint_V (\epsilon\tilde{\mathbf{E}}_0^* \cdot \tilde{\mathbf{E}} + \mu\tilde{\mathbf{H}} \cdot \tilde{\mathbf{H}}_0^*) dV} \\ \Rightarrow \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} &\approx \frac{\iiint_V (\mu|\tilde{\mathbf{H}}_0|^2 - \epsilon|\tilde{\mathbf{E}}_0|^2) dV}{\iiint_V (\mu|\tilde{\mathbf{H}}_0|^2 + \epsilon|\tilde{\mathbf{E}}_0|^2) dV} = \frac{w_m - w_e}{w_{\text{EM}}} \frac{\Delta\tau}{\tau_0} \end{aligned}$$

□



**笔记** 检视以上分析是否适用于考虑趋肤效应, 如何修正以完整考虑趋肤效应?

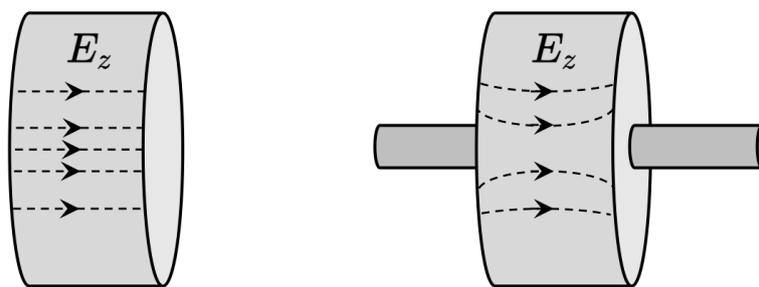


**笔记** 考虑如图 1.26 的情况, 利用 Slater 定理可知, 对  $\text{TM}_{010}$  模式, 有  $\Delta\omega > 0$ 。

上述思路其实考虑的是谐振腔腔壁的凸起或凹入, 属于形状微扰 (shape perturbation), 还可以考虑谐振腔填充材料的差异, 即材料微扰 (material perturbation)。



**练习 1.29** 作为练习, 推导媒质材料微扰导致的谐振频率偏差。 ■

TM<sub>010</sub> 模

$$\Delta\omega_{\text{TM}_{010}} > 0$$

图 1.26: (左) 理想的饼干盒谐振腔模型与 (右) 实际具有开孔的谐振腔模型。

解

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = -\frac{\iiint_V (\Delta\mu \tilde{\mathbf{H}} \cdot \tilde{\mathbf{H}}_0^* + \Delta\epsilon \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_0^*) dV}{\iiint_V (\mu \tilde{\mathbf{H}} \cdot \tilde{\mathbf{H}}_0^* + \epsilon \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_0^*) dV} \approx -\frac{\iiint_V (\Delta\mu |\tilde{\mathbf{H}}_0|^2 + \Delta\epsilon |\tilde{\mathbf{E}}_0|^2) dV}{\iiint_V (\mu |\tilde{\mathbf{H}}_0|^2 + \epsilon |\tilde{\mathbf{E}}_0|^2) dV} \quad (1.228)$$

■

类似于波导，谐振腔的激励方式也分为电激励与磁激励。下图 1.27 表示针对 TM<sub>010</sub> 模的两种激励方式。

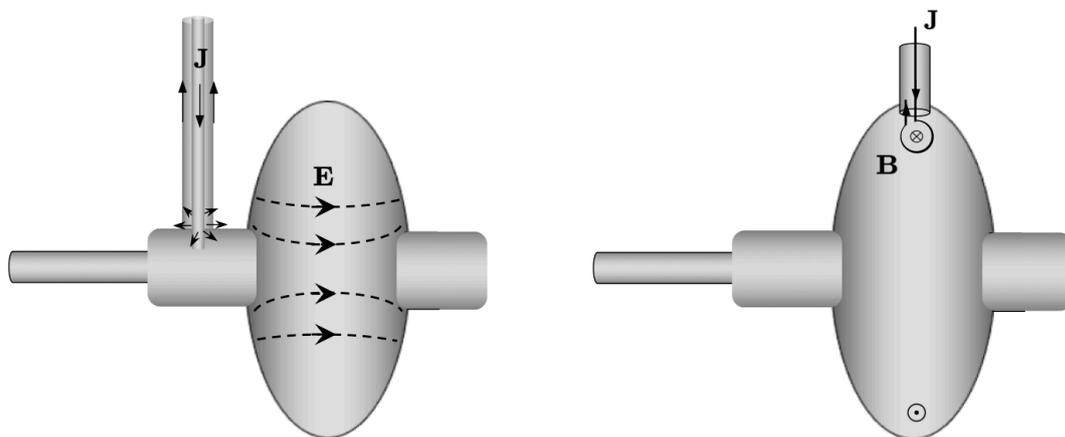


图 1.27: TM<sub>010</sub> 模的两种激励方式。



**笔记** 从现在观点看，分析谐振腔由于形变或介质不均匀导致的谐振频率偏移除了 Slater 定理，还已经发展出一套更准确、系统的理论，称谐振腔微扰理论 (cavity perturbation theory 或 general perturbation theory)。感兴趣的读者可参考 D. Meidlinger, A General Perturbation Theory for Cavity Mode Field Patterns, Proceedings of SRF2009 (THPPO05). <https://accelconf.web.cern.ch/srf2009/papers/thppo05.pdf>。

## 1.16 四向量的洛伦兹变换

狭义相对论的两个基本原则：

1. 相对性原理  $\Rightarrow$  惯性坐标系中的物理定律都是一致的。
2. 光速不变原理  $\Rightarrow$  真空中的所有惯性坐标系的电磁传播速率皆为  $c$ 。

由狭义相对论中的光速不变原理，时间与空间具有同等地位。假设空间是各向同性 (isotropic) 且时空是均匀 (homogeneous) 的，则惯性系间的时空坐标变换是线性的，称洛伦兹<sup>29</sup>变换 (Lorentz transformation)。

### 定义 1.38. 位置坐标的洛伦兹变换 (Lorentz transformation)

考虑如图 1.28，两坐标系  $K, K'$  的  $z, z'$  轴重合，其中， $K'$  坐标系以  $v$  速度沿  $z$  方向移动。由  $K'$  至  $K$  的洛伦兹坐标变换定义如下：

$$\begin{aligned}x &= x' \\y &= y' \\z &= \gamma(z' + \beta ct') \\t &= \gamma\left(t' + \beta \frac{z'}{c}\right)\end{aligned}$$

其中， $\beta = \frac{v}{c}$ ,  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 。

写成矩阵形式有

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & \beta\gamma \\ 0 & 0 & \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = \mathbf{L} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} \quad (1.229)$$

**注** 由  $K$  至  $K'$  的洛伦兹坐标变换可以通过寻找上面逆矩阵得到，或者，将上面  $\beta$  改为  $-\beta$ ，然后  $t'$  对调也可以。 □

**注** 以上变换矩阵  $\mathbf{L}$  也可以针对位置坐标  $(x, y, z, ct)$  以外的物理量进行变换，只要它们形成四向量 (four vector)。

四向量内积 (inner product) 在洛伦兹变换中形成不变量 (invariant)，此不变量不随坐标系的选择而改变。如，位置四向量  $\mathbb{X} = (\mathbf{r}, ct) = (x, y, z, ct)$  的不变量有  $c^2t^2 - |\mathbf{r}|^2$ 。

除了位置四向量，许多物理量也可以配对形成四向量，如：

- 粒子速度与光速形成四向量  $(\mathbf{v}, c) = (v_x, v_y, v_z, c)$ 。
- 电荷量本身为不变量，但电荷密度与电流密度各自不是不变量，两者形成四向量

<sup>29</sup>H.A. Lorentz 由于 Zeeman 效应，与 P. Zeeman 在 1902 年共同获得诺贝尔物理学奖。

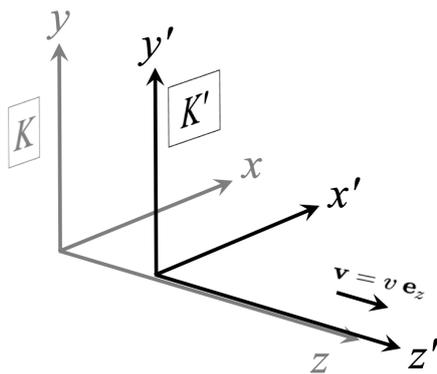


图 1.28: 洛伦兹变换。

$\mathbb{J} = (\mathbf{J}, c\rho) = (J_x, J_y, J_z, c\rho)$ 。若定义四维算子  $\square \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right)$ ，则电荷电流连续方程  $\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  可以写为  $\square \cdot \mathbb{J} = 0$ 。

- 粒子动量与能量形成四向量  $\mathbb{P} \equiv (p_x, p_y, p_z, \frac{E}{c})$ 。考虑  $\hbar\mathbb{K}$ ，则形成的不变量即光子数守恒。
- 波数与频率形成四向量  $\mathbb{K} \equiv (k_x, k_y, k_z, \frac{\omega}{c})$ 。若定义相位  $\phi \equiv \mathbb{K} \cdot \mathbb{X} = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ ，会发现相位是一个不变量。
- 向量磁位与标量电位也可结合形成四向量  $\mathbb{A} \equiv (A_x, A_y, A_z, \frac{\varphi}{c})$ 。洛伦兹规范  $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$  可以写为  $\square \cdot \mathbb{A} = 0$ 。



**笔记** 留意一下，以上写出来的洛伦兹变换用的是“先向量、再标量”的惯例，在加速器领域为常见惯例。我们还可以利用四向量，将 Maxwell 方程组写成与坐标系无关，漂亮、简洁的协变 (covariant) 形式。依循多数电动力学教科书惯例，下面我们采用“(0,1,2,3)”惯例，其中，0 表示标量惯例，即“先标量、再向量”的惯例。略去推导，这里仅欣赏其结果：

$$\partial_\mu \mathbb{F}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathbb{F}^{\mu\nu}}{\partial \mathbb{X}^\mu} = \mu_0 \mathbb{J}^\nu, \quad \partial_\mu \mathbb{G}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathbb{G}^{\mu\nu}}{\partial \mathbb{X}^\mu} = 0 \quad (1.230)$$

其中， $(\mu, \nu) = 0, 1, 2, 3$  分别表示四向量的四个分量， $\mathbb{X}^\mu = (X^0, X^1, X^2, X^3) = (ct, x, y, z)$ ， $\mathbb{J}^\mu = (J^0, J^1, J^2, J^3) = (c\rho, J_x, J_y, J_z)$ 。第一个方程结合了电的高斯定律与全电流定律，第二个方程结合了磁的高斯定律与法拉第定律，其中， $4 \times 4$  电磁张量  $\mathbb{F}, \mathbb{G}$  有

$$\mathbb{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.231)$$

与

$$\mathbb{G}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z/c & -E_y/c \\ B_y & -E_z/c & 0 & E_x/c \\ B_z & E_y/c & -E_x/c & 0 \end{pmatrix} \quad (1.232)$$

可试着将以上协变式展开，将得到 Maxwell 方程组。对更多细节感兴趣的读者，可参考电动力学教科书，细节此处不论。

## 1.17 电、磁场的洛伦兹变换

**定理 1.26. 电磁场的洛伦兹变换**

虽然电磁场不形成四向量，但是它们之间的洛伦兹变换也可以通过对位置坐标的洛伦兹变换得到，有

$$E_z = E'_z, \quad \mathbf{E}_\perp = \gamma(\mathbf{E}'_\perp - \mathbf{v} \times \mathbf{B}') \quad (1.233)$$

$$B_z = B'_z, \quad \mathbf{B}_\perp = \gamma\left(\mathbf{B}'_\perp + \frac{1}{c^2}\mathbf{v} \times \mathbf{E}'\right) \quad (1.234)$$

其中，两坐标系  $K, K'$  的  $z, z'$  轴重合，其中， $K'$  坐标系以  $v$  速度沿  $z$  方向移动，参考图 1.28。

**注** 电磁场满足的变换矩阵为反对称二阶张量 (anti-symmetric, 2nd-rank tensor)。 □

将以上向量形式写成矩阵形式，有

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ cB_x \\ cB_y \\ cB_z \end{pmatrix}_K = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & 0 & \beta\gamma & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta\gamma & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ cB_x \\ cB_y \\ cB_z \end{pmatrix}_{K'} \quad (1.235)$$

**练习 1.30** 试着推导以上结果。 ■

**笔记** 有时候，分析电磁辐射特性时，会在实验室静止坐标与电子束质心移动坐标间变换。其中，将电磁波视为光子时，光子数在两坐标系间为不变量。由波数与频率的洛伦兹变换知，光子频率会改变，但是光子数不变。

**性质 1.10. 光子数守恒为洛伦兹不变量**

在  $K, K'$  坐标系中，光子数守恒，为洛伦兹不变量。

**注** 成立前提：光子(或电磁波)没有碰到电子，即没有碰到物质。 □

## 1.18 相对论多普勒效应

相对论多普勒效应 (relativistic Doppler effect) 为描述光或辐射场由于波源 (如: 被加速的电子) 与观察者的相对运动关系而导致的频率或波长的变化。与大学物理学过的 (非相对论) 多普勒效应, 这里多考虑了狭义相对论带来的效应, 总结如下:

### 定理 1.27. 相对论多普勒效应

参考图 1.29, 考虑在移动坐标系 ( $t$ ) 中, 电磁场传播相对方向为  $\cos \theta' = \frac{k'_z}{k'}$ , 则在实验室静止坐标系中, 有

$$\tan \theta = \frac{k_y}{k_z} = \frac{k'_y}{\gamma(k'_z + \beta \frac{\omega'}{c})} = \frac{\sin \theta'}{\gamma(\cos \theta' + \beta)} \Rightarrow \theta \lesssim \frac{1}{\beta\gamma} \quad (1.236)$$

$$\omega = \frac{\omega'}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)} \approx \frac{2\gamma\omega'}{1 + \gamma^2\theta^2} \Rightarrow \omega \sim 2\gamma\omega' \quad (1.237)$$

其中, 假设  $\gamma \gg 1, \beta \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2}, \cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ 。

**证明** 图 1.30 给出  $\theta'$  至  $\theta$  的函数关系, 可以看到, 在大范围内  $\theta$  落在虚线  $1/\beta\gamma$  内, 证实了  $\theta \lesssim \frac{1}{\beta\gamma}$ 。

**注** 以上推导假设  $\omega' = ck'$ , 即在移动坐标系中, 必须是时变电磁场。在移动坐标系中的静电场不适用。

**笔记** 更多讨论可参考 [https://en.wikipedia.org/wiki/Relativistic\\_Doppler\\_effect](https://en.wikipedia.org/wiki/Relativistic_Doppler_effect)

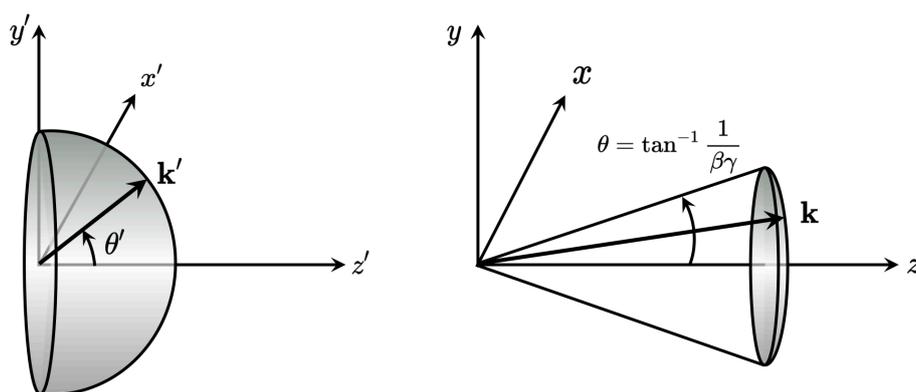


图 1.29: 相对论多普勒效应: (左) 移动坐标系; (右) 实验室坐标系。

**练习 1.31** 作为练习, 试推导洛伦兹转换的波数向量, 与纵向  $k_z, k'_z$  夹角  $\theta, \theta'$  有以下关系:

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta} \quad \sin \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)}$$

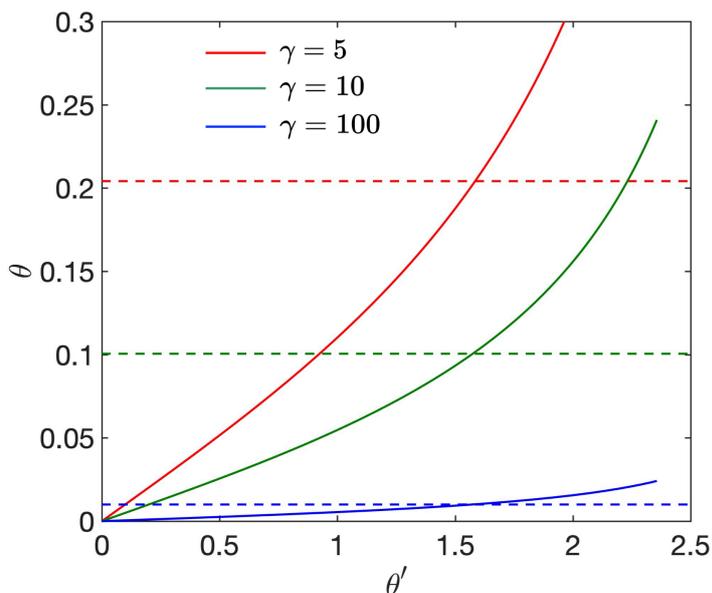


图 1.30: 不同相对论速度下, 移动坐标系的  $\theta'$  与实验室静止坐标系的  $\theta$  之间的对应关系, 虚线为  $1/\beta\gamma$ 。

**练习 1.32** 假设在移动坐标系中, 电子辐射产生单位立体角光子数有

$$\frac{dN}{d\Omega'} = f(\theta', \phi')$$

证明在实验室静止坐标系中, 有

$$\frac{dN}{d\Omega} = \frac{f(\theta', \phi')}{\gamma^2(1 - \beta \cos \theta)^2}$$

■

高能电子产生的电磁辐射与相对论多普勒效应紧密相关, 将在后面章节介绍。这里仅给出定性结论: 当粒子能量很大时,  $\gamma \gg 1$ , 在实验室静止坐标系中, 电磁辐射的张角很小, 并且仅与电子的能量洛伦兹因子  $\gamma$  有关, 为  $\theta \sim \frac{1}{\gamma}$ 。此外, 在实验室静止坐标系中观察到的电磁辐射频率比在移动坐标系中的频率高得多, 与  $\gamma$  成正比, 为  $\omega \sim 2\gamma\omega'$ 。

以上的多普勒效应为寻常多普勒效应, 在一些文献中可能会看到“反常”多普勒效应 (anomalous Doppler effect), 简短介绍如下。当定向传播的电磁波所处的环境不再是自由空间, 而是折射率为  $n = \sqrt{\text{Re} \epsilon(\omega)}$  的介质中时, 则以上公式中的  $\beta$  前方应乘上  $n$ , 于是有

$$\omega = \frac{\omega'}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)} \rightarrow \frac{\omega'}{\gamma(1 - n\beta \cos \theta)} \quad (1.238)$$

具体来说, 当  $n\beta \cos \theta < 1$  时, 称寻常多普勒效应; 当  $n\beta \cos \theta > 1$  时, 称反常多普勒效应。目前来说, 对反常多普勒效应机制的研究相对较少, 其应用也较少被发掘。对此感兴趣的读者, 请自行参考相关文献。

## 1.19 康普頓散射

对电子来说，其静止能量为 511 keV。大学物理学过，电磁辐射场能量 — 即，光子能量  $E_\gamma$  — 与辐射频率或波长的关系有

$$E_\gamma [\text{keV}] = h\nu = \hbar\omega = \frac{1.24}{\lambda [\text{nm}]} \quad (1.239)$$

对 X 射线而言，波长约为  $1 \text{ \AA} = 0.1 \text{ nm}$ ，对应的光子能量为 12.4 keV。当光子与静止的电子对撞时，或称光子-电子散射，电子将获得能量，同时能量改变了的光子，其对应波长将改变 (变长)。此效应称康普頓散射效应 (Compton scattering effect)，参考图 1.31。

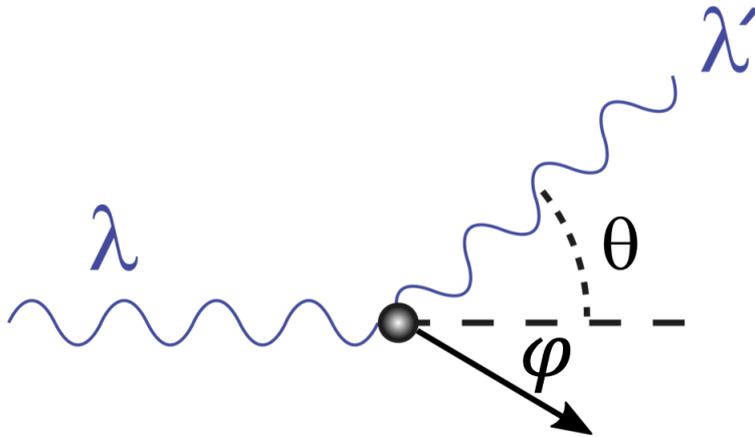


图 1.31: 康普頓散射效应。

### 定理 1.28. 康普頓散射效应

结合光电效应和狭义相对论可用来量化此效应，利用动量与能量守恒，得出康普頓频移公式如下：

$$\lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos \theta) \quad (1.240)$$

其中， $\lambda'$  表示散射后的物理量。康普頓散射前后光子能量改变公式：

$$E_{\gamma'} = \frac{E_\gamma}{1 + (E_\gamma/m_e c^2)(1 - \cos \theta)} \quad (1.241)$$

其中，

- $\lambda$  为电磁辐射入射波长
- $\lambda'$  为电磁辐射散射波长
- $\lambda_C = \frac{h}{m_e c}$  称电子的康普頓波长，有  $\lambda_C \approx 2.4310^{-12} \text{ m}$
- $\theta$  为散射角
- $E_\gamma$  为入射电磁辐射能量
- $E_{\gamma'}$  为散射电磁辐射能量

**证明** 假设散射后的电子动量为  $p$ 。利用动量守恒，在水平方向

$$\hbar k = p \cos \phi + \hbar k' \cos \theta \quad (1.242)$$

在垂直方向

$$0 = p \sin \varphi - \hbar k' \sin \theta \quad (1.243)$$

利用能量守恒

$$\hbar ck + m_e c^2 = \hbar ck' + \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4} \quad (1.244)$$

化简以上方程即得证。 □



**笔记** 以前中学时还学过汤姆孙散射 (Thomson scattering), 两者有些区别。汤姆孙散射为弹性散射 (elastic scattering) 过程, 可视为康普頓散射的光子低能量极限情况 (或电子的无限大质量情况), 即  $E_\gamma \ll m_e c^2$ 。或者是, 电磁波的波长比“电子的”康普頓波长  $\lambda_C = \frac{h}{m_e c} \approx 2.4310^{-12} \text{ m}$  长得多的情况。汤姆孙散射假设电子质量无穷大, 因此在散射过程中, 光子自己的能量和动量都守恒, 散射光的频率与入射光相同。但是, 康普頓散射考虑了电子的质量和运动, 因此光子在散射后, 能量和动量都发生变化, 散射光的频率比入射光频率低 (红移)。

### 1.19.1 逆康普頓散射

在粒子加速器中, 利用激光 (即指向性好、接近单频的电磁辐射) 与储存在环形加速器中绕行的高能电子对撞, 也就是使电磁辐射场与电子产生散射, 使光子获得能量而电子损失能量, 从而产生更高频率或更高能量的光子。这个过程称逆康普頓散射 (inverse Compton scattering, ICS)。近年有关于非线性康普頓散射效应 (nonlinear inverse Compton scattering, NICS) 的研究, 又称多光子康普頓散射 (multiphoton Compton scattering), 即利用多个低能量的光子与相对论电子对撞, 产生一个高能量光子。此过程涉及电子吸收光子, 故为非线性效应。

### 1.19.2 激光与电子交互作用: 定性介绍

在电子加速器领域, 有一个分支为研究强激光与电子交互作用, 设法将电子的能量转移到辐射场 (即光子), 使光子能量增加, 即辐射场波长变短。希望用相对廉价的电子, 想办法将长波长辐射场 (或低能量光子) “换成”短波长辐射场 (或高能量光子)。

高能量、高通量、高品质的光子稀有且珍贵。

这里定性介绍激光与电子交互作用的机制。

大二电磁学课程学过, 激光具有单色性, 可近似视为单频电磁波。电磁波与电子交互作用, 在自由空间中, 电子受周期、时谐形式的电场调制, 将跟着电磁波的频率振荡。电子振荡过程与激光场存在能量交换, 可能获得能量也可能失去能量。激光场强决定电场振幅, 当激光场强不太大时, 电子振荡就像简谐振荡, 半个周期得到能量, 半个周期失去能量, 振荡周期平均后, 净能量不变。这个过程一般称汤姆孙散射 (Thomson scattering)。

当激光场强增加，电子在振荡过程获得足够多的能量时，粒子速度将接近光速，在振荡过程回头时将产生辐射场。此时电子的振荡运动不再能用简谐振荡描述，需要更细致的考虑。粒子速度接近相对论速度，经历激光场的横向非均匀磁场分量后，将在纵向方向导致一种振荡，称有质动力运动 (ponderomotive motion)。此时分析还需要考虑电子产生电磁辐射的效应。

当激光场强再进一步增加时，电子来回振荡产生足够强的辐射后，当产生的辐射场的动量与电子自身动量差不多时，不仅需要考虑产生的辐射场，还需要考虑辐射后座力 (radiation reaction)。一般来说，衡量是否需要考虑辐射后座效应的物理量定义如下，称归一化向量位函数 (normalized vector potential)

$$a = \frac{q|\mathbf{A}|}{m_e c} \quad (1.245)$$

其中， $\mathbf{A}$  为向量位函数，与外部激光强度有关。当  $a \ll 1$  时，为汤姆孙散射；当  $a \leq 1$ ，需要考虑电子振荡的辐射效应；当  $a \geq 1$  时，需要同时考虑电子振荡产生的辐射与电子的辐射后座力效应，此时称激光的相对论区间 (relativistic regime)，一般对应激光强度约  $10^{18} \text{ W/cm}^2$ 。关于  $a$  的实用单位表示式可写成

$$a \approx \left( \frac{I_{\text{laser}} [\text{W/cm}^2]}{1.37 \times 10^{18}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \lambda [\mu\text{m}] \quad (1.246)$$

**注** 有些文献定义归一化向量位函数为

$$a = \frac{q|\mathbf{A}|}{m_e c^2} \quad (1.247)$$

差一个光速  $c$  是由于采用 CGS/高斯单位制。

### 1.19.3 激光波荡器

波荡器辐射将在第5章介绍。简单来说，波荡器是一种电磁部件，由一连串周期性二极磁铁组成，当带电粒子(如：电子)经过波荡器时，由于周期二极磁场，粒子将做周期扭摆运动。由于电子扭摆运动为加速运动，粒子将产生辐射，称波荡器辐射 (undulator radiation)。尽管在实验室坐标中，波荡器为周期改变的静磁场，但由电、磁场的洛伦兹变换可知，在移动坐标系的粒子看到的波荡器场其实是周期电磁场。激光作为接近单频的电磁场，可视为一种特殊的波荡器，称激光波荡器 (laser undulator)。以下先给出激光波荡器的等效波荡器参数  $K$  与等效波荡器周期  $\lambda_u$  的表示式。更多关于波荡器辐射的讨论可参考第5章或其导致的集体效应——自由电子激光——将在第10章介绍。

#### 定理 1.29. 激光波荡器的等效波荡器参数

其等效  $K$  值有

$$K_L = \frac{eE_0}{mc^2 k_L} = \sqrt{\frac{2r_e I_{\text{laser}}}{\pi mc^3}} \lambda_L \approx 8.9 \times 10^{-10} \lambda_L [\mu\text{m}] \sqrt{I_{\text{laser}} [\text{W/cm}^2]} \quad (1.248)$$

一般来说， $K_L \ll 1$ 。其中，

- $E_0$  为激光电场振幅

- $k_L = 2\pi/\lambda_L$  为激光波数、波长
- $r_e$  为电子经典半径
- $I_{\text{laser}}$  为激光强度

电子看到的波荡器波长  $\lambda_u$  与电子束与激光束夹角有关，有

$$\lambda_u = \frac{\bar{\beta}_z \lambda_L}{1 + \bar{\beta}_z \cos \Psi} \quad (1.249)$$

其中， $\bar{\beta}_z$  为电子纵向平均速度， $\Psi$  为激光传播方向  $\mathbf{k}_L$  与电子束夹角（锐角）。

**注** 此处  $K_L$  其实就是上一小节介绍的无量纲  $a$ 。

**证明** 可由洛伦兹力方程得到。参考 Kwang-Je Kim, Zhirong Huang, and Ryan Lindberg, *Synchrotron Radiation and Free-Electron Lasers – Principles of Coherent X-Ray Generation*, Cambridge University Press (2017) 一书的 §2.5.4。 □

**注** 以平面波近似，激光束强度与激光电场振幅之间可以通过下式关联

$$I_{\text{laser}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_{\text{laser}}^2 \quad \Rightarrow \quad E_{\text{laser}} = \sqrt{\frac{2I_{\text{laser}}}{c\epsilon_0}} \quad (1.250)$$

写成实用公式，有

$$E_{\text{max,laser}} [\text{V/m}] \approx 27.45 \sqrt{I_{\text{laser}} [\text{W/m}^2]} \quad (1.251)$$

此振幅应视为峰值振幅，如果是 rms 振幅，则为  $E_{\text{rms,laser}} = E_{\text{max,laser}}/\sqrt{2}$ 。磁场强度估算可利用平面波近似  $E = cB$ 。

**练习 1.33** 假设有一激光束强度为  $2.5 \times 10^{14} \text{ W/m}^2$ ，估算其电场振幅。 ■

**解**

$$E_{\text{max,laser}} \approx 4.34 \times 10^8 [\text{V/m}], \quad B_{\text{max,laser}} \approx 1.43 [\text{T}] \quad \blacksquare$$

### 1.19.4 浅谈：电磁辐射场的散射截面

读者应该留意到这一节标题的一词“散射”。从图 1.31 看，散射的物理过程可以视为外部电磁辐射场或外部时变电磁场作用在带电粒子<sup>30</sup>上，其洛伦兹力对带电粒子做功，使带电粒子振荡。粒子吸收或释放能量的过程体现在粒子振荡的加速-减速过程，伴随这个过程，将产生(新的)时变电磁场。涉及能量吸收/释放与粒子产生新的电磁辐射的过程通称散射 (scattering)，又称时变电磁场散射或电磁波散射或电磁辐射散射。此为散射过程的一种描述方式——将入射与散射视为时变电磁场或波。这是经典力学的描述方式。从量

<sup>30</sup>这里的带电粒子可以是自由电子，也可以是原子周遭的束缚电子。由于原子质量比电子质量大很多，一般假设外部时变电磁场对原子没有作用，即原子不动。但是当外部时变电磁场非常强时，原子将随之振荡。

子力学角度描述，把入射或散射时变电磁场视为光子，则散射过程为电子先吸收入射光子(对应吸收电磁场能量)，然后再放出散射光子。



**笔记** 另一种可能的描述方式为：光子先碰撞电子，然后原本的光子能量/动量改变，往另一个方向散射离开。思考一下，这个图像有什么瑕疵？

细心的读者会发现，尽管上面介绍了散射，但这一小节的标题为散射截面 (scattering cross section)。从字面上看，散射截面是一种横截面积的概念。具体来说，散射截面是什么？这个概念怎么来的？从以上关于散射过程的经典力学图像，我们原则上可以计算入射电磁场作用在带电粒子上时，使带电粒子振荡，从而发出电磁辐射过程的所有相关物理量。其中，我们可能对一个关系感兴趣，即由于粒子振荡产生的电磁辐射功率  $P_{\text{rad}}$  与入射时变电磁场功率  $P_{\text{in}}$  的关系。对带电粒子而言，入射电磁场可视为 §1.9 介绍的均匀平面电磁波，因此，入射时变电磁场功率用坡印廷向量  $\mathbf{S}_{\text{in}}$  描述——即单位时间、单位横截面积的电磁能量，能流密度  $S_{\text{in}} = |\mathbf{S}_{\text{in}}|$ ——更合适。出射的电磁辐射可能各向同性，也可能具有方向性。由此，散射截面的概念就出来了：

**定义 1.39. 电磁辐射散射截面  $\sigma$ 、微分散射截面  $d\sigma/d\Omega$**

散射截面  $\sigma$  用来关联散射后的电磁辐射功率与入射的电磁功率，定义为

$$\sigma \equiv \frac{P_{\text{rad}}}{S_{\text{in}}} \quad (1.252)$$

其中， $P_{\text{rad}}$  为散射后的电磁辐射功率， $S_{\text{in}} = |\mathbf{S}_{\text{in}}|$  为入射的坡印廷向量。当散射后的辐射功率具有方向性时，一般以  $dP_{\text{rad}}/d\Omega$  描述，其中， $\Omega$  为立体角。不同散射角度有不同的散射截面，定义微分散射截面 (differential scattering cross section) 为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv \frac{1}{S_{\text{in}}} \frac{dP_{\text{rad}}}{d\Omega} \quad (1.253)$$

只有当入射电磁波处在散射截面内时，与带电粒子发生作用(即“散射”)；当入射电磁波处在散射截面外时，不散射带电粒子。

**注** 由上可知，时变电磁场与物质的交互作用时常涉及散射截面的计算。

**注** 光子能量与时变电磁场频率有关；后面介绍电磁辐射时将会看到，电磁辐射能量与频率有关。散射截面联系出射的电磁辐射能量与入射电磁波能量，一般情况为频率的函数，即  $\sigma = \sigma(\omega)$  或  $d\sigma(\omega)/d\Omega$ 。

**注** 后面第 14 章 (§14.2) 将介绍，当入射电磁波换成入射电子束时，也用类似的微分散射截面概念分析。

以上仅介绍散射截面的概念，不涉及具体计算。对散射截面计算感兴趣的读者，可自行参考相关教科书或文献，细节此处不论。

## 1.20 镜像法求解电磁场问题

介绍镜像法求解电磁场问题之前,有必要给出一个基本定理:唯一性定理 (uniqueness theorem)。

唯一性定理  
是定心丸。

### 定理 1.30. 唯一性定理

满足标准边界条件的泊松方程或拉普拉斯方程的解是唯一的。这里的标准边界条件包含:

- 第一类 (Dirichlet) 边界条件  $\Rightarrow \varphi(\mathbf{r})|_{\Gamma} = f_1(\Gamma)$
- 第二类 (Neumann) 边界条件  $\Rightarrow \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial n}|_{\Gamma} = f_2(\Gamma)$

其中,  $\varphi$  为位函数,  $\Gamma$  表示边界。

**证明** 参考电磁理论教科书。

**注** 对 Neumann 边界条件, 解  $\varphi$  还有一个未定常数, 但电场  $\mathbf{E}$  则是唯一确定的。

**笔记** 唯一性定理本身的证明可以略过, 其更大的影响在于为以下几个求解静电场问题方法提供理论基础。 □

### 1.20.1 镜像电荷法

#### 定理 1.31. 镜像电荷法 (method of image charges)

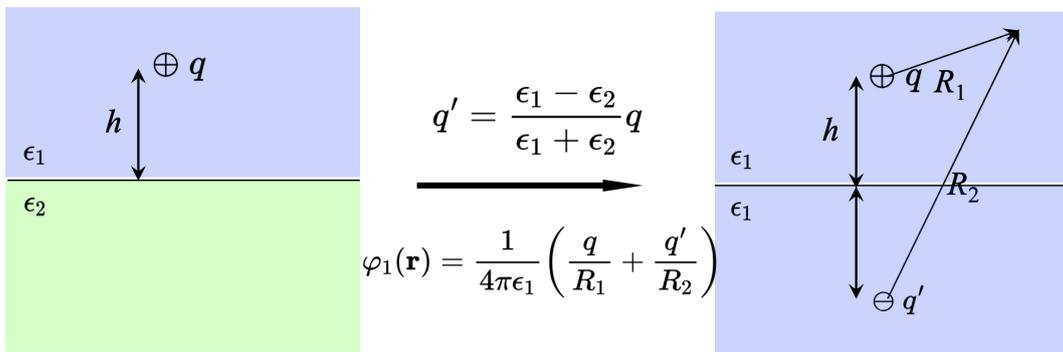
用虚设的电荷分布等效替代媒质分界面上复杂电荷分布, 虚设电荷的个数、大小与位置使场的解答满足 唯一性定理。对一维无限大平面点电荷或线电荷, 有如图 1.32 的结果。 □

**注** 镜像法最早由开尔文爵士 (Lord Kelvin, 1824-1907, 本名 William Thomson) 提出, 随后麦克斯韦将其推广。

镜像法就是“猜”解, 一旦猜到了, 你/妳就是幸运儿: 那个解不仅是解, 还是唯一解, 不需要担心还存在别的解或漏掉其它解。

作为加速器束流动力学应用, 这里利用镜像电荷法分析如下情况: 考虑图 1.33(a), 在  $y = \pm h$  的两平行理想导体金属板间具有线电荷密度  $q\lambda$  的束团及其引起的镜像 (线) 电荷。由于周遭导体金属板的存在, 束团作为带电粒子, 在金属平板上将引起感应电荷, 现在试着分析这些感应电荷对束团的影响, 即计算金属平板的感应电荷在束团位置的电场。借助唯一性定理, 分析可采用镜像电荷法, 用虚设的电荷分布等效替代媒质分界面上复杂电荷分布, 无限多个虚设电荷的个数、大小与位置如图 1.33(a) 给出。注意到, 由于电场的法向分量在金属表面必须截止, 边界条件要求电荷符号交替改变。利用叠加原理, 在

## 上半平面场域有效



## 下半平面场域有效

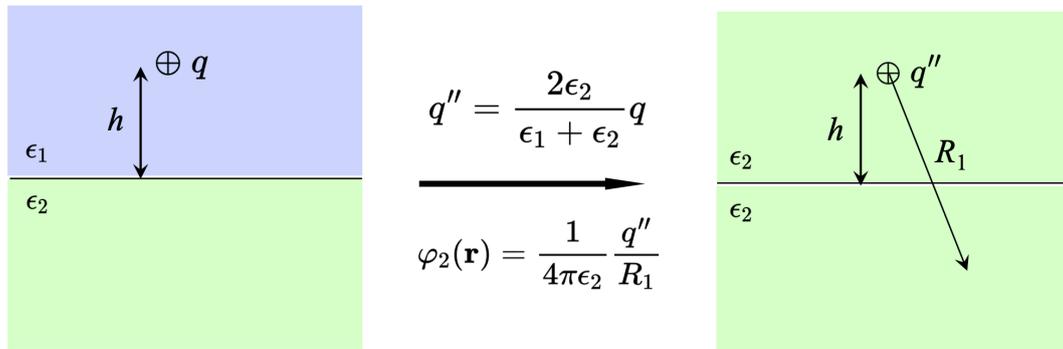


图 1.32: 镜像电荷法。如果 2 为金属侧, 则  $\epsilon_2 \rightarrow \infty$ , 于是有  $q' = -q$  或  $q'' = 2q$ 。

平板间  $y$  处的电场可写成

$$E_y(y) = \frac{2\lambda q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{+1}{2h-y} + \frac{-1}{2h+y} + \frac{-1}{4h-y} + \frac{+1}{4h+y} + \frac{+1}{6h-y} + \frac{-1}{6h+y} + \dots \right) \quad (1.254)$$

其中, 当  $y = 0$  时恰好为对称轴上电场。当  $|y| \ll h$  时, 展开至一阶, 有

$$E_y(y) \approx -\frac{\lambda q}{4\pi\epsilon_0 h^2} y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{48\pi\epsilon_0} \frac{\lambda e}{h^2} y \quad (1.255)$$

其中, 用了级数求和公式

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12} \quad (1.256)$$

如果不是偏离对称轴的  $y$  方向, 而是对称轴的  $x$  方向, 则有

$$E_x(x) \approx -\frac{\pi^2}{48\pi\epsilon_0} \frac{q\lambda}{h^2} x \quad (1.257)$$

以上为束团的静电荷导致镜像电荷的电场效应。束团内带电粒子以速度  $v = \beta c$  运动有运流电流, 将导致镜像电流的磁场效应, 将利用下一小节介绍的镜像电流法分析。

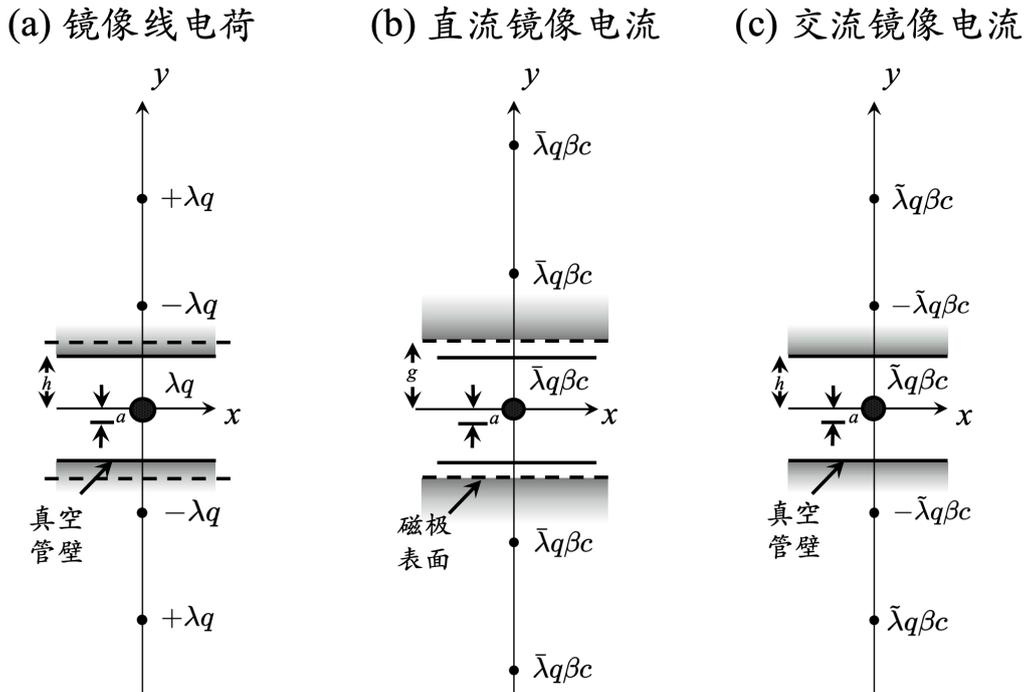


图 1.33: (a) 在  $y = \pm h$  的两平行理想导体金属板间具有线电荷密度  $q\lambda$  的束团及其引起的镜像(线)电荷; (b) 在  $y = \pm g$  的两平行铁磁媒质(磁极)平面间具有直流线电流密度  $q\lambda\beta c$  的束团及其引起的直流镜像(线)电流; (c) 在  $y = \pm h$  的两平行理想导体金属板间具有交流线电流密度  $e\lambda\beta c$  的束团及其引起的交流镜像(线)电流。这里假设束团尺寸  $a \ll (h, g)$ , 且  $h < g$ , 即金属真空管道放置在磁极空间内, 且金属导体为非铁磁材料, 因此不需要考虑两种材料间的作用。图中  $e = q$ 。图例修改自 A.W. Chao (1993) 一书。

## 1.20.2 镜像电流法

**定理 1.32. 镜像电流法 (method of image currents)**

用虚设的电流分布等效替代媒质分界面上复杂感应电流分布, 虚设电流的个数、大小与位置使场的解答满足 唯一性定理。对一维无限大平面线电流, 有如图 1.34 的结果。

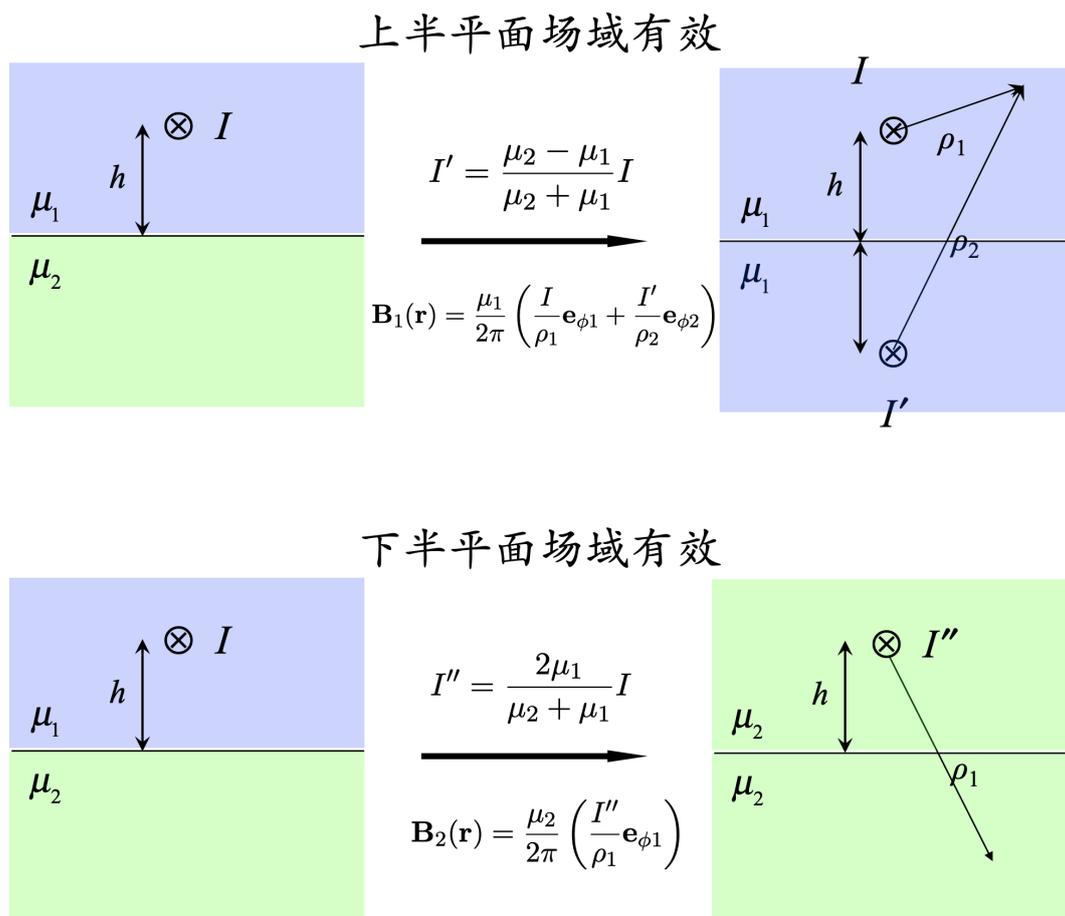


图 1.34: 镜像(直流)电流法。如果 2 为铁磁媒质, 则  $\mu_2 \gg 1$ , 于是有  $I' \approx I$  或  $I'' \approx 0$ 。如果电流为交变电流, 则镜像交变电流将异号。

考虑三个特殊情况:

- 媒质 1 为空气 ( $\mu_1 = \mu_0$ ), 媒质 2 为铁磁媒质 ( $\mu_2 \gg 1$ ), 长直载流导线置于空气中, 则有

$$I' \approx I, \quad I'' \approx \frac{2}{\mu_r} I \approx 0$$

- 媒质 1 为铁磁媒质 ( $\mu_1 \gg 1$ ), 媒质 2 为空气 ( $\mu_2 = \mu_0$ ), 长直载流导线置于铁磁媒质中, 则有

$$I' \approx -I, \quad I'' \approx 2I$$

- 考虑媒质 1 为空气 ( $\mu_1 = \mu_0$ ), 媒质 2 为铁磁媒质 ( $\mu_2 \gg 1$ ), 载流回路置于空气中, 其镜像电流形成的回路可以得到如图 1.35。

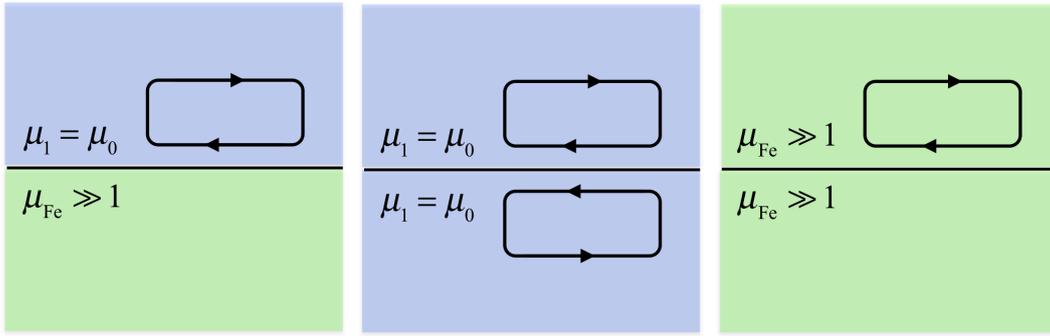


图 1.35: 几种回路的镜像电流。

**注** 以上假设电流为直流，如果电流为交变电流，则交变电流成分“看到”的边界不再是铁磁媒质，而是金属导体。

作为加速器束流动力学应用，这里利用镜像电流法分析如下情况：考虑图 1.33(b)，在  $y = \pm g$  的两平行铁磁媒质（磁极）平面间具有直线条电流密度  $q\bar{\lambda}\beta c$  的束团及其引起的直流镜像（线）电流<sup>31</sup>。由于恒定磁场“看不到”在  $y = \pm h$  的金属导体平板，因此不考虑金属导体平板的影响，磁场的法向方向分量在铁磁媒质表面截止。根据边界条件要求，可以确定镜像电流与真实束团电流同号（同方向）。利用安培定律与叠加原理，在平板间  $y$  处的磁场可写成

$$B_x(y) = \frac{2q\bar{\lambda}\beta}{4\pi\epsilon_0 c} \left( \frac{1}{2g-y} + \frac{1}{4g-y} + \frac{1}{6g-y} + \dots - \frac{1}{2g+y} - \frac{1}{4g+y} - \frac{1}{6g+y} - \dots \right) \quad (1.258)$$

其中，当  $y = 0$  时恰好为对称轴上电场。当  $|y| \ll h$  时，展开至一阶，有

$$B_x(y) \approx \frac{q\bar{\lambda}\beta}{4\pi\epsilon_0 c g^2} y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{24\pi\epsilon_0 c} \frac{q\bar{\lambda}\beta}{g^2} y \quad (1.259)$$

其中，用了级数求和公式

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (1.260)$$

如果不是偏离对称轴的  $y$  方向，而是对称轴的  $x$  方向，则有

$$B_y(x) \approx \frac{\pi^2}{24\pi\epsilon_0 c} \frac{q\bar{\lambda}\beta}{g^2} x \quad (1.261)$$

以上关于镜像电荷法求电场与镜像电流法求磁场都是基于“静场”近似。即束团经过平行理想导体金属板间或平行铁磁媒质（磁极）平面间时，束团作为带电粒子为稳态静电场，电荷运动产生的等效运流电流为恒定电流。计算的电场、磁场分别满足  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ 。

除了直流电流的影响，如果束团存在电荷密度不均匀或密度调制，则需要考虑等效的交变电流成分的效应。具有密度调制的束团产生的电场形式仍与上面计算结果相同，

<sup>31</sup> 大学物理学学过，电流  $I = qv n A$ ，其中， $n$  为体密度。写成线密度形式，则  $nA = \lambda$ ，为单位长度的密度。因此，电流有  $I = qv\lambda = q\bar{\lambda}\beta c$ 。

只要置换线电荷密度即可，即  $\lambda \rightarrow \lambda(t)$ 。但是，磁场计算则稍微复杂，因为交变电流产生的磁场看到的边界不再是铁磁边界，而是金属导体表面边界<sup>32</sup>。考虑图 1.33(c)，在  $y = \pm h$  的两平行理想导体金属板间具有交变电流  $q\tilde{\lambda}\beta c$  的束团及其引起的交变镜像(线)电流。令线电荷密度可以拆解为直流与交流成分相加<sup>33</sup>

$$\lambda(z) = \lambda_{\text{DC}} + \lambda_{\text{AC}} = \bar{\lambda} + \tilde{\lambda} \quad (1.262)$$

其中， $\bar{\lambda}$  为恒定或低频电流成分， $\tilde{\lambda}$  为高频成分。对交变电流来说，为了满足在金属导体表面切向磁场  $\mathbf{H}$  连续，在金属导体平板内的镜像电流符号必须交替改变。利用安培定律与叠加原理，在平板间  $y$  处的磁场可写成

$$B_x(y) = \frac{2q\tilde{\lambda}\beta}{4\pi\epsilon_0 c} \left( \frac{-1}{2h-y} + \frac{1}{4h-y} + \frac{-1}{6h-y} + \cdots + \frac{+1}{2h+y} + \frac{-1}{4h+y} + \frac{+1}{6h+y} + \cdots \right) \quad (1.263)$$

其中，当  $y = 0$  时恰好为对称轴上电场。当  $|y| \ll h$  时，展开至一阶，有

$$B_x(y) \approx \frac{q\tilde{\lambda}\beta}{4\pi\epsilon_0 ch^2} y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{48\pi\epsilon_0 c} \frac{q\tilde{\lambda}\beta}{h^2} y \quad (1.264)$$

 **笔记** 直流电流产生的磁场看不到(即，直接穿过)金属导体，只在铁磁媒质( $\mu_r \rightarrow \infty$ )前，法向磁场截止(在铁磁媒质内， $H = 0$ )。如果铁磁媒质表面无面电流，则在铁磁媒质表面无切向磁场。交变电流产生的磁场随时间改变，在金属导体表面产生涡电流，允许在金属导体表面存在磁场。

 **笔记** 镜像电流法的另一个应用有计算 Smith-Purcell 辐射场，细节此处不论。感兴趣的读者可参考 J.H. Brownell, J. Walsh, and G. Doucas, Spontaneous Smith-Purcell radiation described through induced surface currents, Phys. Rev. E **57**, 1075 (1998). <https://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.57.1075>。关于 Smith-Purcell 辐射的讨论，可参考 §3.4.3。

<sup>32</sup>在金属导体表面将会产生感应电流，又称涡电流(eddy current)。

<sup>33</sup>拆解标准可以按趋肤深度，那些低频成分对应趋肤深度比金属导体板厚度大的归类为直流成分，那些高频成分对应趋肤深度比金属导体板厚度小的归类为交流成分。

## 1.21 电磁超材料

电磁超材料的英文为 *metamaterial*，为一种自然界不存在、人为构造出来的结构。最早在 1964 年，从电磁理论上探索这类材料的电磁特性的是俄国物理学家 V.G. Veselago。早期称“双负介质”(doubly negative material) (即  $\epsilon_r < 0, \mu_r < 0$ )、“左手材料”(left-handed material)，后来更多用超材料一词。直到 1996 年，英国物理学家 J.B. Pendry 首次尝试利用寻常材料，以周期性结构排列构造出超材料，包含使用周期排列的金属棒产生负介电系数、使用周期排列的分裂(开口)环形谐振腔(split-ring resonator, SRR)产生负磁导率等。

“超材料”一词或许有些误导；并不是用了新奇的材料，而是设计一种新的结构，电磁场在其结构表面附近或内部体现了有别于寻常结构的电磁行为，有些行为甚至称上奇异，因而称超材料。这些有别于寻常结构的电磁行为可以与其等效的本构参数，如：介电系数  $\epsilon$ 、磁导率  $\mu$  等互相关联。超材料的这些本构参数与设计结构有关，甚至与构成超材料本身的寻常材料本身没什么关联。大多数文献上看到的超材料为周期性结构，但是周期性不是作为超材料的必要条件。

可以预见，与此相关的电磁波波段应该与结构尺寸有关，一般在毫米波、微波、太赫兹、远红外线波段。超材料构成单元的尺寸一般比感兴趣的电磁波波段小，为亚波长结构(sub-wavelength structure)。超材料本身即是一个交叉学科领域，在许多领域已经得到或即将开展应用，如：将电磁超材料加载到天线，能改善天线的指向性。将电磁超材料涂覆在目标上，能确保目标在各种复杂环境下正常工作，使信息得到有效的传递，提高目标的隐身性能等。尽管广泛应用主要仍受限于损耗太大，近年来电磁超材料与加速器束流动力学相关的工作也开始盛行。这一节简单介绍电磁超材料。

### 性质 1.11. 电磁超材料的基本特性

伴随电磁超材料的基本特性有：

- 构成单元的尺寸  $a$  必须小于或远小于电磁波波长  $\lambda$ ，即  $a < \lambda$ 。
- 为色散材料，即  $\epsilon = \epsilon(\omega), \mu = \mu(\omega)$ 。由上，超材料的  $\epsilon, \mu$  一般与材料内位置无关。
- 承上，因此有  $\Gamma = \Gamma(\omega) = -ik$  或传播常数  $k = k(\omega)$ ，连带有  $v_g = v_g(\omega)$ 。
- 由于本构参数  $\epsilon(\omega), \mu(\omega)$  皆为频率的函数，因此时变电场、磁场在时域中体现非局域性(non-local)，即

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) = \tilde{\epsilon}(\omega) \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \\ \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) = \tilde{\mu}(\omega) \cdot \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) \end{cases} \quad (1.265)$$

根据卷积定理, 有

$$\begin{cases} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon(t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t \epsilon(t-t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt' \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu(t) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t \mu(t-t') \mathbf{H}(\mathbf{r}, t') dt' \end{cases} \quad (1.266)$$

- 返波特性的:  $v_p v_g < 0$ 。
- 超材料电磁特性的折射率 (index of refraction) 定义为

**定义 1.40. 超材料折射率**

对  $\epsilon_r < 0, \mu_r < 0$  的电磁超材料, 其等效折射率 (对构成单元平均) 定义为

$$n_{\text{eff}} = -\sqrt{\mu_r \epsilon_r} \quad (1.267)$$

其中, 超材料的相对介电系数  $\epsilon_r < 0$  与相对磁导率  $\mu_r < 0$ 。由此可见, 前面介绍的 Snell's law 知, 折射角将与寻常介质异侧。

由于在超材料中没有外部电荷源与电流源, 在材料中一般以  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  描述, 法拉第定律与安培全电流定律可写成

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu_0 \mu_r \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.268)$$

其中, 相对介电系数  $\epsilon_r$  与相对磁导率  $\mu_r$  可正可负。

为什么超材料又称左手介质, 可由以下方式解释。将法拉第定律与安培全电流定律写成时谐形式,  $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$ , 有

$$\begin{aligned} \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} &= i\omega \mu \tilde{\mathbf{H}} \\ \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} &= -i\omega \epsilon \tilde{\mathbf{E}} \end{aligned} \quad (1.269)$$

再将时谐场做空间傅里叶变换,  $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ 、 $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ , 则  $\nabla \rightarrow i\mathbf{k}$ , 于是有

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \times \tilde{\mathcal{E}} &= \omega \mu_0 \mu_r \tilde{\mathcal{H}} \\ \mathbf{k} \times \tilde{\mathcal{H}} &= -\omega \epsilon_0 \epsilon_r \tilde{\mathcal{E}} \end{aligned} \quad (1.270)$$

参考图 1.7, 将发现, 当  $\epsilon_r > 0, \mu_r > 0$  时, 即寻常材料, 电磁波的电场分量、磁场分量、传播方向满足右手定则, 称右手材料。而当  $\epsilon_r < 0, \mu_r < 0$  时, 即超材料, 要描述电磁波的电场分量、磁场分量、传播方向, 需采用左手定则, 称左手材料。

超材料的奇异性还体现在折射现象上。参考图 1.36, 可以看到, 当  $n_2 > 0$  时, 即寻常材料, 折射电磁波满足寻常的 Snell 定律  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ 。而当  $n_2 < 0$  时, 即超材料  $\epsilon_r < 0, \mu_r < 0$ , 根据上面超材料折射率的定义, 有  $n_2 = -\sqrt{\epsilon_r \mu_r} < 0$ , 折射角也将异号  $\theta_2 < 0$ , 即图中的射线 4。

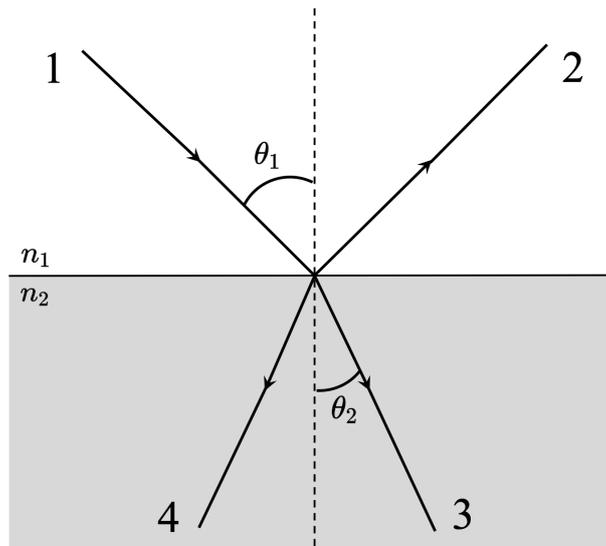


图 1.36: 电磁波在介质交界面的折射。射线 1 为入射线, 射线 2 为反射线, 射线 3 为当  $n_2 > 0$  为寻常材料时的折射线, 射线 4 为当  $n_2 < 0$  为超材料时的折射线。Snell 定律有  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ 。按此示意图, 有  $|n_2| > n_1 > 0$ 。

注 图 1.36 为电磁波从疏介质到密介质。如果从密介质到疏介质, 则还需要考虑 Goos-Hanchen 效应。对超材料来说, 从密介质 (超材料) 到疏介质 (寻常材料), 将有负 Goos-Hanchen 效应, 即  $s < 0$ , 参考图 1.37。比较左右图, 可以看到, 电磁波在往右传播的距离减短, 或者等效来看, 光传输变慢。由慢光 (slow light) 到使光停止 (stopping light) 即由此衍生的一个研究分支。图 1.37 仅画出一侧的 Goos-Hanchen 效应, 可以想像, 当超材料的上下两侧由寻常疏介质局限住时, 有机会能使光局限在一封闭范围内不再传播。

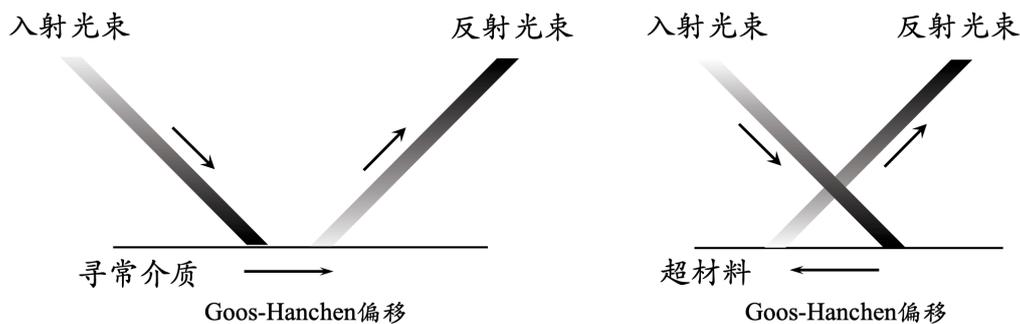


图 1.37: Goos-Hanchen 效应。左图为寻常介质的 Goos-Hanchen 效应, 右图为超材料的 Goos-Hanchen 效应。

### 1.21.1 如何构造超材料?

按照前面讨论, 典型的超材料有介电系数  $\epsilon < 0$  与磁导率  $\mu < 0$ 。以下分别讨论如何构造负介电系数与负磁导率的等效电磁结构。

**负介电系数** 前面 §1.11 介绍过, 在高频区间, 电磁波在物质中传播, 其相对介电系数有

$$\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu_m^2} \left( 1 - i \frac{\nu_m}{\omega} \right) \quad (1.271)$$

其中,

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0}} \quad (1.272)$$

为等离子体频率。对常见金属,  $\omega_p \sim 10^{16}$  rad/s 约在紫外光频段。

如果忽略碰撞系数  $\nu_m$ , 则当  $\omega < \omega_p$  时, 相对介电系数  $\epsilon_r < 0$ , 介电系数  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r < 0$ ! 这样就得到了负介电系数的材料了吗? 不幸, 实际情况下, 自然界鲜少能直接观察到  $\epsilon_r < 0$  的物质, 这是因为当  $\omega < \omega_p$  时,  $\nu_m$  很大,  $\nu_m \gg \omega$ , 此时相对介电系数的虚部主导, 电磁波没有体现  $\text{Re } \epsilon_r < 0$  的特性, 反而因为其主导的虚部, 低于等离子体频率的电磁波在材料都耗散了, 称光吸收 (light absorption)。怎么构造负介电系数材料?

目前来说, 人工构造一个结构, 考虑到工艺技术, 仍希望结构尺寸大约在  $\mu\text{m}$  以上, 或更典型的  $\text{mm}$  范围。因此, 电磁波频率被限制在较低频的微波、太赫兹区间。如何克服光吸收困难? 山不转, 路转。一个思路是: 改变等离子体频率, 特别是其中的等效等离子体密度  $n_{\text{eff}}$  与等效质量  $m_{\text{eff}}$ 。最早获得突破的是 J.B. Pendry 等人利用一周期排列的 (非铁磁) 金属棒, 当外部电磁波入射此周期结构时, 每根金属棒内的电子就随着电磁波振荡。但是, 电子只被局限在一维金属棒中, 不能随意移动。于是, 结构内等效的  $n_e$  就被构造出来了。目前来说, 超材料的等效  $n_{\text{eff}} \approx 10^{-7} n_e$ , 降了 7 个数量级。此外, 等效质量也可以估算, 细节此处不论, 增加了 4 个数量级。根据等离子体频率的定标关系

$$\omega_p \propto \sqrt{\frac{n_e}{m_e}} \quad (1.273)$$

于是, 本来在紫外频段的  $\omega_p$ , 现在降低了约 6 个数量级, 降到微波频段了。离达成构造超材料的目标还有一半, 除了负介电系数, 还需要构造负磁导率。

**负磁导率** 由上面关于构造“负介电系数”材料的思路, 我们可以说自然界“其实”存在负介电系数材料, 只是光吸收效应将其掩盖了。J.B. Pendry 等人的思路是人为构造一结构, 将产生负介电系数的频段从紫外频段“挪”到微波频段。山不转, 路转。

构造负磁导率材料比负介电系数再复杂些, 因为现在没有类似介电系数与等离子体频率的关系能够直接利用。或者说, 除了陀螺性 (gyrotropic) 磁性材料外, 自然界没有负磁导率的材料。路不转, 人转。最早获得突破的仍是 J.B. Pendry 等人, 利用一周期排列、寻常 (非铁磁) 金属构成的分裂环谐振腔 (split-ring resonator), 当外部电磁波入射此周期结构时, 每个分裂环谐振腔面上的电子将随着电磁波振荡, 但被局限在分裂环内, 由于非封闭环路, 没有形成回路的情况下, 在端点附近就像电容器, 在金属环上则像电感。在分裂环结构中, 振荡的电荷、电流交替转换, 分裂环谐振腔就像 (R)LC 振荡电路, 其谐振频率则由等效电容与等效电感决定,  $\omega \approx 1/\sqrt{LC}$ 。此处略去定量分析, 此分裂环谐

振腔的磁导率可写为

$$\mu_r = \frac{B/\mu_0}{B/\mu_0 - M_d} = 1 - \frac{F}{1 - 1/(\omega^2 LC) + iR/(\omega L)} \quad (1.274)$$

其中， $M_d$  为邻近分裂环谐振腔面间引起的磁偶极矩， $F$  为单个分裂环谐振腔在单元体积内的占比。上式表明，只要分裂环谐振腔的尺寸设计（即， $R, L, C$  等效参数）与邻近间距安排恰到好处，将能够在特定频率区间产生等效负磁导率的设计。

留意，产生负介电系数与负磁导率的频率区间需要在同一频段内。整体而言，超材料由示意图 1.38 为组成单元构成，按周期排列形成。

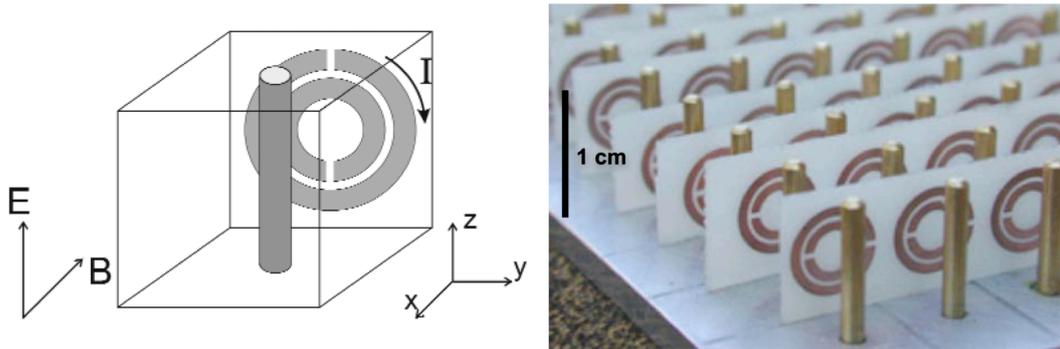


图 1.38: 典型的电磁超材料单元组成。为了得到负介电系数，采用一系列周期排列的金属棒；为了得到负磁导率，采用一系列周期排列的分裂环谐振腔。金属棒横截面圆柱半径约  $1\mu\text{m}$ ，此单元结构尺寸也是相邻金属棒或相邻分裂环谐振腔间距，约为  $\text{mm}$  量级。图例修改自 B. Ung, *Metamaterials: a metareview*。

**注** 目前超材料的应用受限于损耗太大，这是指被动超材料元件。对主动超材料元件，此问题或许能够克服。以上关于超材料的介绍仅定性，且不全面。对超材料的进一步讨论感兴趣的读者，请自行参考专著。

## 1.22 定向电磁波的高斯束模型

前面 §1.9 介绍了电磁波定向传播的几个类型，其中，最简单、最常用的定向传播电磁波为均匀平面电磁波又称 TEM 波。均匀平面电磁波可以视为一种近似，描述电磁波远离场源很远时的样貌。当电磁波或辐射场距离场源较近时，均匀平面电磁波模型不再适用。虽然均匀平面电磁波的解可以作为完备基底描述任意形式的电磁场，但更多时候我们直接用这一节将介绍的高斯束模型。比起平面电磁波，使用高斯束模型还有一个好处：容易描述电磁波的聚焦、散焦、衍射等。

在开始正式介绍高斯束模型前，先总结几个均匀平面电磁波的特性。

### 性质 1.12. 均匀平面电磁波

根据定理 1.15，真空中均匀平面电磁波有如下特性：

- 时谐形式可写为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left( \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t + i\phi_0} \right), \quad \mathbf{B} = \text{Re} \left( \mathbf{B}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t + i\phi_0} \right) \quad (1.275)$$

- 均匀平面电磁波的解为完备基底
- 瞬时电场  $\mathbf{E}$ 、瞬时磁场  $\mathbf{B}$  向量与波的传播方向  $\mathbf{n}$  满足

$$\mathbf{B} \times c\mathbf{n} = \mathbf{E} \quad (1.276)$$

其中， $c$  为真空中的波（相）速。

- 在  $t$  时刻、沿  $z$  传递的均匀平面电磁波，可仅用一个变量  $\xi = z - ct$  描述，即满足  $\cos k\xi = \cos(kz - \omega t)$ ，其中， $\omega = kc$ 。
- 场可以通过向量位函数描述。考虑  $\mathbf{A} = (A_x, A_y, 0)$ ，则有

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial \xi} \\ A_x & A_y & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{e}_x A'_y + \mathbf{e}_y A'_x \\ &= \mathbf{n} \times \mathbf{A}' \\ &= -\frac{1}{c} \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.277)$$

其中， $\prime$  表示  $\partial/\partial\xi$ ， $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$  为波传播方向（如： $\mathbf{e}_z$ ）。最后一个等号用了  $\partial/\partial\xi = -c^{-1}\partial/\partial t$ ，表示在一固定（全域）位置坐标  $z$  的描述。

- 时域瞬时坡印廷向量为

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{n} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi_0) \quad (1.278)$$

沿  $\mathbf{n}$  方向。时间平均坡印廷向量为

$$\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{n}}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 = \mathbf{n} \frac{E_0^2}{2Z_0} = \mathbf{n} \frac{c^2 B_0^2}{2Z_0} \quad (1.279)$$

沿  $\mathbf{n}$  方向。 □

如何描述高斯束形式电磁波? 从自由空间中的无源电磁波方程开始

$$\nabla^2 \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (1.280)$$

简化起见, 考虑电场或磁场其中之一, 且考虑其中一个方向分量, 如:  $x$ , 则

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \quad (1.281)$$

对其它方向分量或磁场, 以下分析都适用。

为得到高斯束形式的电磁波, 做如下两个假设:

1. 假设解的形式为<sup>34</sup>

$$E_x(x, y, z, t; \xi = z - ct) = \tilde{u}(x, y, z) e^{ik\xi} = \tilde{u}(x, y, z) e^{-i\omega t + ikz} \quad (1.282)$$

其中,  $\omega = kc$ 。

2. 傍轴近似  $\Rightarrow \tilde{u}$  为缓变函数<sup>35</sup>, 即

$$\left| \frac{1}{\tilde{u}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right| \ll k \quad (1.283)$$

或简单写成  $\partial/\partial z \ll k$ , 其中,  $k = 2\pi/\lambda$ 。

根据以上两个假设, 可得到如下傍轴波方程 (paraxial wave equation), 有

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} = 0 \quad (1.284)$$

其中, 忽略了二阶微分项  $\partial^2/\partial z^2$ 。如果写成圆柱坐标形式, 利用  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ , 则傍轴波方程有

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \rho} + 2ik \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} = 0 \quad (1.285)$$

此偏微分方程为抛物线型 (parabolic) 偏微分方程。

以下求解此圆柱坐标形式的傍轴波方程。对此方程猜如下形式的解:

$$\tilde{u} = A(z) e^{Q(z)\rho^2} \quad (1.286)$$

其中,  $A(z), Q(z)$  待解。可以预期,  $Q < 0$ , 否则在径向  $\rho \gg 1$  远处场将发散。将此猜解代回傍轴波方程, 有

$$\begin{aligned} 4Q^2 \rho^2 \tilde{u} + 4Q \tilde{u} + 2ik \left( \frac{A'}{A} + Q' \rho^2 \right) \tilde{u} &= 0 \\ \rho^2 (4Q^2 + 2ikQ') \tilde{u} + \left( 4Q + 2ik \frac{A'}{A} \right) \tilde{u} &= 0 \end{aligned} \quad (1.287)$$

其中,  $\prime \equiv \partial/\partial z$ 。由于此解对任意  $\rho$  应成立, 因此希望找到以上括号内的两项能独立为零的解, 即

$$\begin{aligned} 2Q^2 + ikQ' = 0 &\Rightarrow Q(z) = -\frac{\frac{1}{w_0^2}}{1 + 2i \frac{z}{kw_0^2}} \\ 2Q + ik \frac{A'}{A} = 0 &\Rightarrow A(z) = \frac{E_0}{1 + 2i \frac{z}{kw_0^2}} \end{aligned} \quad (1.288)$$

<sup>34</sup>留意, 这里  $\tilde{u}$  还保留  $z$  的函数依存关系。因此,  $\tilde{u}(x, y, z)$  或许写成  $\tilde{u}(x, y, z; k)$  更合适。

<sup>35</sup>其实, 这里  $\tilde{u}$  不仅对  $z$  缓变, 对  $x, y$  也缓变。

其中,

$$Q(z=0) \equiv -\frac{1}{w_0^2}, \quad A(z=0) \equiv E_0 \quad (1.289)$$

利用以下定义的“术语”: 瑞利长度  $z_R$ 、光束横向尺寸  $w_0$ , 可以将上面的解  $\tilde{u}$  表示成  $z_R, w_0$  形式, 有

$$\tilde{u}(\rho, z) = \frac{E_0}{1 + i\frac{z}{z_R}} e^{-\frac{\rho^2}{w_0^2\left(1 + i\frac{z}{z_R}\right)}} \quad (1.290)$$

由此我们得到傍轴波方程的一般解。

#### 定义 1.41. 瑞利长度 (Rayleigh length, Rayleigh range)、光束横向尺寸

如图 1.39, 光学中, 定义光场的瑞利<sup>a</sup>长度定义为

$$z_R = \frac{k_L w_0^2}{2} = \frac{\pi w_0^2}{\lambda_L} \quad (1.291)$$

其中,  $k_L = 2\pi/\lambda_L$  为辐射波数,  $w_0$  称为辐射场束腰 (waist), 为光束横向尺寸最小处。光束横向尺寸为

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \quad (1.292)$$

当  $z = z_R$  时, 横向半径增加  $\sqrt{2}$  倍, 有  $w(z) = \sqrt{2}w_0$ ; 横向面积增加 2 倍。

此外, 在  $z$  处波前的局域曲率半径  $R(z)$  有

$$R(z) = z \left(1 + \frac{z_R^2}{z^2}\right) \quad (1.293)$$

**注** 两倍瑞利长度称共焦参数 (confocal parameter)  $b = 2z_R$ 。

**注** 关于高斯光束的介绍, 可参考 Gennady Stupakov and Gregory Penn, *Classical Mechanics and Electromagnetism in Accelerator Physics*, Springer (2018) 的 §13.2。

<sup>a</sup>John William Strutt, 3rd Baron Rayleigh, “瑞利”为受封男爵名, 其本名为 John William Strutt, 为英国物理学家, 由于与 William Ramsay 合作发现氩 (argon) 元素而获得 1904 年诺贝尔物理学奖。瑞利的导师是 Stokes (斯托克斯定理的 Stokes), 瑞利的学生之一为发现“电子”的汤姆孙 (Joseph John Thomson)。

**练习 1.34** 参考图 1.39, 高斯光束的角散可与束腰尺寸  $w_0$ 、瑞利长度关联  $z_R$ , 有  $\Theta_{\text{div}} \simeq 2\frac{w_0}{z_R}$ 。

一般来说, 激光装置产生的光束随传播距离其波前、强度都会改变, 其样貌大致如图 1.41 所示。比起平面电磁波, 使用高斯束模型还有一个好处: 容易描述电磁辐射的聚焦、散焦、衍射等。

以下给出关于高斯束的一些讨论。

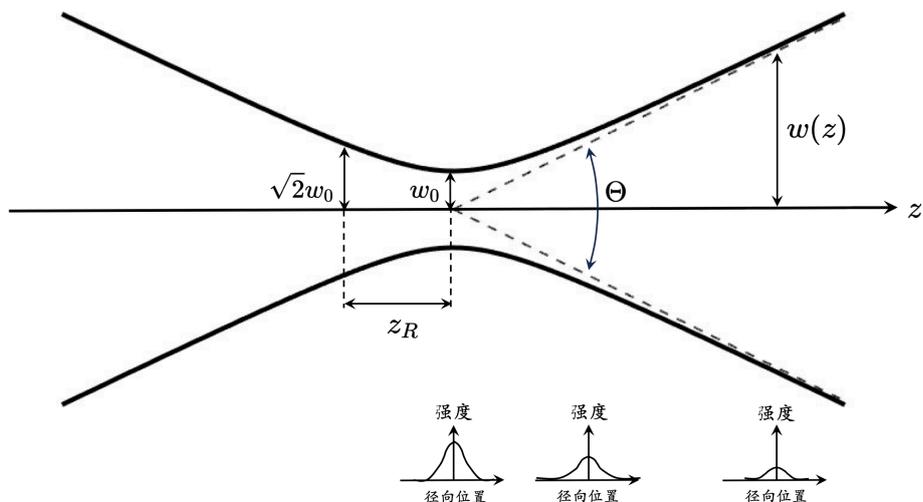


图 1.39: 高斯光束。下排为激光束的横向强度分布图，左边为束腰处  $z = 0$ ，中间为  $z = z_R$  处，右边为甚远处，强度依序衰减。

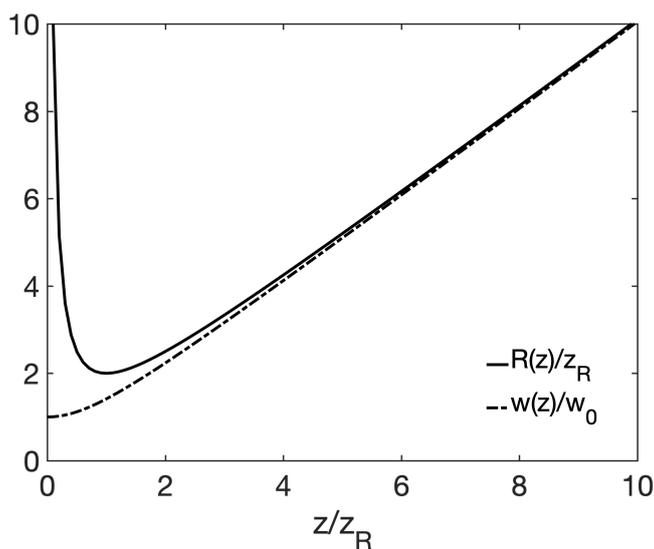


图 1.40: 高斯光束曲率半径  $R(z)$  与横向尺寸  $w(z)$  在不同位置  $z$  的比较。

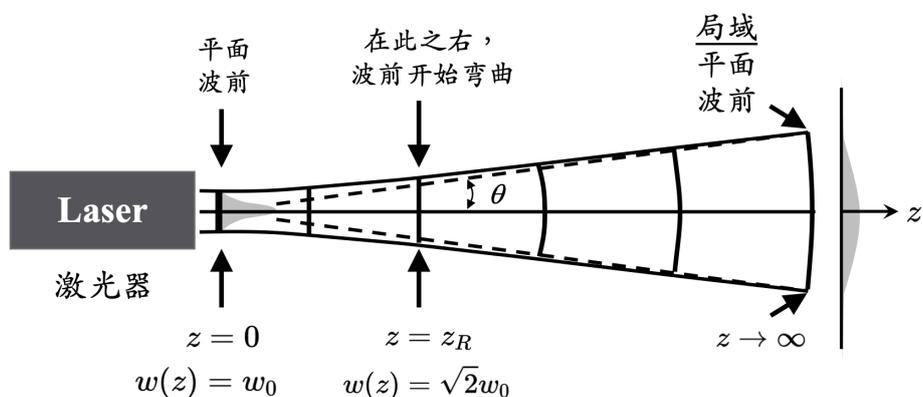


图 1.41: 激光器产生的光束随传播距离其波前、强度都会改变。在束腰处  $z = 0$ ，光束横向范围内波前不弯曲，在甚远处，光束横向局部范围内波前不弯曲。

**性质 1.13. 高斯束的特性**

有

- 远离焦点位置 ( $z = 0$ ) 后, 复振幅  $|\tilde{u}|$  随  $z, \rho$  的函数依存关系有

$$|\tilde{u}|(\rho, z) \propto e^{-\frac{\rho^2}{w_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{z_R^2}\right)}} \quad (1.294)$$

- 轴上复振幅  $|\tilde{u}|$  有

$$|\tilde{u}|(z) = \frac{E_0}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}} \quad (1.295)$$

- $z_R$  可视为光束的有效聚焦距离。
- $\Theta = \frac{2w_0}{z_R} = \frac{4}{kw_0}$  表征光束远离焦点位置外的张角。
- 时间平均的能量通量 (energy flux) 有

$$\iint_A \bar{\mathbf{S}} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\pi}{4Z_0} E_0^2 w_0^2 \quad (1.296)$$

其中,  $w_0$  为光束的束腰尺寸。 □

由上讨论, 可以反过来看看傍轴波方程的适用条件:

$$\lambda \ll w_0 \ll z_R \quad (1.297)$$

在焦点位置附近, 高斯束的电磁场样貌与平面电磁波非常像。当  $z > z_R$  后, 场的样貌将开始偏离平面电磁波, 因此, 用平面电磁波描述将不再准确。当  $z \gg z_R$  时, 有

$$A(z) \approx -\frac{iE_0kw_0^2}{2z}, \quad Q(z) \approx \frac{ik}{2z} - \frac{k^2w_0^2}{4z^2} \quad (1.298)$$

可以看到, 对  $\tilde{u}(\rho, z) = A(z)e^{Q(z)\rho^2}$ , 振幅部分  $A$  随  $z$  成反比减小, 除了  $A$ , 振幅还有一部分体现在指数  $e^{Q\rho^2}$  中的第二项, 随  $e^{-k^2w_0^2\rho^2/4z^2}$  改变, 有效场范围约为指数部分  $\leq 1$  内, 即  $\rho \sim 2z/kw_0 \sim \Theta_{\text{div}}z/2$ 。  $Q$  中的第一项表征相位修正, 由

$$E_x(\rho, z, t) = \tilde{u}(\rho, z)e^{-i\omega t + ikz} \quad (1.299)$$

可以看到, 实际电场  $E_x = E_0e^{i\phi}$  的相位有

$$\phi = kz + \frac{k\rho^2}{2z} - \omega t \quad (1.300)$$

高斯束除了以上特性外, 还有一个物理量被用来表征高斯光束与同样中心频率的平面波束的相位差, 称古依相移 (Gouy phase shift)。高斯光束可以视为一系列不同空间频率分量的平面波的集合。那些传输方向与光轴方向存在一定角度的平面波分量在传输过程中经历了一些相移。这些分量的叠加后使得高斯光束相对于沿光轴方向传输的平面波产生了此相移。

**定义 1.42. 古依相移 (Gouy phase, Gouy phase shift)**

用来表征与相同频率的平面波相比, 聚焦高斯光束传输时产生额外的相移, 定义为

$$\psi_G(z) = \tan^{-1} \left( \frac{z}{z_R} \right) \quad (1.301)$$

**注** 有些文献的定义差一个负号，宜留意。 □

以上解得的场为横向  $x$  方向场，对纵向电场，可以通过电场高斯定律  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  得到。忽略  $y$  方向，有

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{\partial E_x}{\partial x} \quad (1.302)$$

已知

$$E_x = A(z)e^{Q(z)(x^2+y^2)}e^{ikz-i\omega t} \quad (1.303)$$

假设  $E_z = \tilde{v}(x, y, z)e^{ikz-i\omega t}$ ，则

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \left( \frac{1}{\tilde{v}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} + ik \right) E_z \approx ikE_z \quad (1.304)$$

其中，利用傍轴近似忽略了上式括弧中的第一项。于是

$$E_z \approx -\frac{1}{ik} \frac{\partial E_x}{\partial x} = -\frac{2xQ(z)E_x}{ik} = \frac{2x}{ikw_0^2 - 2z} E_x \quad (1.305)$$

由上可知，在焦点附近  $|z| \ll 1$  区域， $E_x$  为主要场分量，即  $E_z$  远小于  $E_x$ ，大约可估算为

$$E_z \sim \frac{2E_x}{ikw_0} \sim \theta E_x \ll E_x \quad (1.306)$$

## 1.23 二维静场问题分析 — 复变函数应用

前面介绍过，为了方便分析时变电磁场或电磁波，引入了时谐场的概念<sup>36</sup>，即

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[ \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \right]$$

则在一定意义上空间与时间能够解耦。时谐分析中，对时间的偏微分可以用  $-i\omega t$  取代，即  $\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow -i\omega$ 。有些读者或许好奇，这个引入复数的思路，除了通过时谐场简化电磁波问题的分析，有没有与时间无关的静场问题的应用？这一节介绍复变函数在二维静场问题分析的应用。

复变函数是电磁场分析常用的数学工具。当电磁场问题可以简化为二维问题时，二维的拉普拉斯或泊松方程加上边界条件就形成平面静电/静磁场的定解问题。当边界条件较复杂时，求解便需要更多的数学技巧。当媒质或系统边界恰好为等位面时，特别适合利用复变函数方法求解。此外，复变函数理论本身与复平面几何的关系联系紧密，通过对比其与电磁理论的相似性，有时候能得到一些有趣的结果。

### 1.23.1 基本定义与定理

这一小节先复习几个复变函数理论中的定义、定理。已经熟悉复变函数理论的读者可以直接跳过。首先，定义可解析函数。

#### 定义 1.43. 可解析函数 (analytic function)

一个复变函数  $f(z)$  在  $z_0 = x_0 + iy_0$  及其附近单连通封闭区域内可微分，则说  $f$  在  $z_0$  可解析。

可解析函数的充分必要条件称柯西-黎曼条件。

#### 定理 1.33. 柯西-黎曼条件 (Cauchy-Riemann condition)

一个复变函数  $f(z)$  可微分，并且写成  $f(z) = u + iv$ ，若且惟若，这个函数满足柯西-黎曼条件

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad [\text{直角坐标}] \quad (1.307)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad [\text{极坐标}] \quad (1.308)$$

<sup>36</sup>注意，大二电磁学学到的时谐定义为  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Im}[\sqrt{2}\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)e^{j\omega t}]$ ，留意其区别。除了  $j = -i$  外，区别体现在  $\sqrt{2}$  导致的均方根表示式、复坡印廷向量、电场能量、磁场能量表示式等。

**性质 1.14. 可解析函数的几个特性**

有

- 由柯西-黎曼条件, 可发现  $u$  与  $v$  满足

$$\nabla^2 u = 0, \quad \nabla^2 v = 0 \quad (1.309)$$

此时称  $u, v$  为共轭调和函数。注意, 一函数  $f = u + iv$  为解析函数  $\Rightarrow$  则  $f$  为调和函数, 但反之未必成立。

- 由柯西-黎曼条件, 还可发现

$$\nabla u \cdot \nabla v = 0 \quad (1.310)$$

即  $u$  与  $v$  的等高线正交。同样, 一函数  $f = u + iv$  为解析函数  $\Rightarrow$  则  $u, v$  等高线正交, 但反之未必成立。

- 在场论中,  $u$  通常看作位能函数或势函数 (potential),  $v$  则看作力线或场 (field)。这个观点适用于电磁场, 也适用于流体力学的流速场等。

□

**定理 1.34. 柯西定理 (Cauchy theorem)**

单连通闭区域上的可解析函数沿着任何可求长闭合曲线的积分是 0, 又称 Cauchy-Goursat 定理 (Cauchy-Goursat theorem) 或柯西积分定理 (Cauchy integral theorem), 写成

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad (1.311)$$

注意, 这里  $C$  的方向按照右手法则。

**注** 柯西定理的等价叙述: 如果从一点到另一点沿着两个不同的路径, 而函数在两个路径之间处处是可解析的, 则该函数沿着这两个路径积分相等。



**笔记** 此定理提供了计算路径积分的有力工具。

□

**定理 1.35. 柯西积分公式**

假设  $f(z) \in \mathbb{C}$  在  $z \in \mathbb{C}$  复平面上解析 (analytic), 即函数  $f(z)$  在单连通封闭曲线  $C$  边界上与内部解析, 则有如下结果:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \begin{cases} 0 & \text{如果围道不包含 } z = z_0 \\ 2\pi i f(z_0) & \text{如果围道包含 } z_0 \end{cases}$$

其中, 围道绕行方向以逆时针方向为正向。

以上公式还可写成

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

其中,  $n$  为正整数,  $f^{(n)}$  表函数  $f(z)$  的  $n$  次微分。

 **笔记** 柯西积分公式应用在处理复变函数积分存在极点时, 极点在围道内, 或者极点在轴上时。 □

 **练习 1.35** 试求

$$\oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 0, & n \in \mathbb{N} \\ 2\pi i, & n = 0 \end{cases}$$

**解** 对积分路径参数化, 有  $z = z_0 + \rho e^{i\theta}$ ,  $dz = i\rho e^{i\theta} d\theta$ 。则原积分可以写为

$$\oint \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\theta} d\theta}{\rho^{n+1} e^{i(n+1)\theta}} = \frac{i}{\rho^n} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\theta = \begin{cases} 0, & n \in \mathbb{N} \\ 2\pi i, & n = 0 \end{cases}$$

注意, 此积分与  $\rho$  的大小、形状无关。 ■

在复数平面中, 一个函数并不是在所有点都有一样良好的特性。在一些点, 该函数可能变得不可微分, 这些点称奇异点。

#### 定义 1.44. 奇异点 (singularity)、极点 (pole)

复变函数  $f(z)$  在  $z_0$  不可微分, 则称  $z_0$  为  $f(z)$  的一奇异点。若存在包围奇异点  $z_0$  的一单连通封闭曲线, 而  $f(z)$  在此曲线上除  $z_0$  外均可解析, 则  $z_0$  称为  $f(z)$  的一个极点。 □

#### 定理 1.36. 洛朗级数 (Laurent series)

若函数  $f(z)$  在  $\rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2$  区域上可解析, 则对于满足  $\rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2$  的  $z$ , 恒有

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{m=1}^{\infty} b_m (z - z_0)^{-m} \quad (1.312)$$

其中,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

$$b_m = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} f(\zeta) (\zeta - z_0)^{m-1} d\zeta \quad (1.313)$$
□

通过以上定理铺陈, 将引入鼎鼎有名的留数定理。

**定理 1.37. 留数定理 (residue theorem)**

又称柯西留数定理。对复平面  $z \in \mathbb{C}$  上的函数  $f(z) \in \mathbb{C}$ ，在单连通封闭曲线  $C$  边界上解析，在曲线  $C$  内部除离散的极点  $z_j$  外也解析，则有

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_j \operatorname{Res} f(z_j)$$

其中， $\operatorname{Res} f(z)$  称函数  $f$  在  $z$  的留数。

**证明**

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \oint_C \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{m=1}^k b_m (z - z_0)^{-m} \right] dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \oint_C (z - z_0)^n dz + \sum_{m=1}^k b_m \oint_C (z - z_0)^{-m} dz \\ &= b_1 \oint_C \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i \times b_1 \end{aligned}$$

**注** 逆时针绕行为“正”惯例。

 **笔记** 善用 Mathematica 的 `Residue[f, {z, z0}]` 指令，能给出函数  $f$  在  $z = z_0$  的留数。 □

有些读者可能开始好奇，留数定理可能对应到电磁学中的哪个(些)方程？我们将在下一小节讨论。

**1.23.2 留数定理  $\Rightarrow$  安培环路定理、磁场高斯定律**

作为留数定理的一个“应用”，我们试着“推导”安培环路定理或安培定律。首先，假装不知道安培定律，但已知毕奥-沙伐定律 (Biot-Savart law)<sup>37</sup> 的实验结果，有

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \mathbf{e}_\phi \quad (1.314)$$

转换到直角坐标，有

$$B_x = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (1.315)$$

现在，我们构造一个磁场复函数  $\tilde{\mathbf{B}}$  为如下形式

$$\tilde{\mathbf{B}} = B_y + iB_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi z} \quad (1.316)$$

留意， $\tilde{\mathbf{B}} \neq \mathbf{B}$ 。

思考一下， $\tilde{\mathbf{B}}$  还是向量吗？

<sup>37</sup>1820 年，法国物理学家毕奥与沙伐通过实验建立了磁通密度与电流之间的关系，经法国数学家拉普拉斯提炼定量为

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{e}_R}{R^2}$$

其中，真空磁导率 (permeability)  $\mu_0 \equiv 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$  (或 H/m)。这里的式子是假设无限长载流导线，在周围产生的磁场。

现围绕一个封闭路径  $C$ ，包围电流源  $I$ ，则

$$\oint_C \tilde{\mathbf{B}} dz = \oint_C (B_y dx - B_x dy) + i(B_x dx + B_y dy) \quad (1.317)$$

利用留数定理，有

$$\oint_C \tilde{\mathbf{B}} dz = 2\pi i \times \text{Res} [\tilde{\mathbf{B}}(z=0)] = 2\pi i \times \frac{\mu_0 I}{2\pi} = 0 + i\mu_0 I \quad (1.318)$$

分别比较实部与虚部，有

$$\oint_C (B_x dx + B_y dy) = \mu_0 I, \quad \oint_C (B_y dx - B_x dy) = 0 \quad (1.319)$$

考虑实部部分的线积分，即为二维版本的安培定律

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (1.320)$$

虚部部分有

$$\oint_C (B_y dx - B_x dy) \stackrel{d\mathbf{l}=(-dy, dx)}{=} \oint_C \mathbf{B} \times d\mathbf{l} = 0 \quad (1.321)$$

其中， $\mathbf{B} \times d\mathbf{l}$  可以视为通过  $d\mathbf{l}$  上的二维磁通量。因此，上式即为二维版本磁场的高斯定律。

上面“推导”出了二维版本的安培定律与二维版本磁场的高斯定律。可以依样画葫芦，构造一个二维电场复函数。定义电场复函数

$$\tilde{\mathbf{E}} = E_x - iE_y \quad (1.322)$$

其中，

$$E_x = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (1.323)$$

其中， $\lambda$  为电荷线密度。接下来，推导过程类似于磁场情况，省略。利用留数定理，可以预期，将得到二维版本的静电场的“法拉第定律”

$$\oint_C (E_x dx + E_y dy) = 0 \Rightarrow \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1.324)$$

与二维版本的“电场高斯定律”( $\mathbf{E} \times d\mathbf{l}$  为通过  $d\mathbf{l}$  上的二维电通量)

$$\oint_C (E_y dx - E_x dy) = -\frac{\lambda}{\epsilon_0} \Rightarrow \oint_C \mathbf{E} \times d\mathbf{l} = -\frac{\lambda}{\epsilon_0} \quad (1.325)$$

到这边，我们演示了利用留数定理“推导”得到二维版本的几个静场基本方程。有些读者可能好奇，柯西-黎曼条件可能对应到电磁学中的哪个(些)方程？这里跳过细节，只给结果。

对电场复函数  $\tilde{\mathbf{E}} = E_x - iE_y$ ，根据柯西-黎曼条件，有

$$\begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial x} = -\frac{\partial E_y}{\partial y} \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \end{Bmatrix} = \nabla_{\perp}^2 \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \end{Bmatrix} = 0 \quad (1.326)$$

为二维版本的电场拉普拉斯方程。类似地，也有磁场的拉普拉斯方程，及静电/静磁场的泊松方程。下表整理了复变函数理论中的几个定理与静电、静磁场基本方程的对应关系。

此处省略推导细节，对此感兴趣的读者，可参考 M.J. Comella, Applications of the residue theorem to twodimensional electrostatic and magnetostatic situations, Am. J. Phys. **57** 7, 603 (1989). <https://doi.org/10.1119/1.15954>。对面向理工科应用的复变函数论感兴趣的读者，可参考教科书 J.W. Brown and R.V. Churchill, Complex variables and applications, 9th ed., McGraw Hill (2013)。

复分析	静电场	静磁场
留数定理	静电版本的法拉第定律 (实部) 电场高斯定律 (虚部)	磁场高斯定律 (实部) 安培环路定理 (虚部)
(简单) 奇点	独立电荷分布	独立电流分布
柯西-黎曼条件	拉普拉斯方程 泊松方程	
保角变换 (conformal mapping)	镜像电荷	镜像电流

### 1.23.3 保角映射

上一小节的讨论揭示了复变函数理论的留数定理和柯西-黎曼条件与静电/静磁场中的几个基本方程紧密关联，同时为这一小节提供应用复变函数作为分析二维静场问题的理论基础。除了先前讨论的几个复变函数理论的定义、定理外，应用复变函数作为静场问题分析工具还需要介绍几个相关的概念与定理 — 保角映射 (conformal mapping)。这里我们不打算给出定理证明，感兴趣的读者应参考复变函数理论的教科书。

过去熟悉的实变函数  $f(x)$  概念上是点对点的对应，现在讨论的复变函数  $f(z)$  更侧重平面上曲线对曲线的对应，比如： $w = f(z) = z^2 = u + iv$  的对应，在平面上有

$$f(z) = z^2 \Leftrightarrow \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases} \quad (1.327)$$

参考图 1.42。

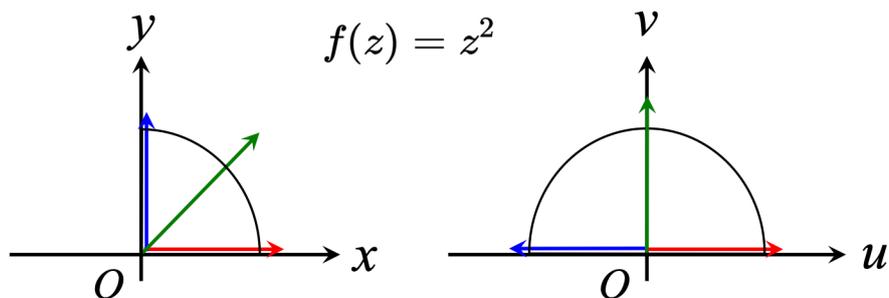


图 1.42:  $f(z = x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  映射一例，图中不同颜色曲线表示对应关系。

**定义 1.45. 保角映射 (conformal mapping)**

如下图 1.43, 能使  $\zeta$  平面 (像) 中的两曲线微元的夹角与  $z$  平面 (原像) 中的两曲线微元的夹角相同, 则称此映射为保角映射, 又称共形映射。

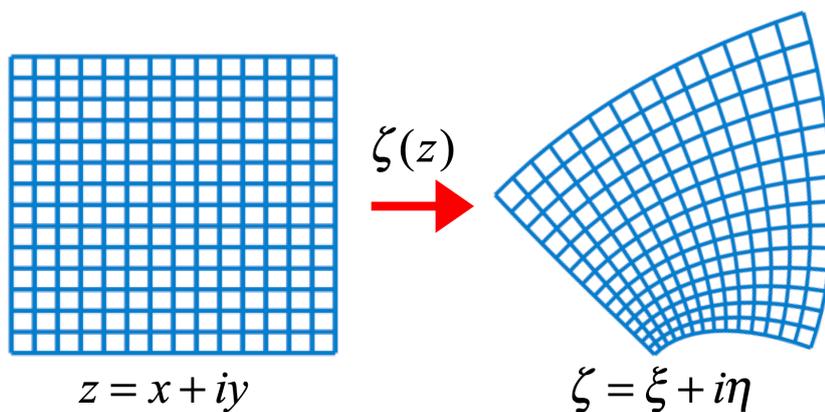


图 1.43: 保角映射。

**定理 1.38. 保角映射的充要条件**

$\zeta(z)$  为可解析函数, 且所在复区域内有  $\frac{d\zeta}{dz} \neq 0$ 。

保角映射为双向单值对应, 一个区域对应一个区域。不会是一个区域对应到一条线或一个点。比如:  $\zeta = z^2$  在  $z \neq 0$  处为保角映射, 在  $z = 0$  点则幅角放大两倍。

**定理 1.39. 边界对应定理**

设  $D$  为单连通区域,  $C$  为其边界, 为简单封闭曲线。 $\zeta(z)$  在  $D$  内可解析, 在  $C$  上连续。 $\zeta(z)$  将  $D$  与  $C$  双向单值映射到  $D'$  与  $C'$ , 并且绕行方向一致。

目前为止, 已知在  $z = (x, y)$  复平面中的可解析函数  $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  可以视为复势, 因为  $u, v$  满足拉普拉斯方程, 且  $u, v$  的等位线处处正交, 满足场线与等位线的基本性质。那么,  $w(z)$  在经过  $\zeta(z) = \zeta(x, y) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$  的保角映射后, 在  $\zeta = \xi + i\eta$  复平面中的  $\omega = u(\xi, \eta) + iv(\xi, \eta)$  是否仍为复势? 此问题由以下定理给出:

**定理 1.40. 保角映射特性**

在  $z$  平面的可解析函数  $w$  在经过  $z \leftrightarrow \zeta$  保角映射后,  $\omega = u(\xi, \eta) + iv(\xi, \eta)$  仍为可解析函数。换句话说,  $w$  与  $\omega$  的实部与虚部均满足拉普拉斯方程。

**注** 以上结果对于泊松方程也成立, 并且在  $z \leftrightarrow \zeta$  保角映射下, 电荷守恒定律恒成立, 即  $\rho(x, y)dxdy = \rho(\xi, \eta)d\xi d\eta$ 。

利用复变函数保角变换技巧的关键在于找到一个合适的变换  $\zeta$  — 有时不止变换一次, 使原本在  $(x, y)$  平面的静电/静磁场函数能够在  $(\xi, \eta)$  平面中简化。通常在  $(\xi, \eta)$  平面简化后的问题具有较好的对称性, 也就方便使用以前静电场或恒定磁场所解过的问题的结果。求解后再转换回  $(x, y)$  平面获得最终结果。

考虑下图 1.44, 在  $z = x + iy$  平面上, 有  $W(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ 。过平面  $A$  的电通量在  $z$  上可进一步化简为

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = - \iint_A \nabla\varphi \cdot d\mathbf{S} = - \iint_A \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \mathbf{e}_y \right) \cdot d\mathbf{S} \\ &= - \iint_A \left( \frac{\partial\psi}{\partial y} \mathbf{e}_x - \frac{\partial\psi}{\partial x} \mathbf{e}_y \right) \cdot d\mathbf{S} = - \iint_A \nabla\psi \times \mathbf{e}_z \cdot d\mathbf{S} \\ &= - \int_1^2 \nabla\psi \cdot d\boldsymbol{\ell} = \psi_1 - \psi_2\end{aligned}$$

则电容可以写做

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{\epsilon_0 \Phi}{\varphi_1 - \varphi_2} = \epsilon_0 \frac{\psi_1 - \psi_2}{\varphi_1 - \varphi_2} \quad (1.328)$$

在保角映射转换中, 电容值不变。

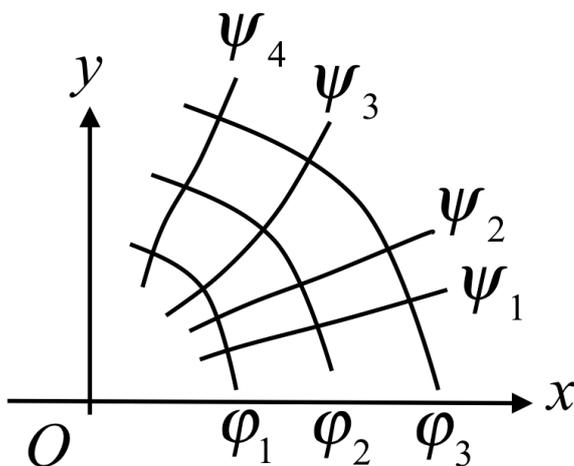


图 1.44: 保角映射的电容不变性。

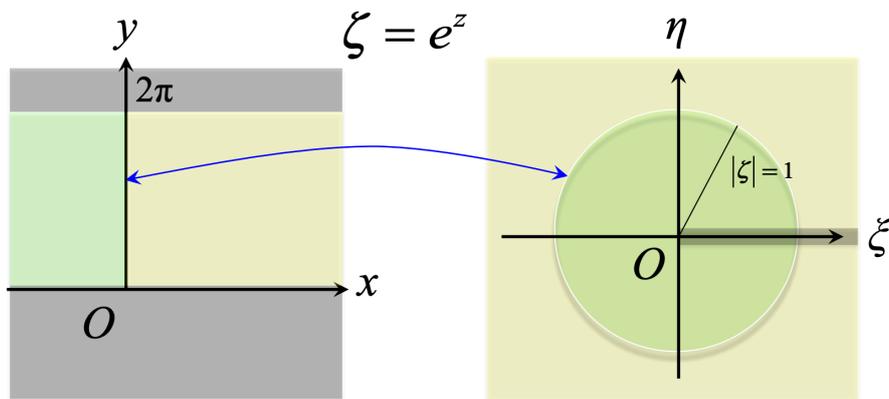
以下总结几个常见的基本映射:

- 线性映射  $\Rightarrow \zeta = \mu e^{i\alpha} z + b$ 。平移、转动、放大。
- 幂映射  $\Rightarrow \zeta = z^n$ 。注意,  $z = 0$  不保角。放大尖角区域。
- 根式映射  $\Rightarrow \zeta = z^{1/n}$ 。注意,  $z = 0$  不保角。缩小尖角区域。
- 指数映射  $\Rightarrow \zeta = e^z = re^{i\theta}$ 。长条形区域变为圆内外区域。
- 对数映射  $\Rightarrow \zeta = \ln z$ 。圆内外区域变为长条形区域。

指数映射与对数映射互为逆映射，有

$$e^{x+iy} = re^{i\theta} \Rightarrow \begin{cases} r = e^x \\ \theta = y \end{cases} \quad (1.329)$$

参考图 1.45。



$$\zeta = \ln z, 0 \leq \arg z < 2\pi$$

图 1.45: 指数映射与对数映射互为逆映射。

练习 1.36 参考图 1.46，对线电荷  $\lambda$  的无限长直均匀带电导线与地面相距  $a$ ，求空间电位分布。 ■

解 此题可用镜像电荷法做，但此处我们利用复变函数  $\zeta = \frac{z-ia}{z+ia}$  变换，将问题先从  $(x, y)$  坐标转移到  $(\xi, \eta)$  坐标中分析。在  $\zeta = \xi + i\eta$  空间中，圆柱坐标下的拉普拉斯方程，根据对称性化简，有

$$\nabla_{\zeta}^2 u = \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) = 0 \Rightarrow u = C_1 \ln \rho + C_2$$

其中， $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \sqrt{\zeta^2} = |\zeta|$ 。待定系数  $C_2$  可以由边界条件求得， $u(\rho = 1) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$ 。 $C_1$  则可通过  $\mathbf{E} = -\nabla u = -\frac{\partial u}{\partial \rho} \mathbf{e}_{\rho} = -\frac{C_1}{\rho} \mathbf{e}_{\rho}$  得到，有  $|\mathbf{E}(\rho = 1)| = -C_1 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\rho} \Big|_{\rho=1} \Rightarrow C_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}$ 。因此，在  $\zeta$  平面的电位函数可以完整写成

$$u(\xi, \eta) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln |\zeta|$$

利用映射关系  $\zeta = \frac{z-ia}{z+ia} = \frac{x+iy-ia}{x+iy+ia} = \xi + i\eta$ ，最终可以获得在  $z$  平面的电位

$$\begin{aligned} U(x, y) &= u[\xi(x, y), \eta(x, y)] = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left| \frac{z-ia}{z+ia} \right| \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + (y-a)^2}}{\sqrt{x^2 + (y+a)^2}} \right| \end{aligned}$$

练习 1.37 参考图 1.47，求顶角为  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  的带电体周围的静电场。 ■

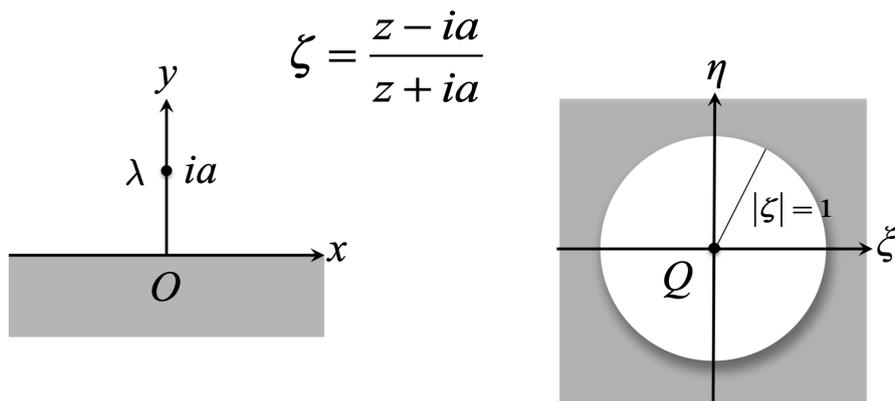


图 1.46: 利用保角映射求解无限长直均匀带电导线外一点静电位。

解 补角为  $2\pi - \pi/4 = 7\pi/4$ , 利用  $\zeta = z^{4/7}$  转换, 边界线的变换有

$$\begin{cases} z_1 = \rho e^{i0} \\ z_2 = \rho e^{i7\pi/4} \end{cases} \xrightarrow{\zeta = z^{4/7}} \begin{cases} \zeta_1 = \rho^{4/7} e^{i0} \\ \zeta_2 = \rho^{4/7} e^{i\pi/4} \end{cases}$$

在  $\zeta$  平面上对应为平角, 电位可以写成

$$U_\zeta = C_1 \eta = C_1 \operatorname{Im} \zeta = C_1 \operatorname{Im} z^{4/7} \Rightarrow U(\rho, \phi) = C_1 \rho \sin \frac{4\phi}{7}$$

由上可知, 最大场强发生在  $\phi = 7\pi/8$ 。 ■

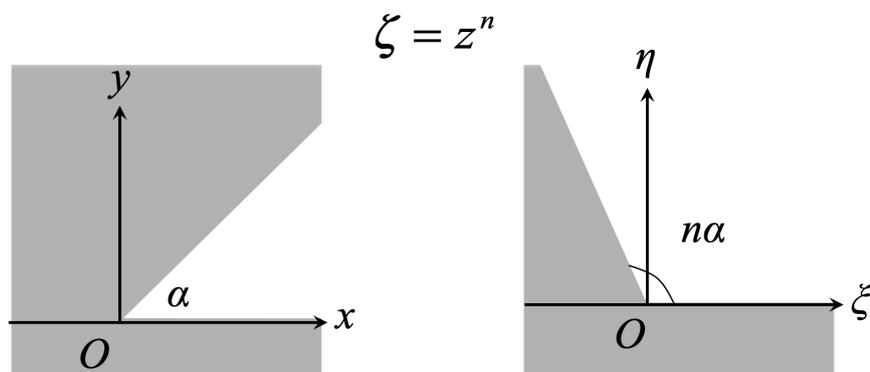


图 1.47: 利用保角映射求解尖角附近静电位。

练习 1.38 如图 1.48, 利用保角变换求圆柱电容器的单位长度电容。 ■

解 利用对数映射  $\zeta = \ln z$ , 分支切割 (branch cut) 取  $0 \leq \arg z < 2\pi$ 。在  $\zeta$  平面, 平行板间电场为

$$E \cdot 2\pi\ell = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\ell}$$

电容则有

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{E \cdot (\ln R_2 - \ln R_1)} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ell$$

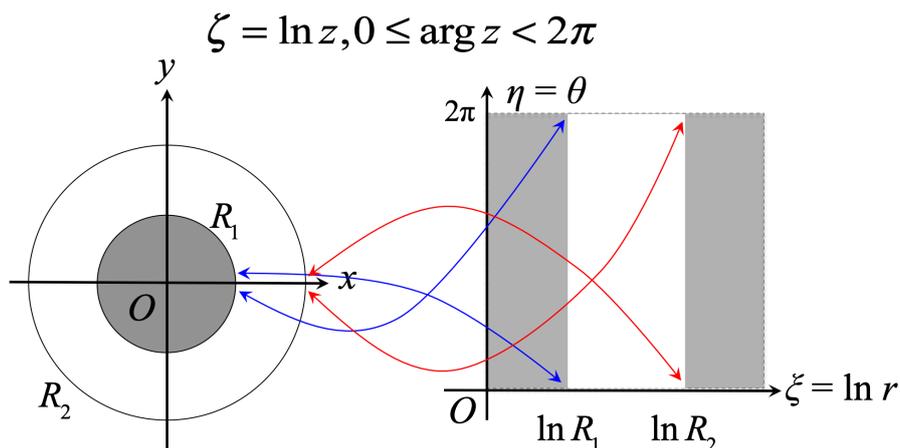


图 1.48: 利用保角映射求解圆柱电容器的单位长度电容。

由上面几个例题可以看到，找到合适的保角映射函数是简化分析的第一步，也是关键一步。除了需要经验，以下总结一个多角形区域映射的重要定理，称施瓦兹-克里斯托夫 (Schwarz-Christoffel) 映射。

**定理 1.41. 施瓦兹-克里斯托夫 (Schwarz-Christoffel) 映射**

考虑一多角形区域如下图 1.49，以下给出由  $z = x + iy$  平面至  $\zeta = \xi + i\eta$  平面的保角映射，写做

$$\frac{dz}{d\zeta} = M \sum_k (\zeta - b_k)^{-\theta_k/\pi} \quad (1.330)$$

或

$$z = z_0 + M \int \sum_{k=1}^K (\zeta - b_k)^{-\theta_k/\pi} d\zeta \quad (1.331)$$

其中， $M$  为待定系数。定义  $\theta > 0$  为外角，而  $\theta < 0$  为内角。 □

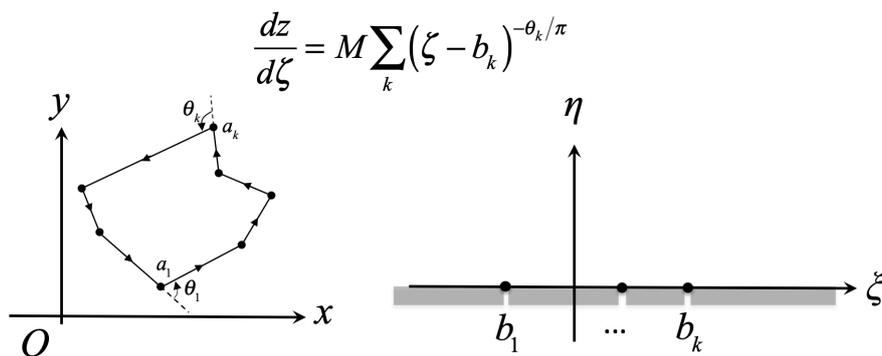


图 1.49: 利用保角映射求解圆柱电容器的单位长度电容。

对于单一角度的情况，Schwarz-Christoffel 映射简化为前面介绍的几种典型的保角映

射, 比如:

$$K=1 \begin{cases} \theta_1 = 0 \Rightarrow z = z_0 + M\zeta \Rightarrow \zeta = M^{-1}(z - z_0) \\ \theta_1 = \pi/2 \Rightarrow z = z_0 + M\sqrt{\zeta - b_1} \Rightarrow \zeta = \left(\frac{z - z_0}{M}\right)^2 + b_1 \\ \theta_1 = \pi \Rightarrow z = z_0 + M \ln |\zeta - b_1| \end{cases} \quad (1.332)$$

 **笔记** Schwarz-Christoffel 映射为处理复杂几何结构的二维电磁场问题时提供有力的工具。

 **练习 1.39** 参考图 1.50, 求带竖直壁(壁厚不计, 高度  $h$ )的平面带电导体附近电位。 ■

解

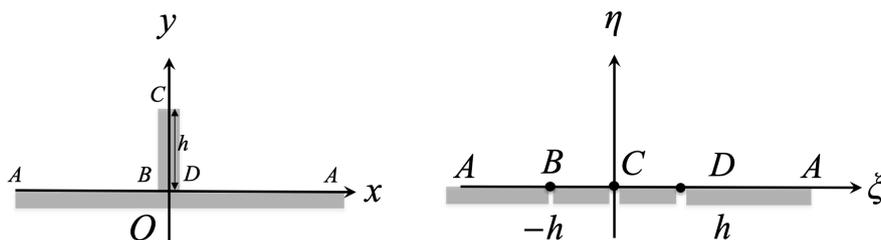


图 1.50: 利用 Schwarz-Christoffel 映射求解复杂结构的电位函数。

参照下表的映射关系 利用 Schwarz-Christoffel 定理, 映射函数可以写成

	A	B	C	D
$z$	$\infty$	0	$ih$	0
$\theta$	$2\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$\frac{\pi}{2}$
$b$	$\infty$	$-h$	0	$+h$

$$\begin{aligned} z &= z_0 + M \int (\zeta + h)^{-1/2} (\zeta - 0)^{-1} (\zeta - h)^{-1/2} d\zeta \\ &= z_0 + M \sqrt{\zeta^2 - h^2} \quad z_0=0, M=1 \quad \sqrt{\zeta^2 - h^2} \end{aligned}$$

在  $\zeta$  平面上, 电位方程为

$$\eta = \text{Im } \zeta = C_1 \quad \Rightarrow \quad \text{Im} \sqrt{z^2 + h^2} = C_1$$

其中,  $C_1$  在给定某平面电位值后被决定。写成  $x, y$  的表达式, 有

$$\left[ (x^2 - y^2 + h^2)^2 + 4x^2y^2 \right]^{1/4} \sin \left( \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2xy}{x^2 - y^2 + h^2} \right) = C_1$$

读者可以自行画出等位线与场线验证以上结果合理性。 ■

### 1.23.4 平行板电容器边缘场问题

平行板电容器的边缘场问题是一个经典问题, 早在电磁理论建设阶段, Maxwell 即分析过此问题。参考图 1.51, 考虑以下两步的保角映射:

第一步  $\Rightarrow$  保角映射将平行板映射到  $\zeta_1$  的上半平面, 顶点对应总结为下表

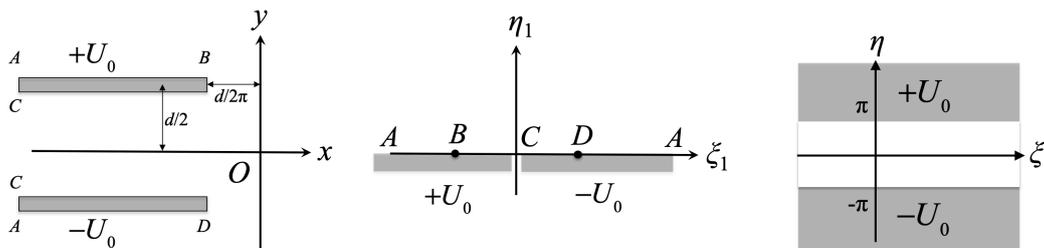


图 1.51: 平行板电容器边缘场分析。

	A	B	C	D
$z$	$\infty$	$-\frac{d}{2\pi} + i\frac{d}{2}$	0	$-\frac{d}{2\pi} - i\frac{d}{2}$
$\theta$	$3\pi$	$-\pi$	$\pi$	$-\pi$
$b$	$\infty$	-1	0	1

利用上表与 Schwarz-Christoffel 定理, 有

$$\begin{aligned} z &= z_0 + M \int (\zeta_1 + 1)^1 (\zeta_1 - 0)^{-1} (\zeta_1 - 1)^1 d\zeta \\ &= z_0 + M \left( \frac{\zeta_1^2}{2} - \ln \zeta_1 \right) \Big|_{z_0 = -id/2, M = -d/\pi}^{-i\frac{d}{2} - \frac{d}{\pi} \left( \frac{\zeta_1^2}{2} - \ln \zeta_1 \right)} \end{aligned}$$

**第二步**  $\Rightarrow$  再将上半平面映射为无限大平行板 (利用  $\zeta = z^2$  将  $180^\circ$  放大 2 倍至  $360^\circ$ 、利用  $\zeta = \ln z$  将圆转矩形区域)

$$\begin{cases} \zeta_2 = \zeta_1^2 \\ \zeta_3 = \ln \zeta_2 \\ \zeta = \zeta_3 - i\pi \end{cases} \Rightarrow z = -i\frac{d}{2} + \frac{d}{2\pi} (e^\zeta + \zeta) \quad (1.333)$$

在  $\zeta$  平面, 由于平行板是无限大平面, 无边缘效应, 平板间电位可以写成

$$u_\zeta = \frac{U_0}{\pi} \eta = \frac{U_0}{\pi} \operatorname{Im} \zeta = \operatorname{Re} \left( -i \frac{U_0}{\pi} \zeta \right) = \operatorname{Re} w_\zeta \quad (1.334)$$

**第三步**  $\Rightarrow$  利用已经获得的映射关系, 将上式最终写成  $z = x + iy$  形式<sup>38</sup>

$$w(z) = w_\zeta(z) = -i \frac{U_0}{\pi} \zeta(z) \quad (1.335)$$

$$z = \frac{d}{2\pi} \left( e^{i\frac{\pi}{U_0} w} + i \frac{\pi}{U_0} w \right) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{d}{2\pi} \left( e^{-\frac{\pi}{U_0} v} \cos \frac{\pi}{U_0} u - \frac{\pi}{U_0} v \right) \\ y = \frac{d}{2\pi} \left( e^{-\frac{\pi}{U_0} v} \sin \frac{\pi}{U_0} u + \frac{\pi}{U_0} u \right) \end{cases} \quad (1.336)$$

电场强度可以写成

$$\begin{aligned} E(x, y; u, v) &= \left| \frac{dw}{dz} \right| = \left| \frac{dz}{dw} \right|^{-1} \\ &= \frac{2U_0}{d \sqrt{e^{-2\frac{\pi}{U_0} v} + 2e^{-\frac{\pi}{U_0} v} \cos \frac{\pi}{U_0} u + 1}} \rightarrow \begin{cases} \frac{2U_0}{d}, x \rightarrow -\infty \\ \infty, x \rightarrow -\frac{d}{2\pi}, |y| \rightarrow \frac{d}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

极板边缘附近的电场强度如图 1.52 给出。

<sup>38</sup>由于映射关系有超越函数, 此处仅写成隐函数形式。

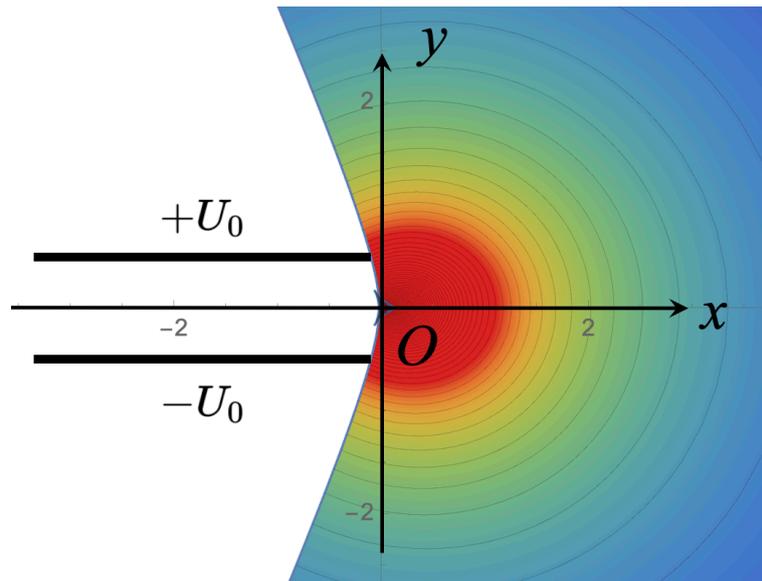


图 1.52: 平行板电容器极板边缘附近的电场强度, 图例假设  $d = 1, U_0 = \pi$ 。

### 1.23.5 浅谈: 史密斯图

作为复变函数在电磁理论的应用, 除了利用时谐场简化分析, 利用留数定理、保角映射分析二维静场问题之外, 保角映射在射频或微波工程的一个重要应用有史密斯图 (Smith chart), 又称史密斯阻抗图。史密斯阻抗图是传输线特性分析的一个重要工具, 由美国电气工程师 Phillip Smith<sup>39</sup>于 1939 年发明<sup>40</sup>。史密斯图是一种极坐标图, 用于可视化复阻抗  $Z$  和反射系数  $\Gamma$  之间的关系, 能够直观地表示传输线上的阻抗匹配情况, 帮助微波电路设计者进行阻抗匹配设计。史密斯图由一系列圆组成, 可以用来计算驻波比、反射系数、阻抗等参数, 以及确定匹配高频电路网络的元件值。在高频电路设计、天线设计和微波工程中, 史密斯图是一个不可或缺的分析 and 设计工具, 能够大大简化复杂的计算过程。

一般阻抗可以写成电阻与电抗, 有  $Z = R + iX$ , 其中,  $0 \leq R < \infty, -\infty < X < \infty$ 。史密斯阻抗图在电磁波传输理论中有重要的应用, 如图 1.53 所示, 考虑一个特殊的保角映射<sup>41</sup>

$$\Gamma = \frac{V_{\text{反射}}}{V_{\text{入射}}} = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} = \frac{z - 1}{z + 1} \quad (1.337)$$

其中,  $Z_0$  为特征阻抗 (characteristic impedance) 或参考阻抗,  $z = Z/Z_0$ 。这里的  $\Gamma$  称为反射系数, 用来量化一电磁信号在分界面的反射特性。上式也可写成

$$z = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} \quad (1.338)$$

这个变换将  $(R, X)$  平面上的点, 即任意一阻抗值, 映射到  $(U, V)$  平面。等  $R$  线与

<sup>39</sup>Phillip Hagar Smith (1905-1987)

<sup>40</sup>在一些文献中, 史密斯图又称 Mizuhashi-Smith 图, 由于日本无线电信工程师水橋東作 (Mizuhashi Tosaku) 在 1937 年独立发明。

<sup>41</sup>此种变换有个特殊名称, 称为 Mobius 变换。我们将在 §7.4 介绍高斯光束的复光束参量时, 将再碰到这类 Mobius 变换。

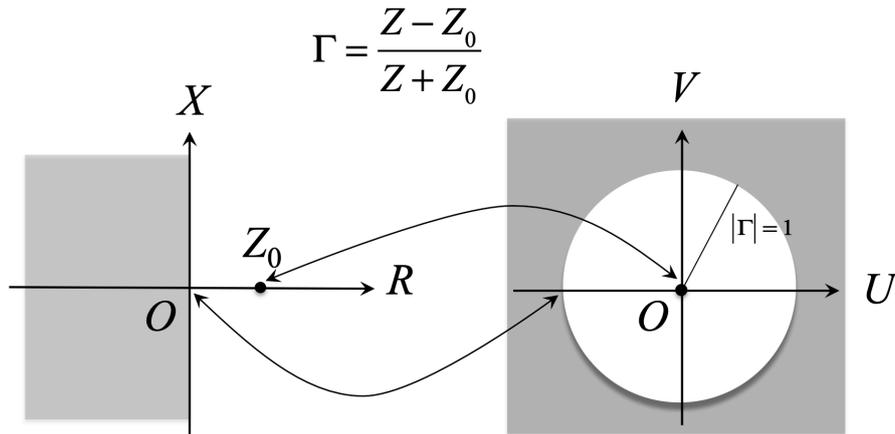


图 1.53: 阻抗函数复平面保角变换。由于  $R \geq 0$ ，图中灰色区域不是感兴趣的区域。

等  $X$  线将分别对应到两个圆，

$$\begin{cases} Z = R + iX \\ \Gamma = U + iV \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(U - \frac{R}{R + Z_0}\right)^2 + V^2 = \left(\frac{Z_0}{R + Z_0}\right)^2 \\ (U - 1)^2 + \left(V - \frac{Z_0}{X}\right)^2 = \left(\frac{Z_0}{X}\right)^2 \end{cases} \quad (1.339)$$

其中，在  $(U, V)$  复平面中，参考图 1.54

- 等  $R$  线的圆心落在  $V = 0$  轴上，随  $R$  增加往右移，半径变小；
- 等  $X$  线的圆心落在  $U = 0$  轴上，随  $X$  增加而靠近  $V = 0$  轴，半径变小。

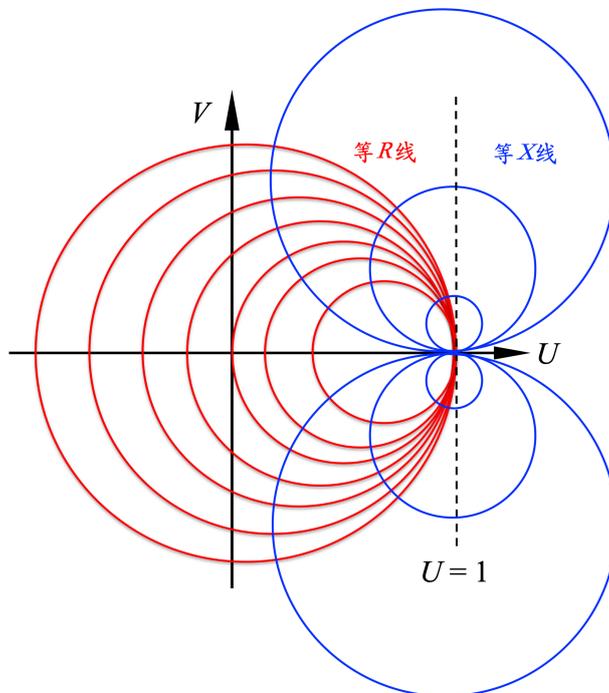


图 1.54:  $(U, V)$  复平面中的等  $R$  线与等  $X$  线。

在传输线的不同位置，反射系数不一样，对应史密士图上的点位置也就不同。几个特殊情况的对对应关系可参考图 1.55。

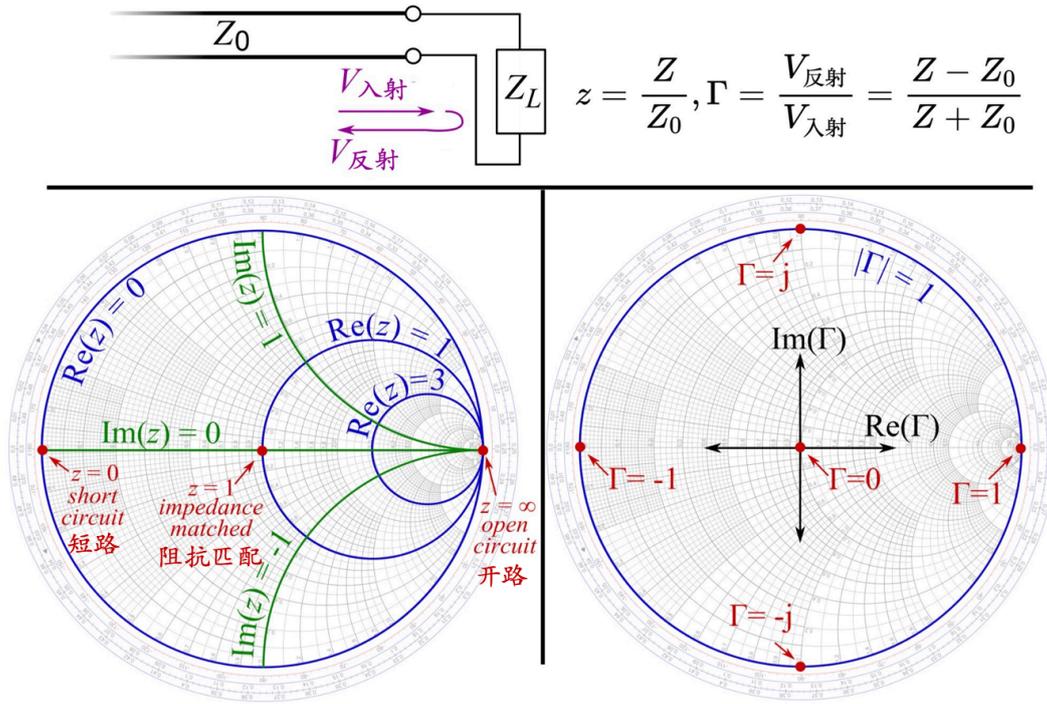


图 1.55: 史密斯阻抗图。图例修改自 wikipedia。



**笔记** 这里仅介绍史密斯阻抗图背后的原理。关于史密斯阻抗图在高频电路中的实际应用，此处不论，感兴趣的读者应参考相关专著。

## 1.24 浅谈：为什么 Maxwell 电磁理论这么难？

这一章简短回顾了大二学过的电磁学的部分内容，将作为下面讨论电磁辐射与加速器束动力学的预备知识。结束这一章之前，我们试着暂时跳脱框架，思考一下：为什么 Maxwell 电磁理论这么难？——一个或许藏在某些读者心中好一段时间的问题。

首先，电磁现象是自然现象，是客体 (fact)，无关乎难或简单<sup>42</sup>。再者，Maxwell 理论并不是唯一的可以用来描述电磁现象的理论<sup>43</sup>，尽管现在人们相信 Maxwell 理论可能是最好的选择 (或最漂亮的、最简洁的理论)。因此，需要理清的是：标题不是“为什么电磁理论这么难？”，而是“为什么 Maxwell 电磁理论这么难？”。

根据英裔美国物理学家戴森 (Freeman J. Dyson, 1923-2020)，或许这个问题可归因于以下几点：

1. **数学上的困难** ⇒ 相对于人们熟知的牛顿力学  $F = ma$ ，早期数学表述过于复杂。多亏后来的数学物理学家，麦克斯韦的电磁理论通过向量分析已大大化简。
2. **直觉上的困难** ⇒ 早期发展的电磁理论仍不脱离机械观，因此时常可见将电场、磁场与电荷、电流等物理量与机械应力对照。一直要到后来人们接受放弃机械观，而采取“场”的思维时，麦克斯韦的电磁理论才开始变得较容易理解。
3. **结构上的困难** ⇒ Dyson 提出的“双层结构理论 (two-layer structure)”：第一层是物质世界的基本组成，由场建构。第二层则是人们能触及、测量的物理量，以力、能量等方式呈现。第二层的物理量可以视为是第一层物理量的 (双) 线性 (bi-linear) 或二次式 (quadratic) 组成的形式。

类似的困难也出现在量子力学理论。以奥地利物理学家薛定谔 (Erwin Schroedinger, 1887-1961) 提出的波函数  $\psi$  为概念的量子力学，大学物理学过，只有波函数模的平方  $|\psi|^2$  才有对应的实质物理意义，隐含了上述的“双层结构”。

从前沿角度看，Maxwell 电磁理论的影响不仅能用来解释电与磁现象，更深远的影响在于它提升了过去牛顿力学的机械观，成为以“场”为中心的理论架构与“双层结构”的分析观点。后来二十世纪的相对论、量子力学、与规范场论等都是在这种思维下获得成功的例子。



**笔记** 此小节标题借用了 Freeman Dyson 教授的一篇短文：Why is Maxwell's theory so hard to understand? 更多讨论见 <http://www.clerkmaxwellfoundation.org/DysonFreemanA>

<sup>42</sup>如果读者的问题是“为什么电磁理论这么难？”，那严格来说不是这一节要探讨的问题。

<sup>43</sup>对其它尝试构建描述电磁现象的理论感兴趣的读者，可参考 Alfred O'Rahilly, Electromagnetic Theory: A Critical Examination of Fundamentals, Dover Publications (1965)。

rticle.pdf。

## 第一章 补充习题

1. 将微分形式 SI 制 Maxwell 方程组写成微分形式 CGS 制 Maxwell 方程组。

解

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

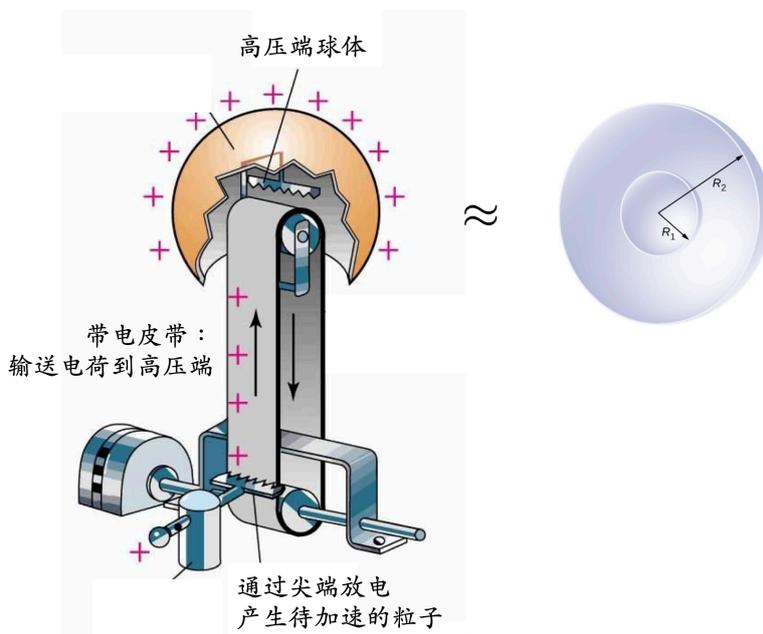
此外，洛伦兹力方程有

$$\mathbf{F} = q \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$$

本构关系有

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$$

2. Van de Graaff 加速器是一种产生静电高压的装置，最早由美国 MIT 物理学家 R.J. Van de Graaff 于 1929 年发明。参考下图<sup>44</sup>，静电加速器的击穿现象是妨碍加速电压提高的重要因素。考虑如图的简化模型，在两同心球壳间充以高压强的气体用来提高击穿场强，内球面为高压电极，外球面为与内电极同心的球形钢制容器。给定钢制容器的半径  $R_2$ 、高压气体相对介电系数  $\epsilon_r$ 、击穿场强  $E_0$ ，计算高压电极半径  $R_1$  为何值时，电极上的电压可达最大值。



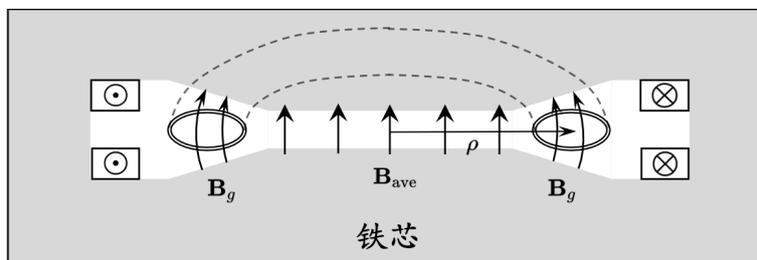
解 同心球间电场可写成  $E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 r^2}$ ，电位差有

$$V = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = E(R_1) R_1^2 \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

<sup>44</sup>图例修改自 <https://www.quora.com/What-is-the-use-of-a-Van-de-Graaff-generator>。

按题意，当  $R_1 = R_2/2$  时，有  $V_{0,\max} = \frac{R_2}{4} E_0$ 。

3. 电子感应加速器 (betatron) 是利用逐渐增加的磁场所产生的感应电场来加速粒子。参考下图，设  $\mathbf{B}_{\text{ave}}$  为半径  $\rho$  粒子轨道内的平均场强， $\mathbf{B}_g$  则是在半径  $\rho$  处的场强。考虑相对论能量粒子，如果要使粒子维持在与能量无关的半径为  $\rho$  的轨道上， $\mathbf{B}_{\text{ave}}$  与  $\mathbf{B}_g$  之间是否存在联系？如果是，请给出条件。

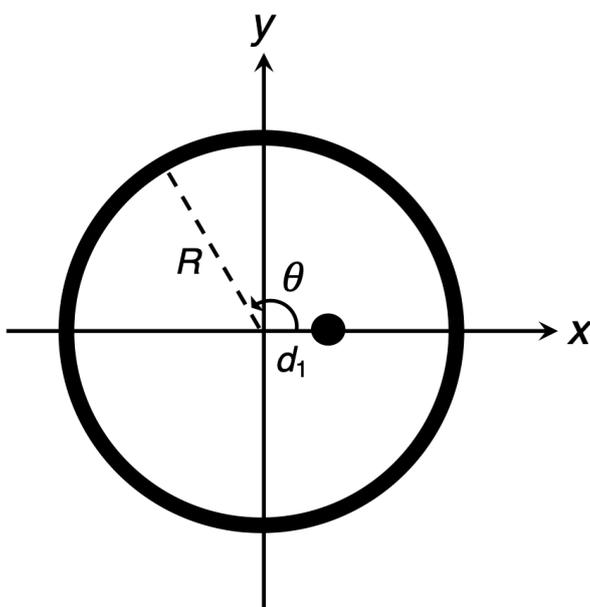


**解** 利用法拉第感应定律，能得到  $\mathbf{B}_{\text{ave}} = 2\mathbf{B}_g$ 。此条件称 Wideroe 条件 (Wideroe's condition)。

4. BPM (beam position monitor) 是粒子加速器中非常典型的一种束测元件。参考下图，利用静电场理论的镜像法，推导在圆柱金属管壁上任意位置  $x + iy = Re^{i\theta}$  的电场有

$$E_y + iE_x = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \left[ \frac{-ie^{-i\theta} (R^2 - d_1^2)}{R^2 + d_1^2 - 2Rd_1 \cos \theta} \right]$$

其中， $\lambda_1$  为粒子束线电荷密度 (line charge density)，有  $I = \beta c\lambda$ 。



5. 定性说明什么是趋肤效应。推导趋肤深度 (skin depth)  $\delta$  公式。说明这个结果在何时成立。定性说明什么是反常趋肤效应。说明什么时候可能出现反常趋肤效应。
6. 当分界面边界的一侧中有一侧为理想导体 (电导率  $\sigma \rightarrow \infty$ )，另一侧为真空，写下对应化简的分界面边界条件。当理想导体换为有限电导率导体 (电导率  $\sigma < \infty$ ) 时，写下对应的分界面边界条件。

7. 推导一真空中平面电磁波 (时变电磁场) 正向入射金属 (电导率  $\sigma < \infty$ ) 平面后, 电场、磁场的形式。得到电场、磁场之后, 验证其满足 Leontovich 边界条件。

8. 对半径  $a$ 、长  $L$  的圆柱形谐振腔  $\text{TM}_{010}$  模式,

a) 假设金属管壁为理想导体 (即电导率  $\sigma = \infty$ ), 推导在  $(\rho, \phi, z)$  方向的电、磁场, 仅允许留下一个待定系数。

b) 如何决定该待定系数? 文字说明即可。

c) 假设金属管壁为理想导体 (即电导率  $\sigma = \infty$ ), 推导  $\text{TM}_{010}$  模的共振频率。

d) 假设金属管壁为理想导体 (即电导率  $\sigma = \infty$ ), 推导  $\text{TM}_{010}$  模的场能量。

e) 当金属管壁存在热损耗 (即电导率  $\sigma < \infty$ ), 证明  $\text{TM}_{010}$  模的品质因数可以写为

$$Q = \frac{aL}{\delta(a+L)}$$

其中,  $\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu \sigma}}$  为趋肤深度。

f) 当金属管壁  $\sigma < \infty$ , 谐振腔金属表面附近有欧姆热效应, 推导表面热损耗功率为

$$\langle P_{\text{loss}} \rangle = \frac{\rho_s}{2} \iint_A |H_{\parallel}|^2 dS$$

其中,  $\rho_s = \sqrt{\frac{\mu \omega}{2\sigma}} = \frac{1}{\sigma \delta}$  为金属导体表面电阻,  $H_{\parallel}$  为沿导体表面的时谐平均磁场。提示: 时谐平均场 = 一半的场振幅。

9. 写下谐振腔中的本征模时, 存在一个未定系数。此未定系数如何决定? 以圆柱形谐振腔为例, 假设馈入谐振腔的单模电磁场能量为  $\mathcal{W}$ , 试决定此未定系数。

10. 电磁能量  $\mathcal{W}$  在洛伦兹变换下是不是不变量? 考虑两个谐振腔, 一个相对于实验室坐标静止, 另一个沿着  $z$  轴以  $v$  移动, 试分析。

11. 从量子力学观点看, 电磁能量  $\mathcal{W} = N\hbar\omega$  要求是整数个光子携带的总 (平均) 能量, 忽略涨落效应, 洛伦兹变换下光子平均个数是不是洛伦兹不变量?

12. 利用 Slater 定理推论, 对于真实的、操作在  $\text{TM}_{010}$  模的加速器谐振腔, 考虑束团进入与离开谐振腔势必经过开口处, 其共振频率将比基于理论计算的理想的、封闭谐振腔的共振频率高或低?

13. 格林函数 (Green function) 法是电磁场分析的一个重要技巧。

a) 简述格林函数法。说明为什么格林函数要求系统为线性系统。

b) 写下 Helmholtz 方程  $\nabla^2 f(\mathbf{r}) + k^2 f(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r})$  对应的格林函数方程。

c) 证明其三维格林函数为

$$G(\mathbf{r}) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}$$

d) 说明 Helmholtz 方程的完整解可以写为

$$f(\mathbf{r}) = f_0(\mathbf{r}) + \iiint_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{r} - \boldsymbol{\tau}) g(\boldsymbol{\tau}) d^3\boldsymbol{\tau}$$

其中,  $f_0$  是当  $g = 0$  时的齐次解。当  $g$  中包含  $f$  时, 上面方程就从微分形式的 Helmholtz 方程变成对应的积分方程。

- e) 令  $g = 0$ , 当  $k$  为常数时, 说明其解为  $e^{ikz}$  是否合理? 分两种情况讨论
- 将  $\nabla^2 f(\mathbf{r}) + k^2 f(\mathbf{r}) = 0$  视为描述电磁场的波方程。
  - 将  $\nabla^2 f(\mathbf{r}) + k^2 f(\mathbf{r}) = 0$  视为粒子的薛定谔波方程。
- f) 当  $k$  为常数时, 但  $g \neq 0$  时, 对应薛定谔波方程表示包含势能项。对应电磁场的波方程可能是什么效应? 由此看, 量子力学中关于包含势能项时求解薛定谔波方程的许多方法/技巧, 也就容易移植到求解电磁场问题。
14. 试定性描述不同频率的电磁场轰击在金属上会发生什么事? 假设电磁场强度还未达到游离金属外侧电子的程度, 假设金属电子的平均自由程  $\lambda_D \sim 10r_0$ , 其中,  $r_0$  为原子的经典半径。考虑:
- a)  $\omega \rightarrow 0$
  - b)  $1 \ll \omega \ll \lambda_D^{-1}$
  - c)  $\omega \gg \lambda_D^{-1}$
15. 试写出以下物理量组合在实验室坐标 (以下标 Lab 表示) 与在移动坐标 (以 co-mov 表示) 的洛伦兹转换表示式 (假设移动坐标的速度为  $\mathbf{v} = v_z \mathbf{e}_z$ , 以洛伦兹因子  $\beta = \frac{v_z}{c}$  与  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$  表示):
- a) 坐标向量与时间  $(\mathbf{r}, t)$ , 其中  $\mathbf{r} = (x, y, z)$
  - b) 动量与能量  $(\mathbf{p}, E)$ , 其中  $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$
  - c) 电流密度与电荷  $(\mathbf{J}, \rho)$ , 其中  $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$
  - d) 波数与相位  $(\mathbf{k}, \phi)$ , 其中  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$
  - e) 向量与标量位函数  $(\mathbf{A}, \varphi)$ , 其中  $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$
  - f) 电场与磁场  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ , 其中  $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ ,  $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$
16. 试证明  $(1/c^2) E^2 - B^2$  和  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$  为洛伦兹不变量。

**解** 先将电场、磁场按速度方向分解成平行与垂直两部分, 有

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp + E_\parallel, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_\perp + B_\parallel$$

根据洛伦兹变换, 令  $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ , 有

$$\begin{aligned} E'_\parallel &= E_\parallel, & B'_\parallel &= B_\parallel \\ \mathbf{E}'_\perp &= \gamma(\mathbf{E}_\perp + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), & \mathbf{B}'_\perp &= \gamma\left(\mathbf{B}_\perp - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}_\perp\right) \\ \mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' &= E_\parallel B_\parallel + \gamma^2 \left[ \mathbf{E}_\perp \cdot \mathbf{B}_\perp - \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_\perp) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{E}_\perp)}{c^2} \right] \\ &= E_\parallel B_\parallel + \gamma^2 \left( \mathbf{E}_\perp \cdot \mathbf{B}_\perp - \frac{v^2 \mathbf{E}_\perp \cdot \mathbf{B}_\perp}{c^2} \right) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$

可以验证

$$E'^2_\perp = \gamma^2 (E^2_\perp + v^2 B^2_\perp), \quad B'^2_\perp = \gamma^2 \left( B^2_\perp + \frac{v^2}{c^4} E^2_\perp \right)$$

故有

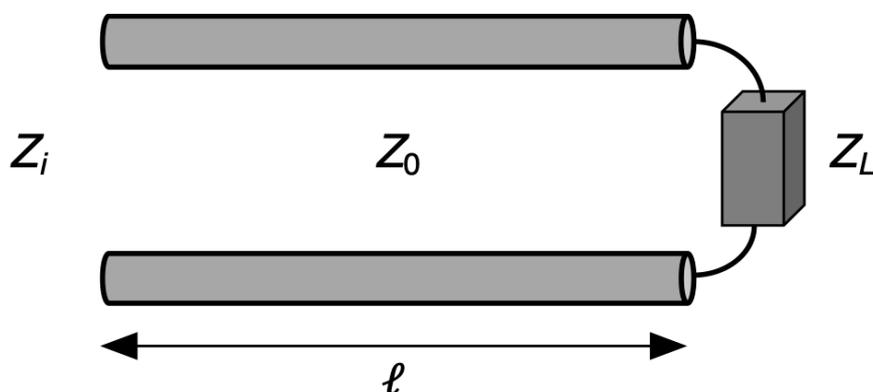
$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} E'^2 - B'^2 &= \frac{1}{c^2} (E'_{\parallel} + \mathbf{E}'_{\perp})^2 - (B'_{\parallel} + \mathbf{B}'_{\perp})^2 \\ &= \left( \frac{1}{c^2} E_{\parallel}^2 - B_{\parallel}^2 \right) + \left( \frac{1}{c^2} E_{\perp}^2 - B_{\perp}^2 \right) \\ &= \frac{1}{c^2} \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 \end{aligned}$$

故  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$  和  $\frac{1}{c^2} \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$  为洛伦兹不变量。

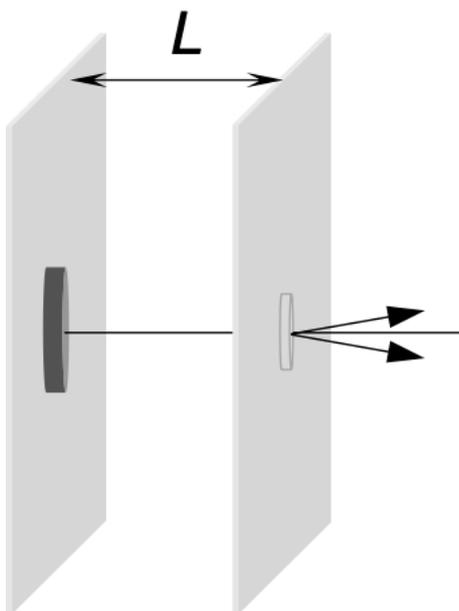
17. 时变电磁场在不同界面会发生反射与透射。在射频或微波频段，一种常见的分析方式采用传输线模型。证明如下输入阻抗  $Z_i(k)$ 、本质阻抗  $Z_0$  与负载  $Z_L(k)$  的关系有

$$Z_i = Z_0 \left[ \frac{Z_L \cos\left(\frac{2\pi\ell}{\lambda}\right) + iZ_0 \sin\left(\frac{2\pi\ell}{\lambda}\right)}{Z_0 \cos\left(\frac{2\pi\ell}{\lambda}\right) + iZ_L \sin\left(\frac{2\pi\ell}{\lambda}\right)} \right]$$

其中， $k = 2\pi/\lambda$ 。简化起见，假设传输过程没有损耗。



18. 考虑如下简化的电子枪模型，电子从阴极出来，加速到阳极后，通过一小孔。



假设两极间电压为  $V$ ，纵向电场  $E_z(s)$ ，电子自阴极出来后，沿着轴存在有限偏移

- a) 忽略电子产生的电场，估算电子离开小孔后的张角为何？提示：高斯定律。  
 b) 考虑自阴极产生的电子束团贡献 (或修正) 外部电场，证明能从阴极取出的最大电流  $I \propto V^{3/2}$ 。此结果称 Child-Langmuir 定律。

**解** 提示：列写在两极板间的泊松方程，采用一维近似，有

$$\nabla^2 \varphi \rightarrow \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = -\frac{J}{v\epsilon_0}$$

此外，粒子动能与极板电位差有

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = q\varphi$$

于是，此问题转化为求解如下常微分方程

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -\frac{J}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m_e}{2e\varphi}}$$

19. 金属管壁形成的方形波导 (边长  $a$ ) 内填充折射率  $n = 2$  的电介质材料。假设电磁波工作频率 9 GHz，以  $\text{TM}_{11}$  模式传播，若要求 20% 余裕<sup>45</sup>，求方形波导边长允许范围。

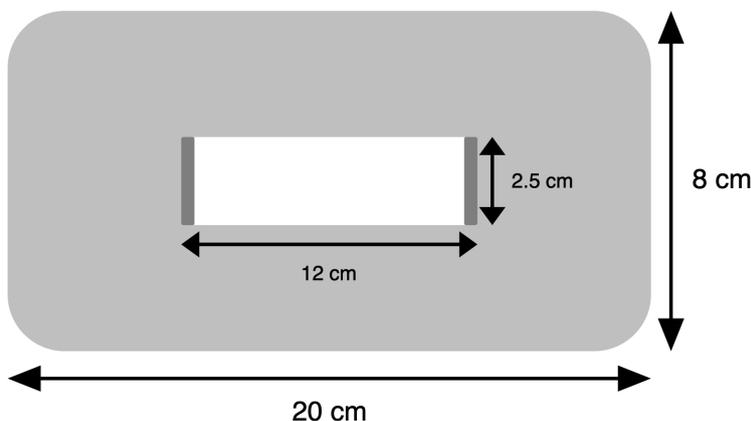
**解** 考虑  $\text{TM}_{11}$  与  $\text{TM}_{21}$  模式的截止频率

$$f_{11}^{\text{TM}} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\frac{2}{a^2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot 3 \times 10^8}{a \cdot 4}$$

$$f_{21}^{\text{TM}} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\frac{5}{a^2}} = \frac{\sqrt{5} \cdot 3 \times 10^8}{a \cdot 4}$$

设计指标的要求因此有  $1.2f_{11}^{\text{TM}} < f < 0.8f_{21}^{\text{TM}} \Rightarrow 0.014 < a < 0.015 \text{ m}$ 。

20. 考虑截面形态如下，0.5 m 长的二极磁铁，浅灰色部分为铁磁媒质，相对磁导率  $\mu_r = 5000$ ，深灰色区域为载流线圈缠绕区域。

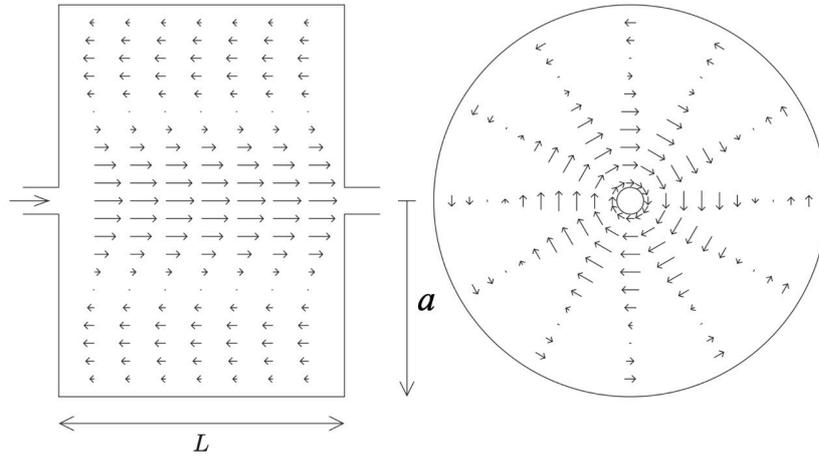


- a) 在空隙中要产生 0.6 T 磁场，估算缠绕多少电流。  
 b) 通过空气冷却的铜线能够承载  $1.5 \text{ A/mm}^2$ ，通过水冷的铜线能够承载 10 倍电流密度。水冷增加成本，一般非必要不采用。按上子题要求的目标与此磁铁尺寸，如果你是设计者，将建议哪一种方案？说明原因。如果采用水冷方案，空隙的横向尺寸还剩多少？  
 c) 如果一电源供应器最多能够提供 1000 A 电流，那么这磁铁需要缠绕几圈线圈？

<sup>45</sup>即在波导中的工作频率高于  $\text{TM}_{11}$  模式截止频率的 20%，低于下一个模式的 20%。

- d) 空隙中储存多少能量？
- e) 周围铁磁媒质里储存多少能量？
- f) 估算此磁铁的电感。

21. 判断下图为何种模式，写出对应的电场、磁场的时域表示式。



22. 判断下图为何种模式，写出对应的电场、磁场的时域表示式。

